Cap. 7 Aproximarea numerică a funcţiilor

7.1 Formularea problemei

- fie funcţia $f:[a,b]\to\Re,\ a,b\in\Re$

- problema de calcul $\to$ evalurea, în orice punct $x^*\in[a,b]$ a următoarelor:

$$f(x^*), f'(x^*), f''(x^*), \ldots, \int_c^d f(x)\cdot dx,\ a\le c<d\le b$$

- pot exista următoarele situaţii:

✔ *funcţia* f *este cunoscută analitic* prin una sau mai multe expresii, în general complicate sau dificil de evaluat, derivat sau integrat

✔ *funcţia* f *nu este cunoscută analitic*, ci printr-un şir de valori:

$$\{x_i, f(x_i)\}_{i=0,\ldots,n}$$

$$\{x_i\}_{i=0,\ldots,n},\ x_i\in[a,b],\ i=0,\ldots,n \qquad \Delta_{[a,b]}: a\le x_0<\ldots<x_i<\ldots<x_n\le b$$

divizare a intervalului [a, b]

👉 rezolvarea problemei $\longrightarrow$ găsirea unei funcţii cu o expresie în general simplă, uşor de evaluat, derivat sau integrat, care să aproximeze cât mai bine pe f

$$\forall x^* \in [a, b],\ F(x^*) \cong f(x^*)$$

👉 construirea funcţiei aproximante, F $\longrightarrow$ utilizarea unei mulţimi de funcţii elementare:

$$M = \{\varphi / \varphi : [a, b] \to \Re\}$$

$$\downarrow$$

<u>bază de funcţii de aproximare</u> liniar independente

$$\downarrow$$

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots, \ \sum_k c_k \cdot \varphi_k(x) = 0 \Leftrightarrow c_k = 0, \forall x \in [a, b]$$

$$\downarrow$$

$$F(x) = F_m(x) = c_0 \cdot \varphi_0(x) + \ldots + c_m \cdot \varphi_m(x)$$

<u>polinom generalizat</u>

Exemplu:

$$\varphi_k(x): 1, x, x^2, \ldots, x^m \longrightarrow F(x) = P_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \ldots + c_m \cdot x^m$$

aproximare cu polinoame algebrice

$$\varphi_k(x): 1, \cos(x), \sin(x), \ldots, \cos(m \cdot x), \sin(m \cdot x)$$

$$F(x) = T_m(x) = a_0 + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + \ldots + a_m \cdot \cos(m \cdot x) + b_m \cdot \sin(m \cdot x)$$

aproximare cu polinoame trigonometrice

👉 indiferent de abordare, rezolvarea problemei necesită răspuns la următoarele chestiuni:

- ✔ determinarea setului de funcţii $\{\varphi_k(x)\}_{k=0,1,\ldots}$
- ✔ determinarea numărului necesar de funcţii $m+1$
- ✔ determinarea coeficienţilor polinomului generalizat $\{c_k\}_{k=0,1,\ldots,m}$

- mulţimea de funcţii M trebuie să aibă proprietăţi suplimentare $\rightarrow$ definirea unei funcţii care să permită aprecierea "apropierii" dintre funcţia $f(x)$ şi aproximanta ei, $F(x)$, oricare ar fi $x \in [a, b]$

Definiţie:

Fie funcţia $d : M \times M \rightarrow \Re$ *Aceasta se numeşte* ***funcţie distanţă***, *dacă următoarele proprietăţi sunt îndeplinite:*

- *oricare ar fi* $f, g \in M$, *atunci* $d(f, g) > 0$ *şi* $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f \equiv g$;
- *oricare ar fi* $f, g \in M$, *atunci* $d(f, g) = d(g, f)$;
- *oricare ar fi* $f, g, h \in M$, *atunci* $d(f, g) \le d(f, h) + d(h, g)$.

- *Distanţele uzual folosite* pentru *cazul discret* (f este cunoscută printr-un şir de valori $\{x_i, f(x_i)\}_{i=0,\dots,n}$):

$$\boxed{d_\infty(f, F) = \| \underline{f} - \underline{F} \|_\infty = \max_{0 \le i \le n} \{ | f(x_i) - F(x_i) | \}}$$

aproximarea uniformă pentru cazul discret

$$\underline{f} = [f(x_0) \quad \cdots \quad f(x_n)]^T \qquad \underline{F} = [F(x_0) \quad \cdots \quad F(x_n)]^T$$

$$\boxed{d_2(f, F) = \| \underline{f} - \underline{F} \|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - F(x_i)]^2}}$$

aproximarea în medie pătratică pentru cazul discret

7.2 Interpolarea polinomială

$$F(x) = P_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_m \cdot x^m$$

$$\{x_i, f(x_i)\}_{i=0,\dots,n}$$

$$d_p(f, P_m) = \text{minim}$$

pentru $\boxed{m = n}$ ⇒ $d_p(f, P_m) = \text{minim} = 0$

⇓

$$\boxed{P_m(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n}$$

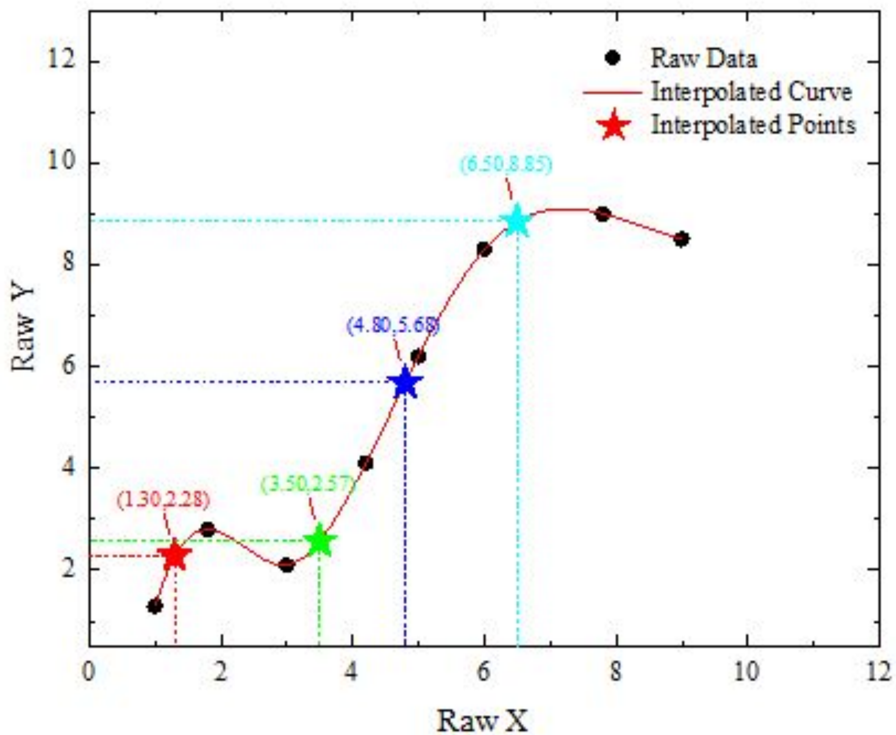
⇓

polinom de interpolare

condiţii de interpolare

graficul polinomului aproximant trece prin toate punctele :

$$\{x_i, f(x_i)\}_{i=0,\dots,n}$$



7.2.1 Interpolarea Lagrange

Teoremă:

În contextul problemei de interpolare, dacă punctele divizării $\Delta_{[a,b]}$ *sunt distincte, atunci oricare ar fi* $y_0, y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n$ *, cu* $y_i = f(x_i),\ i = 0, \ldots, n$ *, există şi este unic un polinom* L(x) *, de grad maxim* n*, pentru care sunt îndeplinite condiţiile de interpolare:*

$$L(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

<u>Demonstraţie</u>:

♦ *Existenţa* ⟶ polinomul Lagrange

$$L(x) = \frac{1 \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_j) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{1 \cdot (x_0 - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_0 - x_j) \cdot \cdots \cdot (x_0 - x_n)} \cdot y_0 + \cdots$$

$L_j(x)$

$$+ \frac{(x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_{j-1}) \cdot 1 \cdot (x - x_{j+1}) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot 1 \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot \cdots \cdot (x_j - x_n)} \cdot y_j + \cdots$$

$$+ \frac{(x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_j) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot 1}{(x_n - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_j) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_{n-1}) \cdot 1} \cdot y_n .$$

$$\Rightarrow \quad L(x)=\sum_{j=0}^{n} L_j(x)\cdot y_j\,, \quad \text{unde} \quad L_j(x)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k},\quad j=0,\ldots,n$$

$$L_j(x_i)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$i,j\in\{0,1,\ldots,n\}$$

$$\boxed{L(x_i)=f(x_i),\quad i=0,\ldots,n} \quad \Leftarrow$$

baza de interpolare Lagrange determinată de către divizarea Δ

♦ *Unicitatea* → reducere la absurd că mai există G(x) de grad n care interpolează f:

$$\boxed{G(x_i)=y_i,\quad i=0,\ldots,n}$$

👉 Fie $H(x)=L(x)-G(x)$ - grad maxim n

$$H(x_i)=L(x_i)-G(x_i)=0,\quad i=0,\ldots,n$$

$$\Downarrow$$

H(x) – polinom de grad maxim n cu (n + 1) rădăcini $\Rightarrow$ $\boxed{G(x)\equiv L(x)}$

<u>Observație:</u>

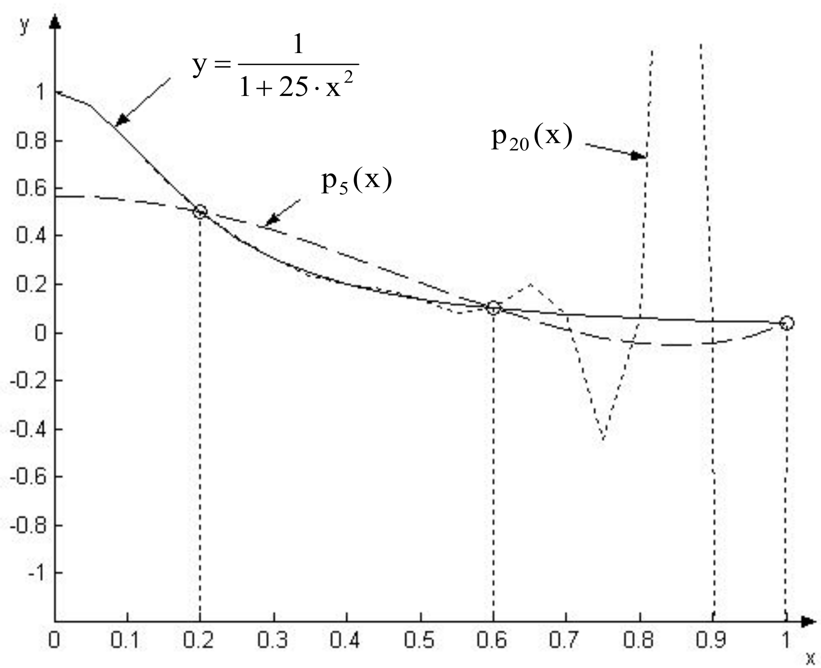
Interpolarea Lagrange, aşa cum a fost definită în versiunea ei originală, poate eşua în anumite situaţii, în sensul că se pot produce erori de aproximare semnificative:

$$y(x) = \frac{1}{1 + 25 \cdot x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$x_i,\ i = 0, \ldots, n \in [-1, 1] \quad \Rightarrow \quad h = x_{i+1} - x_i = (x_n - x_0)/n, \quad i = 0, \ldots, n-1, \quad x_0 = -1,\ x_n = 1$$

$n = 5 \longrightarrow -1, -0.6, -0.2, 0.2, 0.6, 1 \longrightarrow p_5(x)$

$n = 20 \longrightarrow h = 0.1 \Rightarrow \Delta : -1, -0.9, -0.8, \ldots, 0, 0.1, \ldots, 0.8, 0.9, 1 \longrightarrow p_{20}(x)$



$|x| < 0.5 \longrightarrow$ aproximarea prin intermediul polinomului $p_{20}(x)$ este satisfăcătoare, după care apar diferenţe semnificative

👉 ideea de a nu folosi un polinom unic, care să aproximeze o funcţie pe întreg intervalul [a, b]

↓

se foloseşte o mulţime de polinoame, fiecare dintre acestea aproximând cât mai bine funcţia f pe un anumit subinterval al intervalului de definiţie

↓

<u>aproximare polinomială pe porţiuni</u> sau *<u>aproximare cu "polinoame glisante"</u>*

pentru aproximarea lui f(x*), $x^* \neq x_i,\ i = 0, \ldots, n,\ x^* \in [x_0, x_n]$

- se încadrează x* în intervalul (x_k, x_{k+1})
- se selectează m + 1 (m < n) valori centrate în x* :

$$\{x_{k-\frac{m}{2}}, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+\frac{m}{2}}\}$$

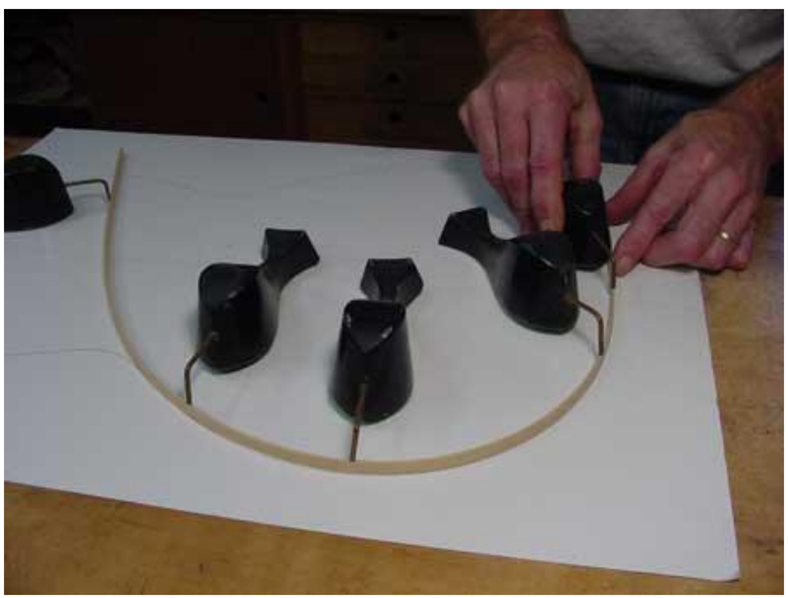
- se determină polinomul Lagrange de grad m în baza setului de m + 1 valori selectate

7.2.2 Interpolarea prin intermediul funcţiilor spline

<u>*Funcţiile spline*</u> → *funcţii formate din polinoame definite pe subintervale adiacente şi care se racordează în capetele subintervalelor împreună cu un număr de derivate*

spline → provine din mecanică, reprezentând numele unui dispozitiv folosit de desenatori pentru a trasa o curbă netedă

→ un instrument format dintr-o bandă metalică subţire, susţinută prin intermediul unor greutăţi 👉 aranjate încât banda metalică să treacă prin anumite puncte date (numărul greutăţilor poate fi mai mic sau egal cu numărul punctelor)



At Boeing Aircraft

Definiţie:

Fiind dată reţeaua de puncte Δ a intervalului [a, b]*:*

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n \le b$$

se numeşte <u>funcţie spline de ordinul m pe reţeaua Δ</u>, notată , o funcţie care îndeplineşte următoarele condiţii:

- *restricţia la intervalul* $[x_i, x_{i+1}], i = 0, \cdots, n-1$, $s_\Delta(x)\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$, *aparţine mulţimii polinoamelor algebrice de grad maxim m;*
- *funcţia* $s_\Delta(x)$ *este continuă, cu derivate continue până la ordinul* m – 1 *pe intervalul* [a, b] :

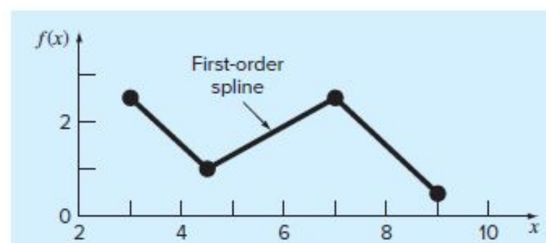
$$s_\Delta(x) \in C^{m-1}_{[a,b]}$$

<u>Observaţie</u>:

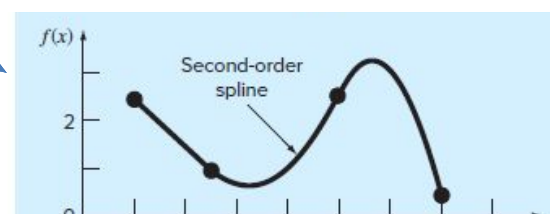
m = 1 ⟶ funcţiile spline liniare

m = 2 ⟶ funcţii spline cuadrice

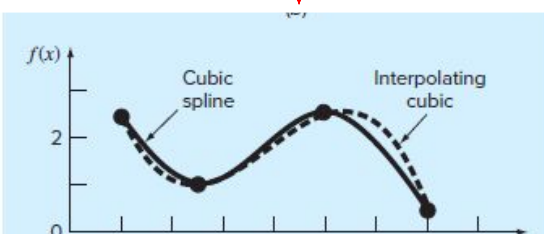
m = 3 ⟶ funcţiile spline cubice



(a)



(b)



(c)

Propoziţie:

Fiind dată funcţia f(x), *cunoscută prin şirul de puncte distincte* $\{x_i, f(x_i)\}_{i=0,\ldots,n}$, *unde* $x_i \in \Delta_{[a,b]}$ *,*
cu $x_i \neq x_j,\ i, j = 0,\ldots,n,\ i \neq j$*, există şi este unică o funcţie spline cubică, funcţie care interpolează funcţia* f: $s_\Delta(x_i) = y_i, i = 0,\ldots,n$, *unde* $y_i \overset{not}{=} f(x_i), i = 0,\ldots,n$.

<u>Demonstraţia</u> □ algoritmul de determinare a funcţiei $s_\Delta(x)$

$$s_\Delta(x)\big|_{[x_i, x_{i+1}]} = a_i \cdot (x - x_i)^3 + b_i \cdot (x - x_i)^2 + c_i \cdot (x - x_i) + d_i$$
$$i = 0,\ldots,n-1$$

- existenţa şi unicitatea funcţiei spline ⇔ existenţa şi unicitatea seturilor de coeficienţi:

4 · n coeficienţi de determinat ⟵ $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i=0,\ldots,n-1}$

👉 se utilizează condiţiile din definiţia funcţiilor spline:

(C1) *condiţii de interpolare*:

$s_\Delta(x_i) = y_i,\quad i = 0,\ldots,n$ ⟶ $(n+1)$ relaţii

(C2) *condiţii de continuitate a funcţiei* s_Δ(x):

$$\lim_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} s_\Delta(x) \overset{not}{=} s_\Delta(x_{i-}) = s_\Delta(x_{i+}) \overset{not}{=} \lim_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} s_\Delta(x), \quad i = 1,\ldots,n-1$$ ⟶ $(n-1)$ relaţii

(C3) *condiţii de continuitate a funcţiei* $s'_\Delta(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to x_i\\x<x_i}} s'_\Delta(x) \overset{not}{=} s'_\Delta(x_{i-}) = s'_\Delta(x_{i+}) \overset{not}{=} \lim_{\substack{x\to x_i\\x>x_i}} s'_\Delta(x), \quad i=1,\ldots,n-1 \longrightarrow (n-1) \text{ relaţii}$$

(C4) *condiţii de continuitate a funcţiei* $s''_\Delta(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to x_i\\x<x_i}} s''_\Delta(x) \overset{not}{=} s''_\Delta(x_{i-}) = s''_\Delta(x_{i+}) \overset{not}{=} \lim_{\substack{x\to x_i\\x>x_i}} s''_\Delta(x), \quad i=1,\ldots,n-1 \longrightarrow (n-1) \text{ relaţii}$$

$4\cdot n-2$ relaţii

(C5) *condiţii suplimentare* $\longrightarrow$ *funcţii spline cubice naturale*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} s''_\Delta(x)=0 \qquad \lim_{\substack{x\to x_n\\x<x_n}} s''_\Delta(x)=0$$

$\longrightarrow$ $4\cdot n$ relaţii

polinoamele de racord în punctele x_0 şi x_n sunt polinoame de gradul întâi sau se comportă în vecinătatea punctelor x_0 şi x_n ca polinoame de gradul întâi

Observaţii:

- funcţiile spline cubice naturale au proprietatea că *au cea mai mică curbură*:

$$\int_{x_0}^{x_n} [s''_\Delta(x)]^2 \cdot dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [s''_\Delta(x)\big|_{[x_i,\, x_{i+1}]}]^2 \cdot dx = \text{minim}$$

- prin condiţiile de racordare în noduri impuse funcţiei şi derivatelor sale, funcţiile spline cubice naturale sunt cele mai netede funcţii care interpolează funcţia f

7.3 Aproximarea polinomială în medie pătratică

- Problema este de a determina un polinom de gradul $m << n$:

$$p_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_m \cdot x^m \overset{not}{=} y(x)$$

- notaţii: $Y_i = f(x_i)$ $\quad e_i = Y_i - y(x_i)$

$$i = 0, \ldots, n$$

- *aproximare în medie pătratică* $\longrightarrow$ se minimizează, în raport cu setul de coeficienţi $\{c_0, \dots, c_m\}$, funcţia criteriu definită prin:

$$S(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^{n} e_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (Y_i - y(x_i))^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (Y_i - c_0 - c_1 \cdot x_i - \dots - c_m \cdot x_i^m)^2$$

minimizare

$$\begin{cases} \nabla S = \left[\dfrac{\partial S}{\partial c_j} \right]_{j=0,\dots,m} = \underline{0}_{m+1} \\ \Delta S = \left[\dfrac{\partial^2 S}{\partial c_j \partial c_k} \right]_{j,k=0,\dots,m} > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_0} = \sum_{i=0}^{n} 2 \cdot (Y_i - c_0 - c_1 \cdot x_i - \dots - c_m \cdot x_i^m) \cdot (-1) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = \sum_{i=0}^{n} 2 \cdot (Y_i - c_0 - c_1 \cdot x_i - \dots - c_m \cdot x_i^m) \cdot (-x_i) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_m} = \sum_{i=0}^{n} 2 \cdot (Y_i - c_0 - c_1 \cdot x_i - \dots - c_m \cdot x_i^m) \cdot (-x_i^m) = 0.$$

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \cdots & \sum x_i^{2 \cdot m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum (x_i \cdot Y_i) \\ \vdots \\ \sum (x_i^m \cdot Y_i) \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{A \cdot \underline{x} = \underline{b}}$$

- impunerea condiţiilor de interpolare $\longrightarrow$ $\boxed{C \cdot \underline{x} = \underline{d}}$

sistem supradeterminat $\longrightarrow$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

rezolvare în sensul celor mai mici pătrate

$$C^T \cdot C > 0 \longleftrightarrow \Delta S = \left[\frac{\partial^2 S}{\partial c_j \partial c_k} \right]_{j,k=0,\ldots,n} > 0$$

$$A = C^T \cdot C$$

$$\underline{b} = C^T \cdot \underline{d}$$