

## Cap. 7 Aproximarea numerică a funcțiilor

### 7.1 Formularea problemei

□ fie funcția  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

- problema de calcul  $\rightarrow$  evaluarea, în orice punct  $x^* \in [a, b]$  a următoarelor:

$$f(x^*), f'(x^*), f''(x^*), \dots, \int_c^d f(x) \cdot dx, a \leq c < d \leq b$$

- pot exista următoarele situații:

- ✓ funcția  $f$  este cunoscută analitic prin una sau mai multe expresii, în general complicate sau dificil de evaluat, derivat sau integrat
- ✓ funcția  $f$  nu este cunoscută analitic, ci printr-un șir de valori:

$$\{x_i, f(x_i)\}_{i=0, \dots, n}$$

$$\{x_i\}_{i=0, \dots, n}, x_i \in [a, b], i = 0, \dots, n$$

$$\Delta_{[a, b]} : a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$$

divizare a intervalului  $[a, b]$

👉 rezolvarea problemei → găsirea unei funcții cu o expresie în general simplă, ușor de evaluat, derivat sau integrat, care să aproximeze cât mai bine pe  $f$

$$\forall x^* \in [a, b], F(x^*) \cong f(x^*)$$

👉 construirea funcției aproximante,  $F$  → utilizarea unei mulțimi de funcții elementare:

$$M = \{\varphi / \varphi : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}\}$$



bază de funcții de aproximare liniar independente



$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x), \dots, \sum_k c_k \cdot \varphi_k(x) = 0 \Leftrightarrow c_k = 0, \forall x \in [a, b]$$



$$F(x) = F_m(x) = c_0 \cdot \varphi_0(x) + \dots + c_m \cdot \varphi_m(x)$$


polinom generalizat

## Exemplu:


 $\varphi_k(x) : 1, x, x^2, \dots, x^m \quad \longrightarrow \quad F(x) = P_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_m \cdot x^m$



*aproximare cu polinoame algebrice*



 $\varphi_k(x) : 1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(m \cdot x), \sin(m \cdot x)$






$$F(x) = T_m(x) = a_0 + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + \dots + a_m \cdot \cos(m \cdot x) + b_m \cdot \sin(m \cdot x)$$



*aproximare cu polinoame trigonometrice*

 indiferent de abordare, rezolvarea problemei necesită răspuns la următoarele chestiuni:

- 
 determinarea setului de funcții  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0,1,\dots,m+1}$
- 
 determinarea numărului necesar de funcții  $\{c_k\}_{k=0,1,\dots,m}$
- 
 determinarea coeficienților polinomului generalizat


- mulțimea de funcții  $M$  trebuie să aibă proprietăți suplimentare → definirea unei funcții care să permită aprecierea “apropierii” dintre funcția  $f(x)$  și aproximanta ei,  $F(x)$ , oricare ar fi  $x \in [a, b]$

**Definiție:**


Fie funcția  $d : M \times M \rightarrow \mathfrak{R}$ . Aceasta se numește funcție distanță, dacă următoarele proprietăți sunt îndeplinite:

- oricare ar fi  $f, g \in M$ , atunci  $d(f, g) > 0$  și  $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f \equiv g$ ;
- oricare ar fi  $f, g \in M$ , atunci  $d(f, g) = d(g, f)$ ;
- oricare ar fi  $f, g, h \in M$ , atunci  $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ .

- Distanțele uzual folosite pentru cazul discret ( $f$  este cunoscută printr-un șir de valori  $\{x_i, f(x_i)\}_{i=0, \dots, n}$ ):


 $d_\infty(f, F) = \|\underline{f} - \underline{F}\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq n} \{ |f(x_i) - F(x_i)| \}$ 
←
aproximarea uniformă pentru cazul discret

$$\underline{f} = [f(x_0) \quad \dots \quad f(x_n)]^T \quad \underline{F} = [F(x_0) \quad \dots \quad F(x_n)]^T$$


 $d_2(f, F) = \|\underline{f} - \underline{F}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^n [f(x_i) - F(x_i)]^2}$ 
←
aproximarea în medie pătratică pentru cazul discret

## 7.2 Interpolarea polinomială

$$F(x) = P_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_m \cdot x^m$$

$$\{x_i, f(x_i)\}_{i=0, \dots, n}$$

$$d_p(f, P_m) = \text{minim}$$

polinom de interpolare

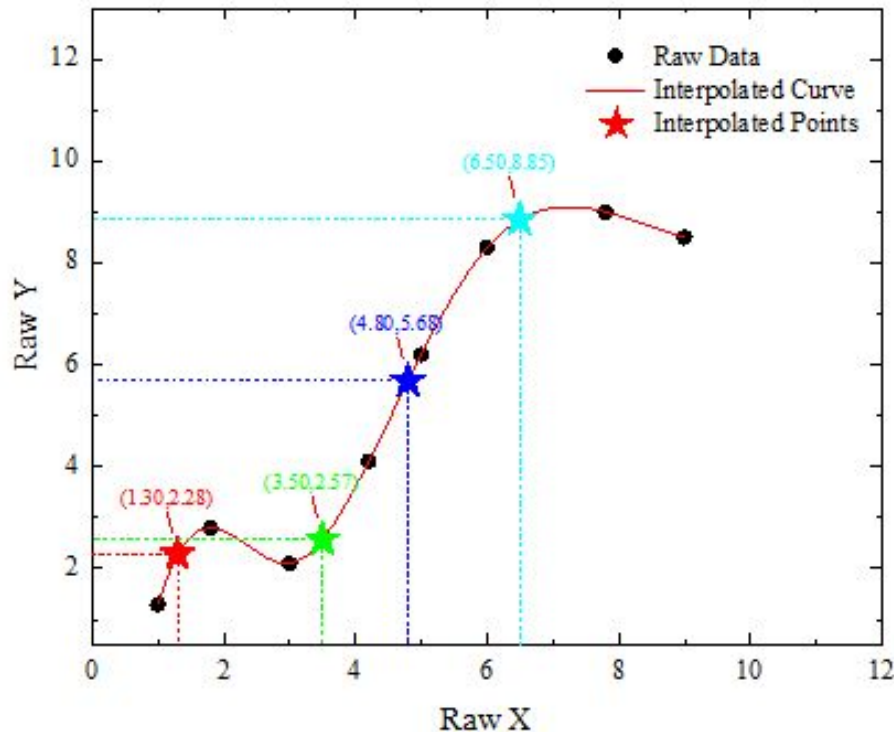
condiții de interpolare

pentru  $m = n$   $\Rightarrow d_p(f, P_m) = \text{minim} = 0$

$$P_m(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

graficul polinomului aproximant trece prin toate punctele :

$$\{x_i, f(x_i)\}_{i=0, \dots, n}$$



7.2.1 Interpolarea Lagrange

**Teoremă:**

În contextul problemei de interpolare, dacă punctele divizării  $\Delta_{[a,b]}$  sunt distincte, atunci oricare ar fi  $y_0, y_1, \dots, y_i, \dots, y_n$ , cu  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , există și este unic un polinom  $L(x)$ , de grad maxim  $n$ , pentru care sunt îndeplinite condițiile de interpolare:

$$L(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

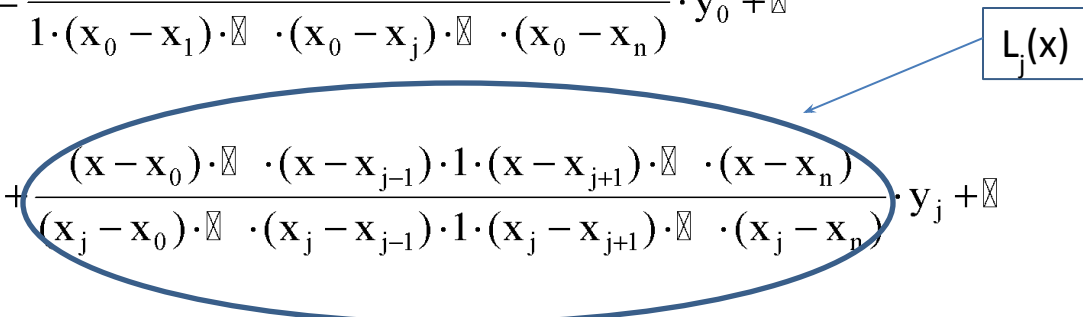
Demonstrație:

◆ *Existența* → polinomul

Lagrange

$$L(x) = \frac{1 \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_j) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{1 \cdot (x_0 - x_1) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_j) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n)} \cdot y_0 + \dots$$

$$+ \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1}) \cdot 1 \cdot (x - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot 1 \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j - x_n)} \cdot y_j + \dots$$

$$+ \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_j) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot 1}{(x_n - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_j) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1}) \cdot 1} \cdot y_n.$$


$$\Rightarrow L(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x) \cdot y_j, \text{ unde } L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad j = 0, \dots, n$$

$$L(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$

baza de interpolare Lagrange determinată de către divizarea

$\Delta$

◆ *Unicitatea* → reducere la absurd că mai există  $G(x)$  de grad  $n$  care interpoolează  $f$ :

$$G(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

☞  $H(x) = L(x) - G(x)$  - grad maxim  $n$

$$H(x_i) = L(x_i) - G(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n$$

↓

$H(x)$  – polinom de grad maxim  $n$  cu  $(n + 1)$  rădăcini ⇒  $G(x) \equiv L(x)$

## Observație:

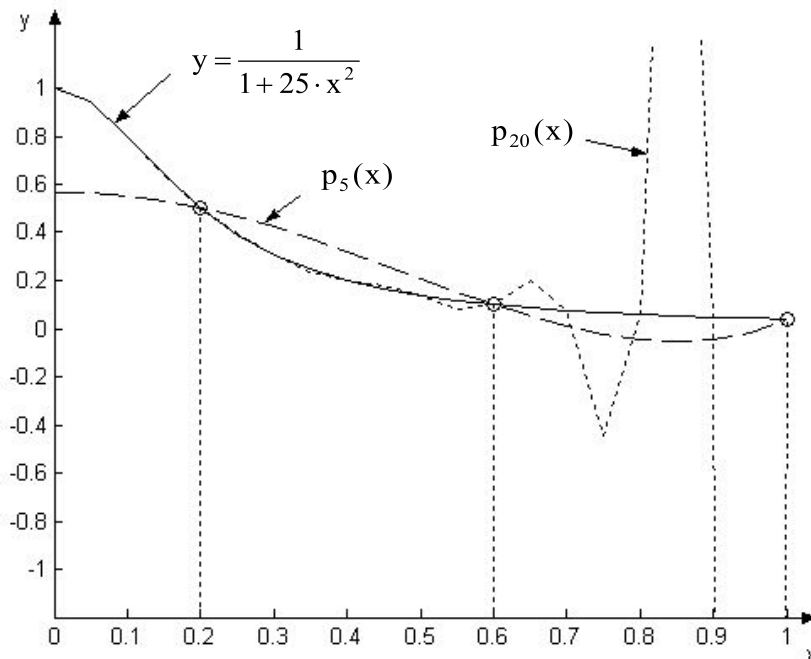
Interpolarea Lagrange, așa cum a fost definită în versiunea ei originală, poate eșua în anumite situații, în sensul că se pot produce erori de aproximare semnificative:

$$y(x) = \frac{1}{1 + 25 \cdot x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$x_i, i = 0, \dots, n \in [-1, 1] \Rightarrow h = x_{i+1} - x_i = (x_n - x_0) / n, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad x_0 = -1, \quad x_n = 1$$

$$n = 5 \longrightarrow -1, -0.6, -0.2, 0.2, 0.6, 1 \longrightarrow p_5(x)$$

$$n = 20 \longrightarrow h = 0.1 \Rightarrow \Delta: -1, -0.9, -0.8, \dots, 0, 0.1, \dots, 0.8, 0.9, 1 \longrightarrow p_{20}(x)$$



$|x| < 0.5 \longrightarrow$  aproximarea prin intermediul polinomului  $p_{20}(x)$  este satisfăcătoare, după care apar diferențe semnificative



👉 ideea de a nu folosi un polinom unic, care să aproximeze o funcție pe întreg intervalul  $[a, b]$



se folosește o mulțime de polinoame, fiecare dintre acestea aproximând cât mai bine funcția  $f$  pe un anumit subinterval al intervalului de definiție



aproximare polinomială pe porțiuni sau aproximare cu “polinoame glisante”

pentru aproximarea lui  $f(x^*)$ ,  $x^* \neq x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $x^* \in [x_0, x_n]$

- se încadrează  $x^*$  în intervalul  $(x_k, x_{k+1})$
- se selectează  $m + 1$  ( $m < n$ ) valori centrate în  $x^*$ :

$$\left\{ x_{k-\frac{m}{2}}, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+\frac{m}{2}} \right\}$$

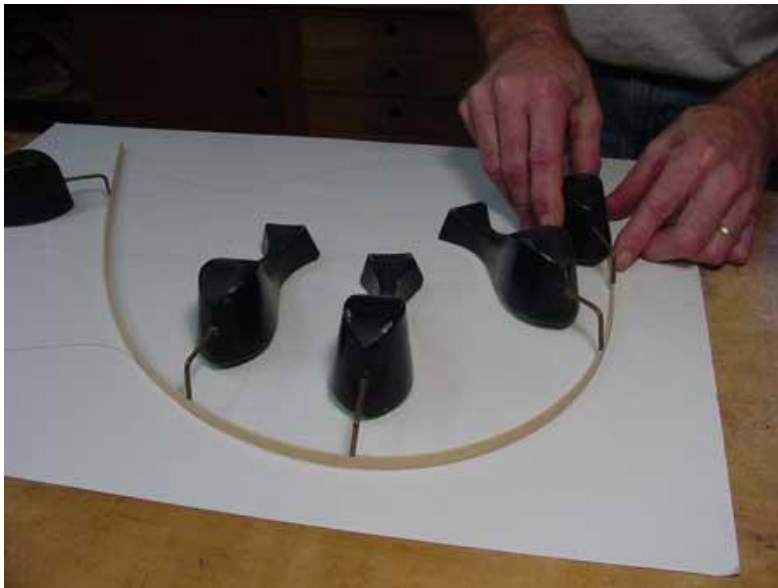
- se determină polinomul Lagrange de grad  $m$  în baza setului de  $m + 1$  valori selectate

### 7.2.2 Interpolarea prin intermediul funcțiilor spline

Funcțiile spline → funcții formate din polinoame definite pe subintervale adiacente și care se racordează în capetele subintervalurilor împreună cu un număr de derivate

*spline* → provine din mecanică, reprezentând numele unui dispozitiv folosit de desenatori pentru a trasa o curbă netedă

→ un instrument format dintr-o bandă metalică subțire, susținută prin intermediul unor greutateți 🖱️ aranjate încât banda metalică să treacă prin anumite puncte date (numărul greutateților poate fi mai mic sau egal cu numărul punctelor)



**At Boeing Aircraft**

## Definiție:

Fiind dată rețeaua de puncte  $\Delta$  a intervalului  $[a, b]$ :

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n \leq b$$

se numește funcție spline de ordinul  $m$  pe rețeaua  $\Delta$ , notată , o funcție care îndeplinește următoarele condiții:

- restricția la intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $s_{\Delta}(x)|_{[x_i, x_{i+1}]}$ , aparține mulțimii polinoamelor algebrice de grad maxim  $m$ ;
- funcția  $s_{\Delta}(x)$  este continuă, cu derivate continue până la ordinul  $m-1$  pe intervalul  $[a, b]$  :

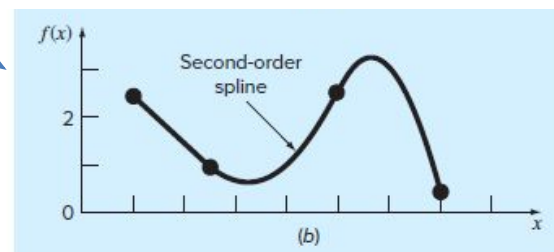
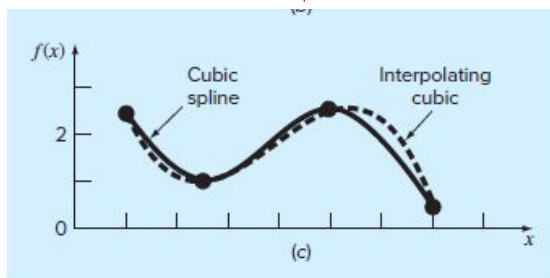
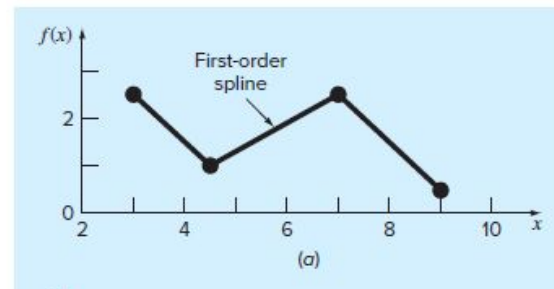
$$s_{\Delta}(x) \in C_{[a,b]}^{m-1}$$

## Observație:

$m = 1 \rightarrow$  funcțiile spline liniare

$m = 2 \rightarrow$  funcții spline cuadrice

$m = 3 \rightarrow$  funcțiile spline cubice



**Propoziție:**

Fiind dată funcția  $f(x)$ , cunoscută prin șirul de puncte distincte  $\{x_i, f(x_i)\}_{i=0, \dots, n}$ , unde  $x_i \in \Delta_{[a, b]}$ , cu  $x_i \neq x_j, i, j = 0, \dots, n, i \neq j$ , există și este unică o funcție spline cubică, funcție care interpolatează funcția  $f$ :  $s_{\Delta}(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$ , unde  $y_i = f(x_i), i = 0, \dots, n$ .

Demonstrația □ algoritmul de determinare a funcției  $s_{\Delta}(x)$

$$s_{\Delta}(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} = a_i \cdot (x - x_i)^3 + b_i \cdot (x - x_i)^2 + c_i \cdot (x - x_i) + d_i$$

$i = 0, \dots, n - 1$

- existența și unicitatea funcției spline  $\Leftrightarrow$  existența și unicitatea seturilor de coeficienți:

$$4 \cdot n \text{ coeficienți de determinat} \longleftarrow \{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i=0, \dots, n-1}$$

👉 se utilizează condițiile din definiția funcțiilor spline:

(C1) condiții de interpolare:

$$s_{\Delta}(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \quad \longrightarrow \quad (n + 1) \text{ relații}$$

(C2) condiții de continuitate a funcției  $s_{\Delta}(x)$ :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x < x_i}} s_{\Delta}(x) = s_{\Delta}(x_{i-}) = s_{\Delta}(x_{i+}) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x > x_i}} s_{\Delta}(x), \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad \longrightarrow \quad (n - 1) \text{ relații}$$

(C3) *condiții de continuitate a funcției  $s'_\Delta(x)$ :*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x < x_i}} s'_\Delta(x) \stackrel{\text{not}}{=} s'_\Delta(x_{i-}) = s'_\Delta(x_{i+}) \stackrel{\text{not}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x > x_i}} s'_\Delta(x), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad \longrightarrow \quad (n-1) \text{ relații}$$

(C4) *condiții de continuitate a funcției  $s''_\Delta(x)$ :*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x < x_i}} s''_\Delta(x) \stackrel{\text{not}}{=} s''_\Delta(x_{i-}) = s''_\Delta(x_{i+}) \stackrel{\text{not}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x > x_i}} s''_\Delta(x), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad \longrightarrow \quad (n-1) \text{ relații}$$

4 · n – 2 relații

(C5) *condiții suplimentare → funcții spline cubice naturale*

4 · n relații

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} s''_\Delta(x) = 0 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_n \\ x < x_n}} s''_\Delta(x) = 0$$

polinoamele de racord în punctele  $x_0$  și  $x_n$  sunt polinoame de gradul întâi sau se comportă în vecinătatea punctelor  $x_0$  și  $x_n$  ca polinoame de gradul întâi

## Observații:

- funcțiile spline cubice naturale au proprietatea că *au cea mai mică curbură*:

$$\int_{x_0}^{x_n} [s''_{\Delta}(x)]^2 \cdot dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [s''_{\Delta}(x)|_{[x_i, x_{i+1}]}]^2 \cdot dx = \text{minim}$$

- prin condițiile de racordare în noduri impuse funcției și derivatelor sale, funcțiile spline cubice naturale sunt cele mai netede funcții care interpoleză funcția  $f$

## 7.3 Aproximarea polinomială în medie pătratică

- Problema este de a determina un polinom de gradul  $m \ll n$ :

$$p_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_m \cdot x^m \stackrel{\text{not}}{=} y(x)$$

- notații:  $Y_i = f(x_i) \quad e_i = Y_i - y(x_i)$

$$i = 0, \dots, n$$

□ aproximare în medie pătratică → se minimizează, în raport cu setul de coeficienți  $\{c_0, \dots, c_m\}$ , funcția criteriu definită prin:

$$S(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^n e_i^2 = \sum_{i=0}^n (Y_i - y(x_i))^2$$

$$= \sum_{i=0}^n (Y_i - c_0 - c_1 \cdot x_i - \dots - c_m \cdot x_i^m)^2$$

minimizare

$$\nabla S = \left[ \frac{\partial S}{\partial c_j} \right]_{j=0, \dots, m} = \underline{0}_{m+1}$$

$$\Delta S = \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial c_j \partial c_k} \right]_{j,k=0, \dots, m} > 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_0} = \sum_{i=0}^n 2 \cdot (Y_i - c_0 - c_1 \cdot x_i - \dots - c_m \cdot x_i^m) \cdot (-1) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = \sum_{i=0}^n 2 \cdot (Y_i - c_0 - c_1 \cdot x_i - \dots - c_m \cdot x_i^m) \cdot (-x_i) = 0,$$

⋮

$$\frac{\partial S}{\partial c_m} = \sum_{i=0}^n 2 \cdot (Y_i - c_0 - c_1 \cdot x_i - \dots - c_m \cdot x_i^m) \cdot (-x_i^m) = 0.$$

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \dots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum (x_i \cdot Y_i) \\ \dots \\ \sum (x_i^m \cdot Y_i) \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{A \cdot \underline{x} = \underline{b}}$$

□ impunerea condițiilor de interpolare

$$\mathbf{C} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{d}}$$

sistem supradeterminat

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \boxtimes & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \boxtimes & x_1^m \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 1 & x_n & x_n^2 & \boxtimes & x_n^m \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \boxtimes \\ Y_n \end{bmatrix}$$

rezolvare în sensul celor mai mici pătrate

$$\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} > 0 \iff \Delta S = \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial c_j \partial c_k} \right]_{j,k=0, \boxtimes, n} > 0$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}$$

$$\underline{\mathbf{b}} = \mathbf{C}^T \cdot \underline{\mathbf{d}}$$