

Билет №16.

{ Билет делали: Бедарев М., Шляга В., Мельник Л.

- ▣ *Колебания* — это повторяющийся в той или иной степени во времени процесс изменения состояний системы около точки равновесия.
- ▣ *Свободные (собственные) колебания* — это колебания в системе под действием внутренних сил после того, как система выведена из состояния равновесия (в реальных условиях свободные колебания всегда затухающие). Простейшими примерами свободных колебаний являются колебания груза, прикреплённого к пружине, или груза, подвешенного на нити.
- ▣ *Затухающие колебания* — колебания, энергия которых уменьшается с течением времени.
- ▣ Важным типом колебаний являются *гармонические колебания* — колебания, происходящие по закону синуса или косинуса.
- ▣ *Амплитуда* — максимальное отклонение колеблющейся величины от положения равновесия.

Основное уравнение динамики свободных незатухающих колебаний.

Второй закон Ньютона позволяет, в общем виде, записать связь между силой и ускорением, при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки (или тела) с массой m .

Исходя из второго закона $F=ma$, можно записать:

$$F_x = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \phi_0) = -m\omega^2 x, \quad (1)$$

Где:

- F_x – проекция силы на направление x ;
- A – амплитуда колебания;
- ω – циклическая частота;
- t – время колебания;
- ϕ_0 – начальная фаза колебаний.

Сила F пропорциональна x и всегда направлена к положению равновесия (поэтому ее и называют *возвращающей силой*). Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

Примером сил удовлетворяющих (1) являются *упругие силы*. Силы же, имеющие иную природу, но удовлетворяющие (1), называются *квазиупругими*. Квазиупругая сила

$$F_x = -kx, \quad (2)$$

где k – коэффициент квазиупругой силы.

Сравнивая (1) и (2), видим, что $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Подставив выражения для a_x и F_x во второй закон Ньютона, получим *основное уравнение динамики гармонических колебаний*, вызываемых упругими или квазиупругими силами:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \Leftrightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0.$$

\Leftrightarrow

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \text{ – уравнение свободных колебаний.}$$

Решением этого уравнения всегда будет выражение вида

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

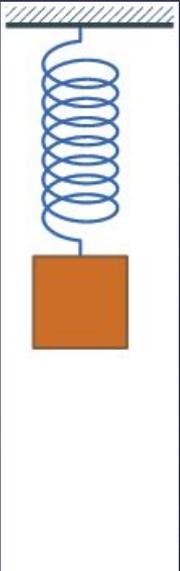
т.е. смещение груза под действием упругой или квазиупругой силы является *гармоническим колебанием, происходящим по синусоидальному закону*.

Круговая (циклическая) частота незатухающих колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T}$, но т.к. $\omega^2 = \frac{k}{m}$, то:

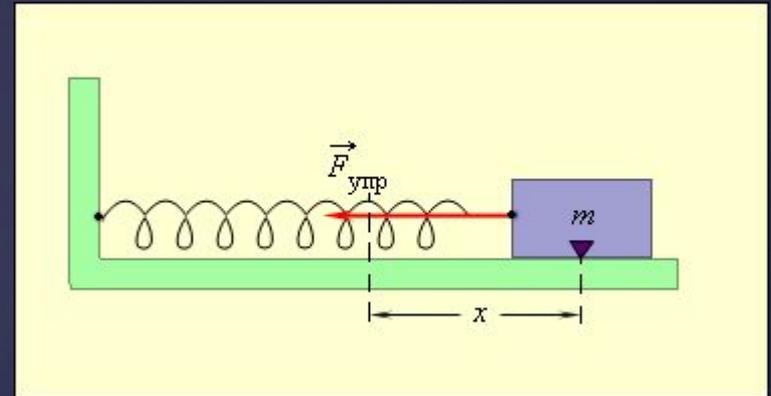
$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Чем больше жесткость пружины k , тем меньше период (больше частота), а чем больше масса, тем период колебаний больше.

Период колебаний — наименьший промежуток времени, за который осциллятор совершает одно полное колебание (то есть возвращается в то же состояние, в котором он находился в первоначальный момент, выбранный произвольно).



Пружинный маятник,
совершающий
затухающие колебания.



Свободные колебания.
Пружинный маятник.

При свободных механических колебаниях кинетическая и потенциальная энергии изменяются периодически. При максимальном отклонении тела от положения равновесия его скорость, а следовательно, и кинетическая энергия обращаются в нуль. В этом положении потенциальная энергия колеблющегося тела достигает максимального значения. Для груза на горизонтально расположенной пружине потенциальная энергия – это энергия упругих деформаций пружины. Для математического маятника – это энергия в поле тяготения Земли.

Когда тело при своем движении проходит через положение равновесия, его скорость максимальна. В этот момент оно обладает максимальной кинетической и минимальной потенциальной энергией. Увеличение кинетической энергии происходит за счет уменьшения потенциальной энергии. При дальнейшем движении начинает увеличиваться потенциальная энергия за счет убыли кинетической энергии и т. д.

Превращения энергии при свободных механических колебаниях.

Таким образом, при гармонических колебаниях происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

Если в колебательной системе отсутствует трение, то полная механическая энергия при свободных колебаниях остается неизменной.

Для груза на пружине:

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

$$(E_p)_{\max} = \frac{kx_m^2}{2}, \quad (E_k)_{\max} = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2} = (E_p)_{\max}$$

Для малых колебаний математического маятника:

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mgx^2}{2l}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l},$$

$$(E_p)_{\max} = mgh_m = \frac{mgx_m^2}{2l}, \quad (E_k)_{\max} = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2} = (E_p)_{\max}$$

Здесь h_m – максимальная высота подъема маятника в поле тяготения Земли, x_m и $v_m = \omega_0 x_m$ – максимальные значения отклонения маятника от положения равновесия и его скорости.

Превращения энергии при свободных механических колебаниях в отсутствие трения можно проиллюстрировать графически. Рассмотрим в качестве примера колебания груза массой m на пружине жесткости k . Пусть смещение $x(t)$ груза из положения равновесия и его скорость $v(t)$ изменяются со временем по законам:

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t), \text{ где } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega_0 t).$$

Следовательно,

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{4} k x_m^2 (1 + \cos 2\omega_0 t),$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k \omega_0^2 x_m^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{4} k x_m^2 (1 - \cos 2\omega_0 t).$$

На рисунке ниже изображены графики функций $E_p(t)$ и $E_k(t)$. Потенциальная и кинетическая энергии за период колебаний $x = \frac{2\pi}{\omega_0}$ в два раза достигают максимальных значений. Сумма $E_p(t) + E_k(t) = E = \text{const}$ остается неизменной.

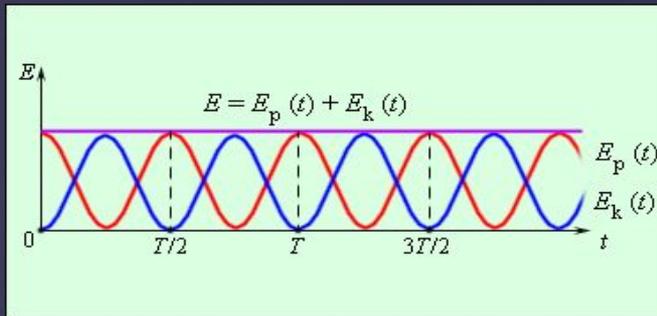


График при свободных незатухающих колебаниях

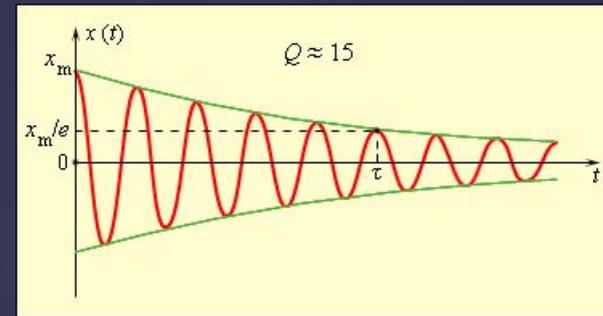


График при свободных затухающих колебаниях

Резонанс — явление, при котором амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум при некотором значении частоты вынуждающей силы. Часто это значение близко к частоте собственных колебаний, фактически может совпадать, но это не всегда так и не является причиной резонанса.

В результате резонанса при некоторой частоте вынуждающей силы колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие этой силы. Степень отзывчивости в теории колебаний описывается величиной, называемой *добротностью*. При помощи резонанса можно выделить и/или усилить даже весьма слабые периодические колебания.

Наиболее известная большинству людей механическая резонансная система — это обычные качели. Если вы будете подталкивать качели в соответствии с их резонансной частотой, размах движения будет увеличиваться, в противном случае движения будут затухать. Резонансную частоту такого маятника с достаточной точностью в диапазоне малых смещений от равновесного состояния, можно найти по формуле:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

, где g это ускорение свободного падения ($9,8 \text{ м/с}^2$ для поверхности Земли), а L — длина от точки подвешивания маятника до центра его масс. (Более точная формула довольно сложна, и включает эллиптический интеграл). Важно, что резонансная частота не зависит от массы маятника. Также важно, что раскачивать маятник нельзя на кратных частотах (высших гармониках), зато это можно делать на частотах, равных долям от основной (низших гармониках).

Резонанс.

Струны таких инструментов, как лютня, гитара, скрипка или пианино, имеют основную резонансную частоту, напрямую зависящую от длины, массы и силы натяжения струны. Длина волны первого резонанса струны равна её удвоенной длине. При этом, её частота зависит от скорости v , с которой волна распространяется по струне: $f = \frac{v}{2L}$, где: L — длина струны (в случае, если она закреплена с обоих концов). Скорость распространения волны по струне зависит от её натяжения T и массы на единицу длины ρ :

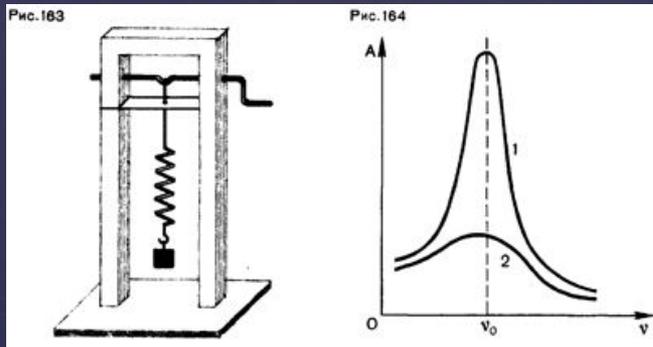
$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Таким образом, частота главного резонанса зависит от свойств струны и выражается следующим отношением:

$$f = \frac{\sqrt{T}}{2L} = \frac{\sqrt{\frac{T}{m/L}}}{2L} = \sqrt{\frac{T}{4mL}}$$

, где:

- T — сила натяжения;
- ρ — масса единицы длины струны;
- m — полная масса струны.



Резонанс пружинного маятника



Струна музыкального инструмента - гитары

Увеличение натяжения струны и уменьшение её массы (толщины) и длины увеличивает её резонансную частоту. Помимо основного резонанса, струны также имеют резонансы на высших гармониках основной частоты f , например, $2f$, $3f$, $4f$, и т. д. Если струне придать колебание коротким воздействием (щипком пальцев или ударом молоточка), струна начнёт колебания на всех частотах, присутствующих в воздействующем импульсе (теоретически, короткий импульс содержит все частоты). Однако частоты, не совпадающие с резонансными, быстро затухнут, и мы услышим только гармонические колебания, которые и воспринимаются как музыкальные ноты.