Билет №16.

Билет делали: Бедарев М., Шляга В., Мельник Л.

- ***Колеба́ния*** — это повторяющийся в той или иной степени во времени процесс изменения состояний системы около точки равновесия.
- ***Свободные (собственные) колеба́ния*** — это колебания в системе под действием внутренних сил после того, как система выведена из состояния равновесия (в реальных условиях свободные колебания всегда затухающие). Простейшими примерами свободных колебаний являются колебания груза, прикреплённого к пружине, или груза, подвешенного на нити.
- ***Затухающие колебания*** — колебания, энергия которых уменьшается с течением времени.
- Важным типом колебаний являются ***гармонические колебания*** — колебания, происходящие по закону синуса или косинуса.
- ***Амплитуда*** — максимальное отклонение колеблющейся величины от положения равновесия.

Основное уравнение динамики свободных незатухающих колебаний.

Второй закон Ньютона позволяет, в общем виде, записать связь между силой и ускорением, при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки (или тела) с массой **m**.

Исходя и второго закона **F=ma** , можно записать:

$F_x = -m\omega^2 A\sin(\omega t + \phi_0) = -m\omega^2 x$, (1)

Где:

- F_x – проекция силы на направление x;
- A – амплитуда колебания;
- ω – циклическая частота;
- t – время колебания;
- ϕ_0 – начальная фаза колебаний.

Сила *F* ***пропорциональна*** *x* ***и всегда направлена к положению равновесия*** (поэтому ее и называют ***возвращающей силой***). Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

Примером сил удовлетворяющих (1) являются ***упругие силы***. Силы же, имеющие иную природу, но удовлетворяющие (1), называются ***квазиупругими***. Квазиупругая сила

$F_x = -kx$, (2)

где k – коэффициент квазиупругой силы.

Сравнивая (1) и (2), видим, что $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Подставив выражения для a_x и F_x во второй закон Ньютона, получим ***основное уравнение динамики гармонических колебаний***, вызываемых упругими или квазиупругими силами:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$ – **уравнение свободных колебаний.**

Решением этого уравнения всегда будет выражение вида

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

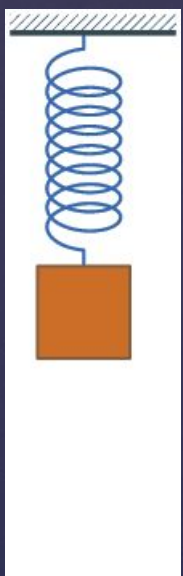
т.е. смещение груза под действием упругой или квазиупругой силы является *гармоническим колебанием, происходящим по синусоидальному закону.*

Круговая (циклическая) частота незатухающих колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T}$, но т.к. $\omega^2 = \frac{k}{m}$, то:

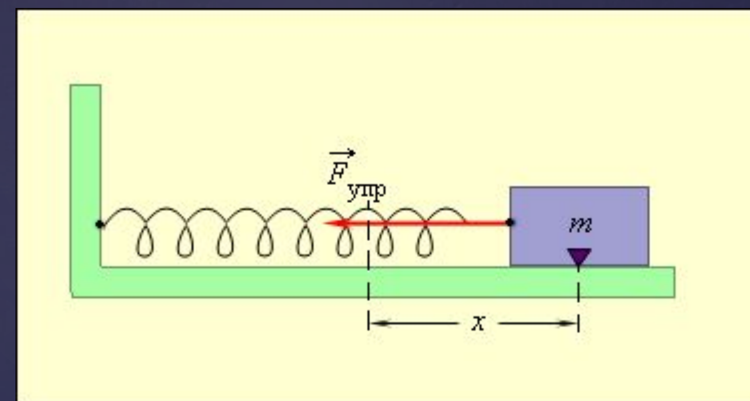
$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Чем больше жесткость пружины *k*, тем меньше период (больше частота), а чем больше масса, тем период колебаний больше.

Период колеба́ний — наименьший промежуток времени, за который осциллятор совершает одно полное колебание (то есть возвращается в то же состояние, в котором он находился в первоначальный момент, выбранный произвольно).



Пружинный маятник, совершающий затухающие колебания.



Свободные колебания. Пружинный маятник.

При свободных механических колебаниях кинетическая и потенциальная энергии изменяются периодически. При максимальном отклонении тела от положения равновесия его скорость, а следовательно, и кинетическая энергия обращаются в нуль. В этом положении потенциальная энергия колеблющегося тела достигает максимального значения. Для груза на горизонтально расположенной пружине потенциальная энергия – это энергия упругих деформаций пружины. Для математического маятника – это энергия в поле тяготения Земли.

Когда тело при своем движении проходит через положение равновесия, его скорость максимальна. В этот момент оно обладает максимальной кинетической и минимальной потенциальной энергией. Увеличение кинетической энергии происходит за счет уменьшения потенциальной энергии. При дальнейшем движении начинает увеличиваться потенциальная энергия за счет убыли кинетической энергии и т. д.

Превращения энергии при свободных механических колебаниях.

Таким образом, ***при гармонических колебаниях происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.***

Если в колебательной системе отсутствует трение, то полная механическая энергия при свободных колебаниях остается неизменной.

Для груза на пружине:

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

$$(E_{\mathrm{p}})_{\max} = \frac{kx_{\mathrm{m}}^2}{2}, \quad (E_{\mathrm{k}})_{\max} = \frac{m\upsilon_{\mathrm{m}}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_{\mathrm{m}}^2}{2} = (E_{\mathrm{p}})_{\max}$$

Для малых колебаний математического маятника:

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mgx^2}{2l}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l},$$

$$(E_{\mathrm{p}})_{\max} = mgh_{\mathrm{m}} = \frac{mgx_{\mathrm{m}}^2}{2l}, \quad (E_{\mathrm{k}})_{\max} = \frac{m\upsilon_{\mathrm{m}}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_{\mathrm{m}}^2}{2} = (E_{\mathrm{p}})_{\max}$$

Здесь h_{m} – максимальная высота подъема маятника в поле тяготения Земли, x_{m} и $\upsilon_{\mathrm{m}} = \omega_0 x_{\mathrm{m}}$ – максимальные значения отклонения маятника от положения равновесия и его скорости.

Превращения энергии при свободных механических колебаниях в отсутствие трения можно проиллюстрировать графически. Рассмотрим в качестве примера колебания груза массой *m* на пружине жесткости *k*. Пусть смещение *x* (*t*) груза из положения равновесия и его скорость υ (*t*) изменяются со временем по законам:

$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t)$, где $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$,

$$\boldsymbol{\upsilon(t) = -\omega x_m \sin(\omega_0 t).}$$

Следовательно,

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{4}kx_m^2(1 + \cos 2\omega_0 t),$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}k\omega_0^2x_m^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{4}kx_m^2(1 - \cos 2\omega_0 t).$$

На рисунке ниже изображены графики функций $E_p(t)$ и $E_k(t)$. Потенциальная и кинетическая энергии за период колебаний $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$ в два раза достигают максимальных значений. Сумма $E_p(t) + E_k(t) = E = \mathrm{const}$ остается неизменной.

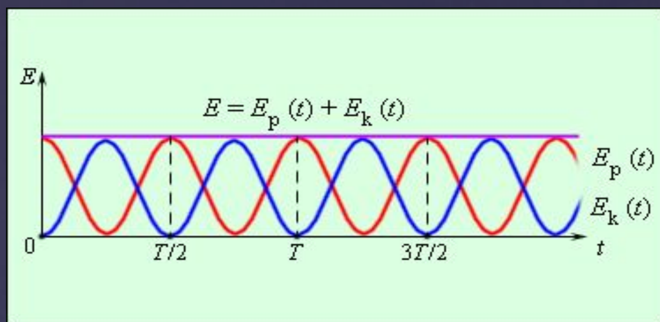


График при свободных незатухающих колебаниях

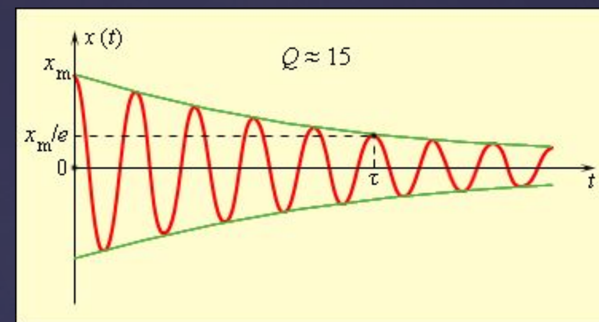


График при свободных затухающих колебаниях

Резонанс — явление, при котором амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум при некотором значении частоты вынуждающей силы. Часто это значение близко к частоте собственных колебаний, фактически может совпадать, но это не всегда так и не является причиной резонанса.

В результате резонанса при некоторой частоте вынуждающей силы колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие этой силы. Степень отзывчивости в теории колебаний описывается величиной, называемой ***добротностью***. При помощи резонанса можно выделить и/или усилить даже весьма слабые периодические колебания.

Наиболее известная большинству людей механическая резонансная система — это обычные качели. Если вы будете подталкивать качели в соответствии с их резонансной частотой, размах движения будет увеличиваться, в противном случае движения будут затухать. Резонансную частоту такого маятника с достаточной точностью в диапазоне малых смещений от равновесного состояния, можно найти по формуле:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

, где *g* это ускорение свободного падения (9,8 м/с² для поверхности Земли), а *L* — длина от точки подвешивания маятника до центра его масс. (Более точная формула довольно сложна, и включает эллиптический интеграл). Важно, что резонансная частота не зависит от массы маятника. Также важно, что раскачивать маятник нельзя на кратных частотах (*высших гармониках*), зато это можно делать на частотах, равных долям от основной (*низших гармониках*).

Резонанс.

Струны таких инструментов, как лютня, гитара, скрипка или пианино, имеют основную резонансную частоту, напрямую зависящую от длины, массы и силы натяжения струны. Длина волны первого резонанса струны равна её удвоенной длине. При этом, её частота зависит от скорости *v*, с которой волна распространяется по струне: $f = \frac{v}{2L}$

, где: *L* — длина струны (в случае, если она закреплена с обоих концов). Скорость распространения волны по струне зависит от её натяжения *T* и массы на единицу длины ϱ:

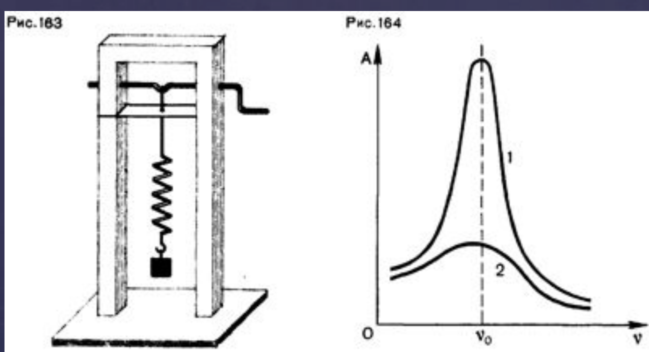
$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Таким образом, частота главного резонанса зависит от свойств струны и выражается следующим отношением:

$$f = \frac{\sqrt{\frac{T}{\rho}}}{2L} = \frac{\sqrt{\frac{T}{m/L}}}{2L} = \sqrt{\frac{T}{4mL}}$$

, где:

- *T* — сила натяжения;
- ϱ — масса единицы длины струны;
- *m* — полная масса струны.



Резонанс пружинного маятника

Струна музыкального инструмента - гитары

Увеличение натяжения струны и уменьшение её массы (толщины) и длины увеличивает её резонансную частоту. Помимо основного резонанса, струны также имеют резонансы на высших гармониках основной частоты *f*, например, 2*f*, 3*f*, 4*f*, и т. д. Если струне придать колебание коротким воздействием (щипком пальцев или ударом молоточка), струна начнёт колебания на всех частотах, присутствующих в воздействующем импульсе (теоретически, короткий импульс содержит **все** частоты). Однако частоты, не совпадающие с резонансными, быстро затухнут, и мы услышим только гармонические колебания, которые и воспринимаются как музыкальные ноты.