Решение иррациональных уравнений

Разные методы

Метод возведения правой и левой части в квадрат

$$\sqrt{1+\sqrt{x^2-24}}=x-1.$$

$$\begin{cases}1+x\sqrt{x^2-24}=x^2-2x+1\\ x-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(\sqrt{x^2-24}-x+2)=0\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=7\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow x=7.$$

3. Решение уравнений с использованием замены переменной.

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример1.

$2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33, x\in R.$

Пусть $y=\sqrt{2x^2+3x+9}, y\geq 0,$ *тогда исходное уравнение примет вид:*

$y^2+y-42=0$, *корни которого* $y=6$ *и* $y=-7\notin[0;\infty)$. *Решая уравнение* $\sqrt{2x^2+3x+9}=6$, *получаем* $x=3$ *и* $x=-4{,}5.$

Ответ: $\{3;-4{,}5\}$.

В следующих примерах используется более сложная замена переменной.

Пример 2

$2x^2+(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}=1, x\in R.$

Перенесем в левую часть все члены уравнения и произведем дополнительные преобразования: $x^2+2x\sqrt{x^2-x+1}+x^2-x+1+x+\sqrt{x^2-x+1}-2=0$.

$(x+\sqrt{x^2-x+1})^2+x+\sqrt{x^2-x+1}-2=0.$

Замена $y=x+\sqrt{x^2-x+1}$ *приводит уравнение к виду* $y^2+y-2=0,$ *корнями которого являются* $y=1$ *и* $y=-2.$

Осталось решить совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x^2-x+1}=1 \\ x+\sqrt{x^2-x+2}-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x^2-x+1=1-2x+x^2 \\ 1-x\geq 0 \\ x^2-x+1=1+4x+4 \\ -x-2\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=0 \\ x\leq 1 \\ x=-0{,}6 \\ x\leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: $\{0\}$.

4. Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение.

Теорема.

Уравнение $f(x)\cdot g(x)=0$***, определенное на всей числовой оси, равносильно совокупности уравнений*** $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$.

Пример1.

$(x+3)\sqrt{x-1}=3\sqrt{x^2-1}.$

При $x\geq 1$ *уравнение принимает вид:* $\sqrt{x-1}(x+3-3\sqrt{x+1})=0,$ *которое равносильно совокупности двух уравнений:* $\}$

$$\left[\begin{array}{c} \sqrt{x-1}=0 \\ x+3-3\sqrt{x+1})=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=1 \\ 9(x+1)=x^2+6x+9 \\ x\geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x^2-3x=0 \\ x\geq 1 \\ x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=0.x=3 \\ x\geq 1 \\ x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{1,3\}$.

Выделить общий множитель часто бывает очень трудно. Иногда это удается сделать после дополнительных преобразований. В приведенном ниже примере для этого рассматриваются попарные разности подкоренных выражений.

7. Иррациональные уравнения, содержащие степени выше второй.

Если уравнение имеет вид $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, то его можно решить , возводя обе части этого уравнения в степень n. Полученное уравнение $f(x) = (g(x))^n$ при нечетном n равносильно данному уравнению, а при четном n является нго следствием, аналогично рассмотренному выше случаю при $n = 2$.

Пример 1

$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{1-x}, x \in (-\infty; 1]$.

Возведем обе части уравнения в куб:

$2 - x = 1 - 3\sqrt{x-1} + 3(x-1) - (x-1)\sqrt{x-1}$, или

$\sqrt{x-1}(x + 2 - 4\sqrt{x-1}) = 0$, которое равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{c} \sqrt{x-1} = 0 \\ x + 2 - 4\sqrt{x-1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 1 \\ x^2 + 4x + 4 = 16x - 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 1 \\ x^2 - 12x + 20 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 10. \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1, 2, 10\}$.

При решении иррациональных уравнений очень часто пользуются следующим приемом.

Если $a + b = c$, то $a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = c^3$.

В последнем равенстве $(a+b)$ заменяют на c и получают $3abc = c^3 - b^3 - a^3$.

Далее легко избавиться от кубической иррациональности , возводя обе части в куб.

Контрольная работа

1. Найти область определения функции

$$y=(x+5)^{-\frac{1}{4}}+\sqrt[6]{x^2+3x-10} \quad \left[y=(x-6)^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[5]{x^2+5x-6}\right].$$

2. Исследовать функцию и построить ее график

$$y=\sqrt{x+3}-1 \quad [y=(x-2)^3+8].$$

3. Решить уравнение

$$3x+1+\sqrt{7-9x}=0 \quad [1+2x+\sqrt{7-6x}=0].$$

4. Решить неравенство

$$(3x+4)\sqrt{4-x^2}\geqslant 0 \quad [(2x-7)\sqrt{x^2-9}\leqslant 0].$$

---

5. Решить уравнение

$$x^2-x+\sqrt{x^2-x+4}=2 \quad [x^2-x+\sqrt{x^2-x-2}=8].$$

6. Решить неравенство

$$2\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}\leqslant 1 \quad [2\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}\geqslant 1].$$