

Решение иррациональных уравнений

Разные методы

Метод возведения правой и левой части в квадрат

$$\sqrt{1 + \sqrt{x^2 - 24}} = x - 1.$$

$$\begin{cases} 1 + x\sqrt{x^2 - 24} = x^2 - 2x + 1 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(\sqrt{x^2 - 24} - x + 2) = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \Leftrightarrow x = 7. \\ x \geq 1 \end{cases}$$

3. Решение уравнений с использованием замены переменной.

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример 1.

$$2x^2 + 3x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 33, x \in \mathbb{R}.$$

Пусть $y = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, y \geq 0$, тогда исходное уравнение примет вид:

$$y^2 + y - 42 = 0, \text{ корни которого } y = 6 \text{ и } y = -7 \notin [0, \infty). \text{ Решая уравнение } \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6, \text{ получаем } x = 3 \text{ и } x = -4,5.$$

Ответ: $\{3, -4,5\}$.

В следующих примерах используется более сложная замена переменной.

Пример 2

$$2x^2 + (2x+1)\sqrt{x^2 - x + 1} = 1, x \in \mathbb{R}.$$

Перенесем в левую часть все члены уравнения и произведем дополнительные преобразования: $x^2 + 2x\sqrt{x^2 - x + 1} + x^2 - x + 1 + x + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2 = 0$.

$$(x + \sqrt{x^2 - x + 1})^2 + x + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2 = 0.$$

Замена $y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$ приводит уравнение к виду $y^2 + y - 2 = 0$, корнями которого являются $y = 1$ и $y = -2$.

Осталось решить совокупность двух уравнений:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 \\ x + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 1 - 2x + x^2 \\ 1 - x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 = 1 + 4x + 4 \\ -x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \leq 1 \\ x = -0,6 \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

4. Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение.

Теорема.

Уравнение $f(x) \cdot \varphi(x) = 0$, определенное на всей числовой оси, равносильно совокупности уравнений $\begin{cases} f(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$.

Пример 1.

$$(x+3)\sqrt{x-1} = 3\sqrt{x^2-1}.$$

При $x \geq 1$ уравнение принимает вид: $\sqrt{x-1}(x+3-3\sqrt{x+1}) = 0$, которое равносильно совокупности двух уравнений: $\left. \begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 0 \\ x+3-3\sqrt{x+1} = 0 \end{array} \right\}$

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ x+3-3\sqrt{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x=0 \\ x \geq 1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, x=3 \\ x \geq 1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Ответ: $\{1, 3\}$.

Выделить общий множитель часто бывает очень трудно. Иногда это удается сделать после дополнительных преобразований. В приведенном ниже примере для этого рассматриваются попарные разности подкоренных выражений.

7. Иррациональные уравнения, содержащие степени выше второй.

Если уравнение имеет вид $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, то его можно решить, возводя обе части этого уравнения в степень n . Полученное уравнение $f(x) = (g(x))^n$ при нечетном n равносильно данному уравнению, а при четном n является его следствием, аналогично рассмотренному выше случаю при $n = 2$.

Пример 1

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{1-x}, x \in (-\infty; 1].$$

Возведем обе части уравнения в куб:

$$2-x = 1 - 3\sqrt{x-1} + 3(x-1) - (x-1)\sqrt{x-1}, \text{ или}$$

$\sqrt{x-1}(x+2-4\sqrt{x-1}) = 0$, которое равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ x+2-4\sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+4x+4=16x-16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-12x+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=10 \\ x=2 \end{cases}$$

Ответ: $\{1, 2, 10\}$.

При решении иррациональных уравнений очень часто пользуются следующим приемом.

Если $a+b=c$, то $a^3+3ab(a+b)+b^3=c^3$.

В последнем равенстве $(a+b)$ заменяют на c и получают $3abc=c^3-b^3-a^3$.

Далее легко избавиться от кубической иррациональности, возводя обе части в куб.

Контрольная работа

1. Найти область определения функции

$$y = (x + 5)^{-\frac{1}{4}} + \sqrt[6]{x^2 + 3x - 10} \quad \left[y = (x - 6)^{-\frac{1}{3}} + \sqrt[5]{x^2 + 5x - 6} \right].$$

2. Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \sqrt{x + 3} - 1 \quad [y = (x - 2)^3 + 8].$$

3. Решить уравнение

$$3x + 1 + \sqrt{7 - 9x} = 0 \quad [1 + 2x + \sqrt{7 - 6x} = 0].$$

4. Решить неравенство

$$(3x + 4)\sqrt{4 - x^2} \geq 0 \quad [(2x - 7)\sqrt{x^2 - 9} \leq 0].$$

-
5. Решить уравнение

$$x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 4} = 2 \quad [x^2 - x + \sqrt{x^2 - x - 2} = 8].$$

6. Решить неравенство

$$2\sqrt{x - 2} - \sqrt{x + 3} \leq 1 \quad [2\sqrt{x - 3} - \sqrt{x + 2} \geq 1].$$