Решение иррациональных уравнений

Разные методы

Метод возведения правой и левой части в квадрат

$$\sqrt{1+\sqrt{x^2-24}}=x-1.$$

$$\begin{cases} 1+x\sqrt{x^2-24}=x^2-2x+1 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(\sqrt{x^2-24}-x+2)=0 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=7 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=7.$$

3. Решение уравнений с использованием замены переменной.

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример1.

$2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33, x\in R.$

Пусть $y=\sqrt{2x^2+3x+9}, y\geq 0,$ *тогда исходное уравнение примет вид:*

$y^2+y-42=0$, *корни которого* $y=6$ *и* $y=-7\notin[0;\infty)$. *Решая уравнение* $\sqrt{2x^2+3x+9}=6$, *получаем* $x=3$ *и* $x=-4,5.$

Ответ: $\{3;-4,5\}$.

В следующих примерах используется более сложная замена переменной.

Пример 2

$2x^2+(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}=1, x\in R.$

Перенесем в левую часть все члены уравнения и произведем дополнительные преобразования: $x^2+2x\sqrt{x^2-x+1}+x^2-x+1+x+\sqrt{x^2-x+1}-2=0$.

$(x+\sqrt{x^2-x+1})^2+x+\sqrt{x^2-x+1}-2=0.$

Замена $y=x+\sqrt{x^2-x+1}$ *приводит уравнение к виду* $y^2+y-2=0,$ *корнями которого являются* $y=1$ *и* $y=-2.$

Осталось решить совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x^2-x+1}=1 \\ x+\sqrt{x^2-x+2}-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x^2-x+1=1-2x+x^2 \\ 1-x\geq 0 \\ x^2-x+1=1+4x+4 \\ -x-2\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=0 \\ x\leq 1 \\ x=-0,6 \\ x\leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: $\{0\}$.

4. Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение.

Теорема.

Уравнение $f(x)\cdot g(x)=0$**, определенное на всей числовой оси, равносильно совокупности уравнений** $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$.

Пример1.

$$(x+3)\sqrt{x-1}=3\sqrt{x^2-1}.$$

При $x\geq 1$ *уравнение принимает вид:* $\sqrt{x-1}\left(x+3-3\sqrt{x+1}\right)=0,$ *которое равносильно совокупности двух уравнений:*

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=0 \\ x+3-3\sqrt{x+1}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=1 \\ 9(x+1)=x^2+6x+9 \\ x\geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x^2-3x=0 \\ x\geq 1 \\ x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=0, x=3 \\ x\geq 1 \\ x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1,3\}$.

Выделить общий множитель часто бывает очень трудно. Иногда это удается сделать после дополнительных преобразований. В приведенном ниже примере для этого рассматриваются попарные разности подкоренных выражений.

7. Иррациональные уравнения, содержащие степени выше второй.

Если уравнение имеет вид $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, *то его можно решить , возводя обе части этого уравнения в степень* n . *Полученное уравнение* $f(x) = (g(x))^n$ *при нечетном* n *равносильно данному уравнению, а при четном* n *является нго следствием, аналогично рассмотренному выше случаю при* $n = 2$.

Пример 1

$\sqrt[3]{2-x} = 1-\sqrt{1-x}, x \in (-\infty; 1]$.

Возведем обе части уравнения в куб:

$2 - x = 1 - 3\sqrt{x-1} + 3(x-1) - (x-1)\sqrt{x-1}$, *или*

$\sqrt{x-1}(x+2-4\sqrt{x-1}) = 0$, *которое равносильно совокупности двух уравнений:*

$$\left[\begin{array}{c} \sqrt{x-1} = 0 \\ x+2-4\sqrt{x-1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 1 \\ x^2+4x+4 = 16x-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 1 \\ x^2-12x+20 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 10. \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1, 2, 10\}$.

При решении иррациональных уравнений очень часто пользуются следующим приемом.

Если $a + b = c$, *то* $a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = c^3$.

В последнем равенстве $(a+b)$ *заменяют на* c *и получают* $3abc = c^3 - b^3 - a^3$.

Далее легко избавиться от кубической иррациональности , возводя обе части в куб.

Контрольная работа

1. Найти область определения функции

$$y = (x+5)^{-\frac{1}{4}} + \sqrt[6]{x^2+3x-10} \quad \left[y = (x-6)^{-\frac{1}{3}} + \sqrt[5]{x^2+5x-6}\right].$$

2. Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \sqrt{x+3} - 1 \quad [y = (x-2)^3 + 8].$$

3. Решить уравнение

$$3x + 1 + \sqrt{7-9x} = 0 \quad [1 + 2x + \sqrt{7-6x} = 0].$$

4. Решить неравенство

$$(3x+4)\sqrt{4-x^2} \geqslant 0 \quad [(2x-7)\sqrt{x^2-9} \leqslant 0].$$

---

5. Решить уравнение

$$x^2 - x + \sqrt{x^2-x+4} = 2 \quad [x^2 - x + \sqrt{x^2-x-2} = 8].$$

6. Решить неравенство

$$2\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} \leqslant 1 \quad [2\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2} \geqslant 1].$$