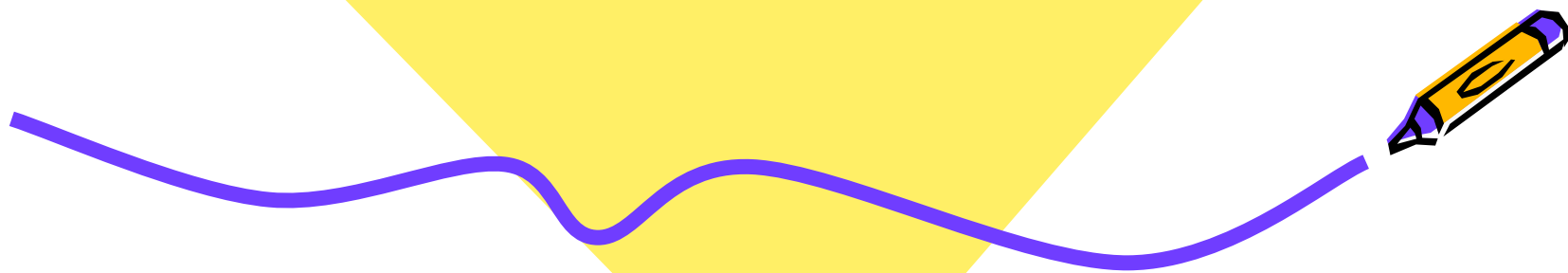




Методы решения систем уравнений



Решите систему уравнений

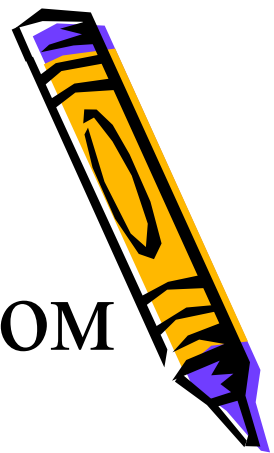
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

1 – графическим методом

2 – методом алгебраического сложения

3 – методом подстановки





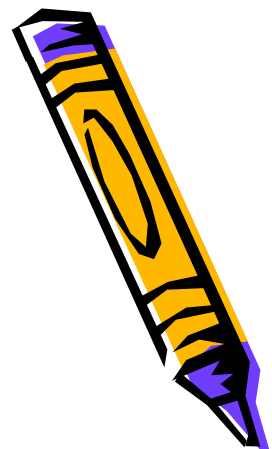
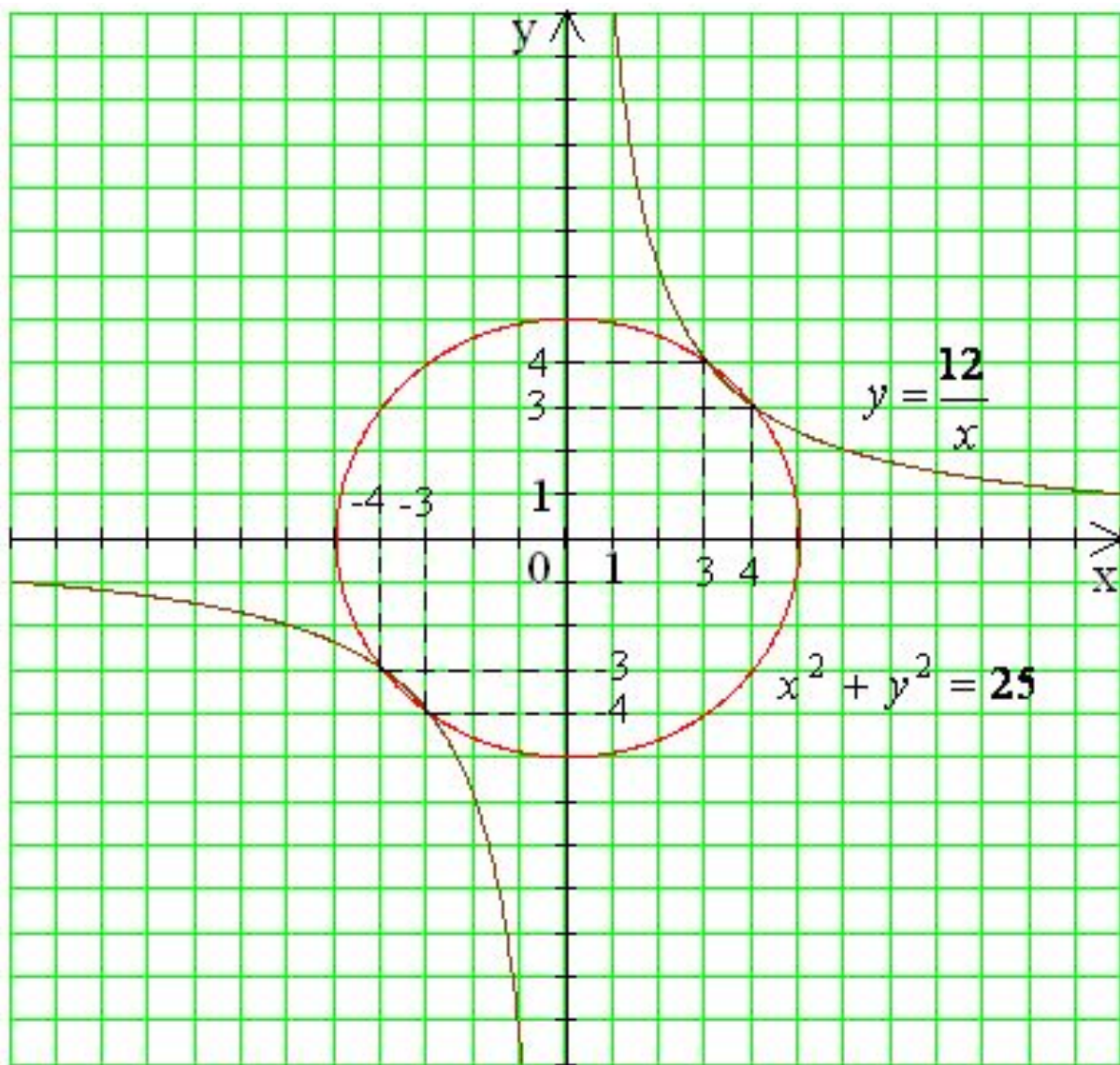
1. Графический метод

$x^2 + y^2 = 25$ - окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 5.

$y = \frac{12}{x}$ - обратная пропорциональность, график - гиперболоа, ветви расположены в 1 и 3 координатных четвертях.

x	2	3	4	6
y	6	4	3	2





Ответ: $(-4; -3)$, $(-3; -4)$, $(3; 4)$, $(4; 3)$.

2. Метод алгебраического сложения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases} \quad \begin{cases} (x + y)^2 = 49, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12 \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 49$$

ИЛИ

$$\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$\begin{cases} x = 7 - y \\ (7 - y)y = 12 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{7-1}{2} = 3$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$\begin{cases} x = -7 - y \\ (-7 - y)y = 12 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{-7 - 1}{2} = -4$$

$$y_2 = \frac{-7 + 1}{2} = -3$$

$$y^2 + 7y + 12 = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

Ответ: $(-4; -3), (-3; -4), (3; 4), (4; 3)$.

3. Метод подстановки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases} \longrightarrow x = \frac{12}{y}$$

$$x^2 = \left(\frac{12}{y}\right)^2$$

$$\begin{cases} \frac{144}{y^2} + y^2 = 25, & | \cdot y^2 \\ x = \frac{12}{y} \end{cases}$$

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

Пусть $y^2 = t$, тогда $t \geq 0$

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

Пусть $y^2 = t$, тогда $t \geq 0$

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

Пусть $y^2 = t$, тогда $t \geq 0$

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$D = 625 - 576 = 49$$

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

Пусть $y^2 = t$, тогда $t \geq 0$

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$D = 625 - 576 = 49$$

$$t_1 = \frac{25 + 7}{2} = 16, \quad t_2 = \frac{25 - 7}{2} = 9$$

$$y^2 = 16$$

ИЛИ

$$y^2 = 9$$

$$y_{1,2} = \pm 4$$

$$y_{3,4} = \pm 3$$

$$x = \frac{12}{y}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

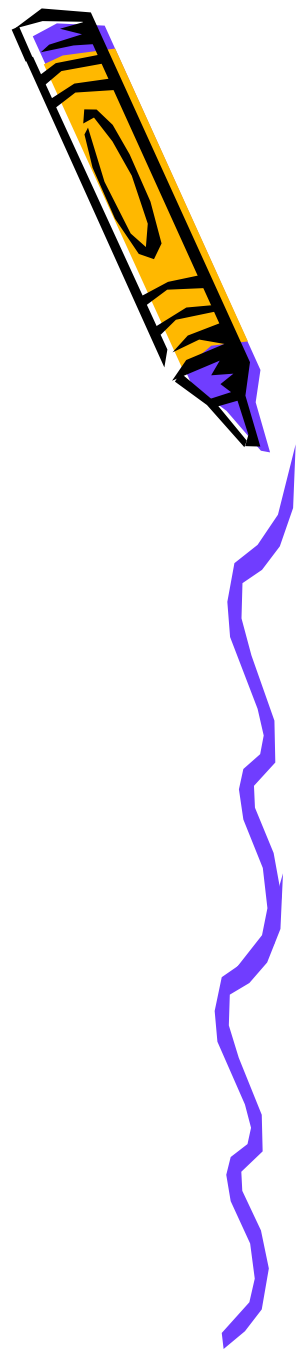
$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

или

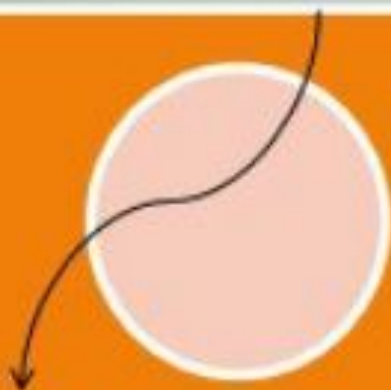
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$$

Ответ: $(-4;-3)$, $(-3;-4)$, $(3;4)$, $(4;3)$.

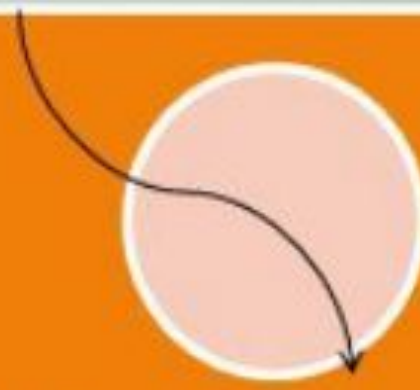
Метод введения новой переменной



Метод введения новой переменной в системе уравнений применяется одним из следующих способов:



Вводятся две новые переменные сразу для обоих уравнений системы



Вводится одна новая переменная только для одного уравнения системы

$$\begin{cases} x^2y^2 + xy = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$x^2y^2 + xy = 2$$

$$x^2y^2 = (xy)^2$$

Замена: $xy = t$,

$$t^2 + t = 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = -2 \quad t_2 = 1$$

$$xy = -2 \quad \text{ИЛИ} \quad xy = 1$$

$$\begin{cases} xy = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$3x - 2x^2 = -2$$

$$\begin{cases} xy = -2 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = -0,5$$

$$\begin{cases} x(3 - 2x) = -2 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$y_1 = -1, y_2 = 4$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$3x - 2x^2 = 1$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$x_3 = 0,5, x_4 = 1$$

$$\begin{cases} x(3 - 2x) = 1 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$y_3 = 2, y_4 = 1$$

Ответ: $(2; -1), (-0,5; 4), (0,5; 2), (1; 1)$

Домашняя работа

Записать решение
следующей системы
уравнений и изучить как
делать замены в различных
системах уравнений,
представленных в таблице

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2, \\ \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$$

$$\frac{1}{x+y} = a \quad \text{и} \quad \frac{1}{x-y} = b$$

$$\begin{cases} a + b = 2, \\ 3a + 4b = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 - b, \\ 3(2 - b) + 4b = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 - b, \\ b = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1, \\ \frac{1}{x-y} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=2, \\ x-y=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ 1-y=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$$

Исходная система

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 5(x+y) + 4 = 0, \\ (x-y)^2 - (x-y) - 2 = 0. \end{cases}$$

Введение новых
переменных

$$\begin{cases} a = x + y, \\ b = x - y. \end{cases}$$

Система уравнений с новой
переменной

$$\begin{cases} a^2 - 5a + 4 = 0, \\ b^2 - b - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 1, \\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 4,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{x}, \\ b = \frac{1}{y}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 4b = 1, \\ 2a + 5b = 4,5 \end{cases}$$

Исходная система

$$\begin{cases} \frac{6}{x+y} + \frac{5}{x-y} = 7, \\ \frac{3}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 = 6, \\ xy - x + y = -5 \end{cases}$$

Введение новых
переменных

$$\begin{cases} a = \frac{1}{x+y}, \\ b = \frac{1}{x-y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = xy, \\ b = x - y. \end{cases}$$

Система уравнений с новой
переменной

$$\begin{cases} 6a + 5b = 7, \\ 3a - 2b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 6, \\ a - b = -5 \end{cases}$$