Методы решения систем уравнений

Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

1 – графическим методом

2 – методом алгебраического сложения

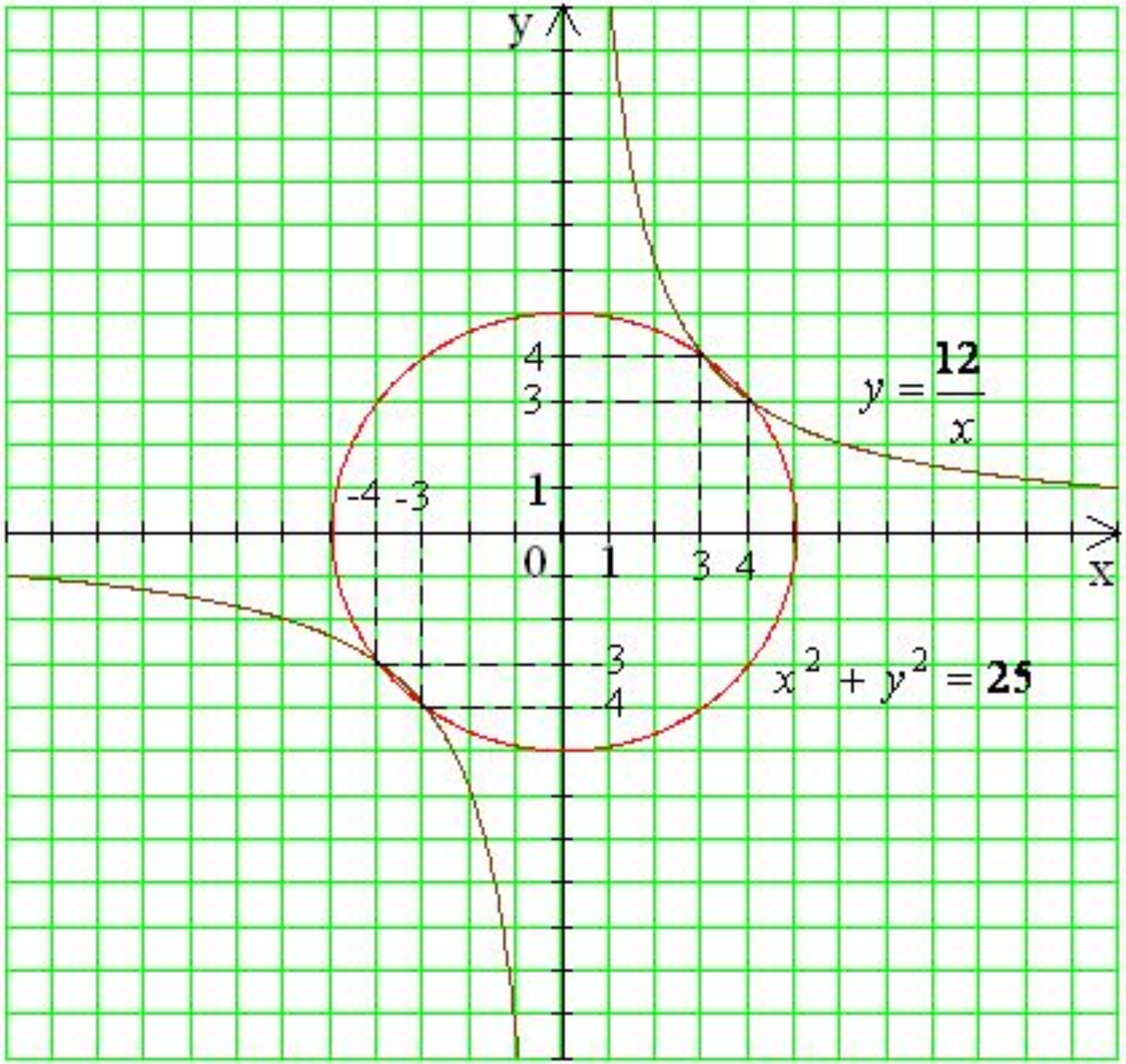
3 – методом подстановки

1. Графический метод

$x^2 + y^2 = 25$ - окружность с центром (0; 0) и радиусом 5.

$y = \dfrac{12}{x}$ - обратная пропорциональность, график - гипербола, ветви расположены в 1 и 3 координатных четвертях.

x	2	3	4	6
y	6	4	3	2



<u>**Ответ:**</u> **(-4;-3), (-3;-4), (3;4), (4;3).**

2. Метод алгебраического сложения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 49, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12 \,\big|\cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases}$$

$$\overline{\quad x^2 + 2xy + y^2 = 49 \quad}$$

или

$$\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 - y \\ (7 - y)y = 12 \end{cases}$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$y_1 = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{7-1}{2} = 3$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad \textit{или} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7 - y \\ (-7 - y)y = 12 \end{cases}$$

$$y^2 + 7y + 12 = 0$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$y_1 = \frac{-7-1}{2} = -4$$

$$y_2 = \frac{-7+1}{2} = -3$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

Ответ: **(-4;-3), (-3;-4), (3;4), (4;3).**

3. Метод подстановки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases} \longrightarrow x = \frac{12}{y}$$

$$x^2 = (\frac{12}{y})^2$$

$$\begin{cases} \frac{144}{y^2} + y^2 = 25, \quad | \cdot y^2 \\ x = \frac{12}{y} \end{cases}$$

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

Пусть $y^2 = t$, *тогда* $t \geq 0$

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

Пусть $y^2 = t,$ *тогда* $\mathrm{t} \geq 0$

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

Пусть $y^2 = t$, *тогда* $t \geq 0$

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$D = 625 - 576 = 49$$

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

Пусть $y^2 = t$, *тогда* $t \geq 0$

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$D = 625 - 576 = 49$$

$$t_1 = \frac{25+7}{2} = 16, \quad t_2 = \frac{25-7}{2} = 9$$

$$y^2 = 16 \qquad \text{или} \qquad y^2 = 9$$

$$y_{1,2} = \pm 4 \qquad\qquad y_{3,4} = \pm 3$$

$$x = \frac{12}{y}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$$

Ответ: **(-4;-3), (-3;-4), (3;4), (4;3).**

Метод введения новой переменной

Метод введения новой переменной в системе уравнений применяется одним из следующих способов:

Водятся две новые переменные сразу для обоих уравнений системы

Вводится одна новая переменная только для одного уравнения системы

$$\begin{cases} x^2y^2 + xy = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$x^2y^2 + xy = 2$$

$$x^2y^2 = (xy)^2$$

Замена: $xy = t$,

$$t^2 + t = 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = -2 \quad t_2 = 1$$

$xy = -2$ или $xy = 1$

$$\begin{cases} xy = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = -2 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(3 - 2x) = -2 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$3x - 2x^2 = -2$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = -0{,}5$$

$$y_1 = -1, y_2 = 4$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$3x - 2x^2 = 1$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$x_3 = 0{,}5, x_4 = 1$$

$$y_3 = 2, y_4 = 1$$

$$\begin{cases} x(3 - 2x) = 1 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

Ответ: $(2; -1)$, $(-0{,}5; 4)$, $(0{,}5; 2)$, $(1; 1)$

Домашняя работа

Записать решение следующей системы уравнений и изучить как делать замены в различных системах уравнений, представленных в таблице

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 2, \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$$

$\dfrac{1}{x+y} = a$ **и** $\dfrac{1}{x-y} = b$

$$\begin{cases} a + b = 2, \\ 3a + 4b = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 - b, \\ 3(2-b) + 4b = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 - b, \\ b = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 1, \\ \dfrac{1}{x-y} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ 1 - y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Исходная система	Введение новых переменных	Система уравнений с новой переменной
$\begin{cases}(x+y)^2-5(x+y)+4=0,\\(x-y)^2-(x-y)-2=0.\end{cases}$	$\begin{cases}a=x+y,\\b=x-y.\end{cases}$	$\begin{cases}a^2-5a+4=0,\\b^2-b-2=0\end{cases}$
$\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=1,\\\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=4,5\end{cases}$	$\begin{cases}a=\dfrac{1}{x},\\b=\dfrac{1}{y}.\end{cases}$	$\begin{cases}3a+4b=1,\\2a+5b=4,5\end{cases}$

Исходная система	Введение новых переменных	Система уравнений с новой переменной
$\begin{cases} \dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7, \\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} a=\dfrac{1}{x+y}, \\ b=\dfrac{1}{x-y} \end{cases}$	$\begin{cases} 6a+5b=7, \\ 3a-2b=-1 \end{cases}$
$\begin{cases} x^2y-xy^2=6, \\ xy-x+y=-5 \end{cases}$	$\begin{cases} a=xy, \\ b=x-y. \end{cases}$	$\begin{cases} ab=6, \\ a-b=-5 \end{cases}$