

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 11 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

ВЫПОЛНИЛА: ПРЕПОДАВАТЕЛЬ СПБ ГБПОУ

«МАЛООХТИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

ФИЛИШПОВА АЛЛА ФЕДОРОВНА

Мы знаем, как решать логарифмические уравнения, сегодня мы научимся решать логарифмические неравенства, не трудно догадаться, что они имеют вот такой вид:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x);$$

$$a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0$$

Давайте, преобразуем наше неравенство и разберемся, как решать его.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

Введем замену $t = \frac{f(x)}{g(x)}$

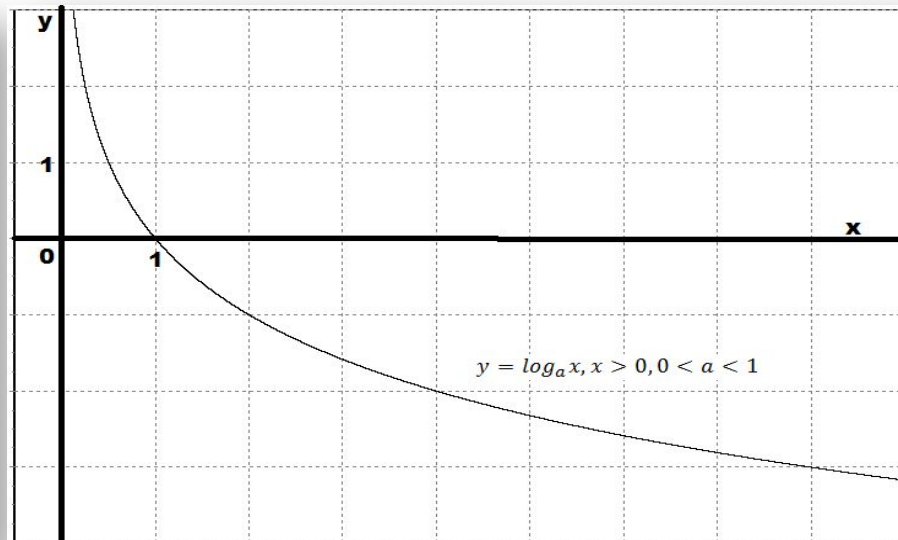
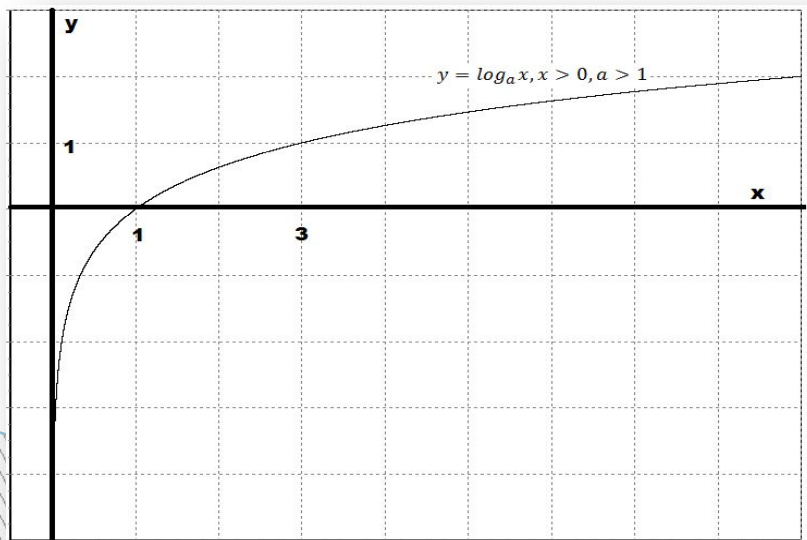
$$\log_a t > 0$$

Нам осталось рассмотреть два случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$.

Вспомним график функции логарифма при разных значениях основания.

Если, $a > 1$, то когда $t > 1$, то есть $f(x) > g(x)$.

Если, $0 < a < 1$, то когда $0 < t < 1$, то есть $f(x) < g(x)$.



Давайте сформулируем основное правило при решении логарифмических неравенств:

Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то:

при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$

при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Так же при решении логарифмических неравенств следует помнить о том, что выражения стоящие под знаком логарифма строго положительные, тогда неравенство обычно преобразует вот к такой системе неравенств.

Алгоритм решения логарифмических неравенств.

$\log_a f(x) > \log_a g(x), a > 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$\log_a f(x) > \log_a g(x), 0 < a < 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Пример. Решить неравенство

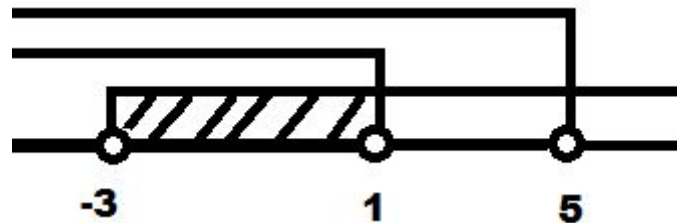
$$\log_4(5 - x) > \log_4(3 + x)$$

Решение.

Основание логарифма равно 4, что больше одного, тогда наше неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 5 - x > 0 \\ 3 + x > 0 \\ 5 - x > 3 + x \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5 \\ x > -3 \\ x < 1 \end{cases}$$

Построим наши промежутки на рисунке и найдем их пересечение:



Ответ: $x \in (-3; 1)$

Пример. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(2+x) > \log_{\frac{1}{3}}(1+2x)$$

Решение.

Основание логарифма, в нашем примере, меньше единицы, переходим к неравенству противоположного смысла, тогда логарифмическое неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2+x > 0 \\ 1+2x > 0 \\ 2+x < 1+2x \end{cases} \quad \begin{cases} x > -2 \\ x > -0.5 \\ -x < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -2 \\ x > -0.5 \\ x > 1 \end{cases}$$

В нашем случае можно не строить рисунок с промежутками, очевидно, что $x > 1$.

Ответ: $x > 1$

Пример. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(25 + 5x - x^2) \leq -2$$

Решение.

Поработаем с правой частью неравенства, представим число -2 в виде логарифма с основанием одной пятой.

И так
$$-2 = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{5}}25$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(25 + 5x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{5}}25$$

Основание логарифма меньше единицы, переходим к неравенству противоположному по смыслу

$$\begin{cases} 25 + 5x - x^2 > 0 \\ 25 + 5x - x^2 \geq 25 \end{cases}$$

Обратим внимание, на то, что первое неравенство системы мы можем не решать, так как в левой части, обоих неравенств, у нас стоят одинаковые выражения, а в правой положительные числа. Проще говоря, если $A \geq 25$, то очевидно $A > 0$.

Решим неравенство $25 + 5x - x^2 \geq 25$

$$5x - x^2 \geq 0 \quad x^2 - 5x \leq 0 \quad x(x - 5) \leq 0$$

Построим промежуток



Ответ: $x \in [0; 5]$

Пример. Решить неравенство

$$\log_2(7-x) + \log_2 x \geq 1 + \log_2 3$$

Решение.

Рассмотрим левую часть неравенства:

$$\log_2(7-x) + \log_2 x = \log_2((7-x) \cdot x) = \log_2(7x - x^2)$$

Рассмотрим правую часть неравенства:

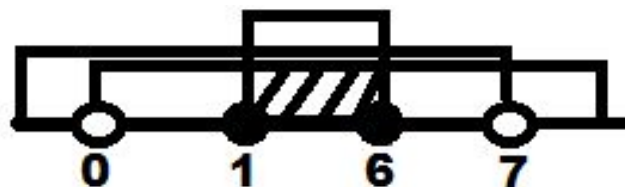
$$1 + \log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 6$$

Исходное неравенство равносильно неравенству: $\log_2(7x - x^2) \geq \log_2 6$

Основание логарифма больше единицы, тогда мы можем перейти к неравенству того же знака и нам останется решить систему:

$$\begin{cases} 7-x > 0 \\ x > 0 \\ 7x-x^2 \geq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 7 \\ x > 0 \\ 7x-x^2-6 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 7 \\ x > 0 \\ x^2-7x+6 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 7 \\ x > 0 \\ (x-6)(x-1) \leq 0 \end{cases}$$

Графически найдем решение



Ответ: $x \in [1; 6]$.

Пример. Решить неравенство

$$\lg^2(x^2) - 15 \lg(x) + 2 \leq 0$$

Решение.

Посмотрим внимательно на выражение: $\lg^2(x^2)$

$$\lg^2(x^2) = (\lg(x^2))^2 = (2 \lg(x))^2 = 4 \lg^2(x)$$

Воспользуемся методом замены переменных.

Пусть $y = \lg(x)$

Наше неравенство примет вид

$$4y^2 - 15y + 2 \leq 0$$

$$(4y + 1)(y - 4) \leq 0$$

Решением нашего неравенства будет промежуток:

$$-\frac{1}{4} \leq y \leq 4$$

Введем обратную замену

$$-\frac{1}{4} \leq \lg(x) \leq 4$$

$$10^{-\frac{1}{4}} \leq x \leq 10^4$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{10}} \leq x \leq 10^4$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{10}} \leq x \leq 10^4$$

Ответ:

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решить неравенство

а) $\log_3(7 - 2x) > \log_3(-2 + x)$

б) $\log_{\frac{1}{4}}(3 + 2x) < \log_{\frac{1}{4}}(4 + x)$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(27 + 8x - 2x^2) \leq -3$$

3. Решить неравенство

$$\log_5(x - 2) + \log_5 x \geq 1 + \log_5 3$$

4. Решить неравенство

$$\lg^2(x) - \lg(x) - 56 \leq 0$$