АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 11 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

ВЫПОЛНИЛА: ПРЕПОДАВАТЕЛЬ СПБ ГБПОУ «МАЛООХТИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

ФИЛИППОВА АЛЛА ФЕДОРОВНА

Мы знаем, как решать логарифмические уравнения, сегодня мы **научимся решать логарифмические неравенства**, не трудно догадаться, что они имеют вот такой вид:

$$\boxed{\log_a f(x) > \log_a g(x);}$$

$$a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0$$

Давайте, преобразуем наше неравенство и разберемся, как решать его.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

Введем замену $t = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

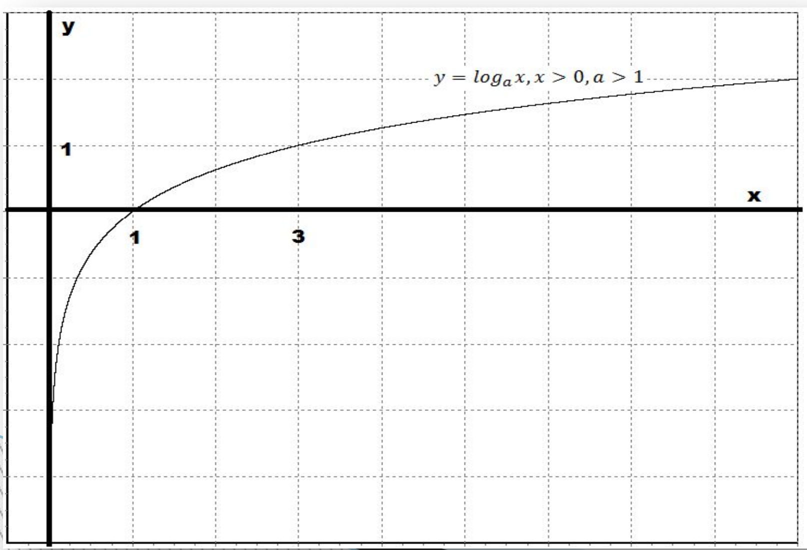
$$log_a t > 0$$

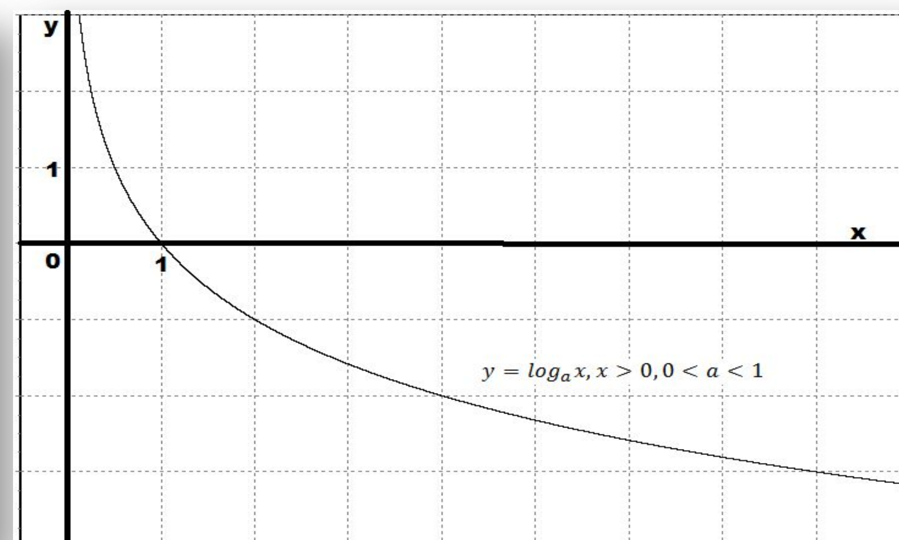
Нам осталось рассмотреть два случая: a>1 и 0<a<1.

Вспомним график функции логарифма при разных значениях основания.

Если, a>1, то когда t>1, то есть f(x)>g(x).

Если, 0<a<1, то когда 0<t<1, то есть f(x)<g(x).





Давайте сформулируем основное правило при решении логарифмических неравенств:

Если f(x)>0 и g(x)>0, то:

при a>1 логарифмическое неравенство $log_a f(x) > log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла: f(x)>g(x)

при 0<a<1 логарифмическое неравенство $log_a f(x) > log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: f(x)<g(x).

Так же **при решении логарифмических неравенств следует помнить о том, что выражения стоящие под знаком логарифма строго положительные**, тогда неравенство обычно преобразует вот к такой системе неравенств.

Алгоритм решения логарифмических неравенств.

$log_a f(x) > log_a g(x), a > 1$ **равносильно системе**

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$log_a f(x) > log_a g(x), 0 < a < 1$ **равносильно системе**

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Пример. Решить неравенство

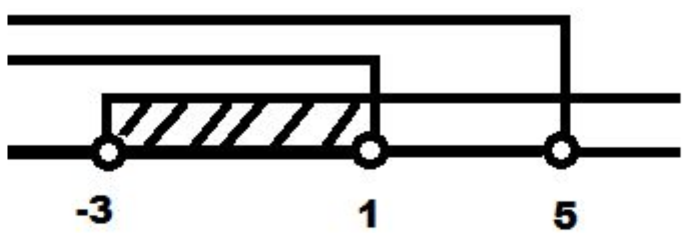
$$\log_4(5-x) > \log_4(3+x)$$

Решение.

Основание логарифма равно 4, что больше одного, тогда наше неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 5-x>0 \\ 3+x>0 \\ 5-x>3+x \end{cases} \qquad \begin{cases} x<5 \\ x>-3 \\ x<1 \end{cases}$$

Построим наши промежутки на рисунке и найдем их пересечение:



Ответ: x϶(-3;1)

Пример. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(2+x) > \log_{\frac{1}{3}}(1+2x)$$

Решение.

Основание логарифма, в нашем примере, меньше единицы, переходим к неравенству противоположного смысла, тогда логарифмическое неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2+x>0 \\ 1+2x>0 \\ 2+x<1+2x \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2 \\ x>-0.5 \\ -x<-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2 \\ x>-0.5 \\ x>1 \end{cases}$$

В нашем случае можно не строить рисунок с промежутками, очевидно, что x>1.

Ответ: x>1

Пример. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(25 + 5x - x^2) \leq -2$$

Решение.

Поработаем с правой частью неравенства, представим число -2 в виде логарифма с основанием одной пятой.

И так $$-2 = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{5}}25$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(25 + 5x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{5}}25$$

Основание логарифма меньше единицы, переходим к неравенству противоположному по смыслу

$$\begin{cases} 25 + 5x - x^2 > 0 \\ 25 + 5x - x^2 \geq 25 \end{cases}$$

Обратим внимание, на то, что первое неравенство системы мы можем не решать, так как в левой части, обоих неравенств, у нас стоят одинаковые выражения, а в правой положительные числа. Проще говоря, если А≥25, то очевидно А>0.

Решим неравенство $25 + 5x - x^2 \geq 25$

$5x - x^2 \geq 0$ $\quad$ $x^2 - 5x \leq 0$ $\quad$ $x(x-5) \leq 0$

Построим промежуток

Ответ: xϵ[0;5]

Пример. Решить неравенство

$$\log_2(7-x)+\log_2 x \geq 1+\log_2 3$$

Решение.

Рассмотрим левую часть неравенства:

$$\log_2(7-x)+\log_2 x=\log_2\big((7-x)\cdot x\big)=\log_2(7x-x^2)$$

Рассмотрим правую часть неравенства:

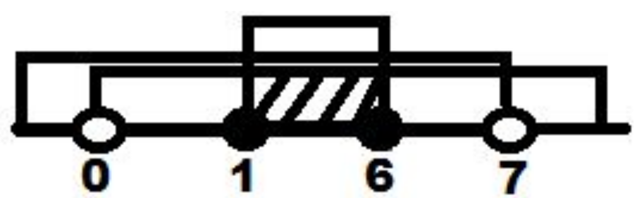
$$1+\log_2 3=\log_2 2+\log_2 3=\log_2 6$$

Исходное неравенство равносильно неравенству: $\log_2(7x-x^2)\geq \log_2 6$

Основание логарифма больше единицы, тогда мы можем перейти к неравенству того же знака и нам останется решить систему:

$$\begin{cases} 7-x>0 \\ x>0 \\ 7x-x^2\geq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x<7 \\ x>0 \\ 7x-x^2-6\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<7 \\ x>0 \\ x^2-7x+6\leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<7 \\ x>0 \\ (x-6)(x-1)\leq 0 \end{cases}$$

Графически найдем решение



Ответ: xϵ[1;6].

Пример. Решить неравенство

$$lg^2(x^2) - 15\lg(x) + 2 \le 0$$

Решение.

Посмотрим внимательно на выражение: $lg^2(x^2)$

$$lg^2(x^2) = (\lg(x^2))^2 = (2\lg(x))^2 = 4lg^2(x)$$

Воспользуемся методом замены переменных.

Пусть $y = \lg(x)$

Наше неравенство примет вид

$$4y^2 - 15y + 2 \le 0$$

$$(4y+1)(y-4) \le 0$$

Решением нашего неравенства будет промежуток: $-\frac{1}{4} \le y \le 4$

Введем обратную замену

$$-\frac{1}{4} \le \lg(x) \le 4$$

$$10^{-\frac{1}{4}} \le x \le 10^4$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{10}} \le x \le 10^4$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[4]{10}} \le x \le 10^4$

Задачи для самостоятельного решения.

1.Решить неравенство

а) $log_3(7-2x) > log_3(-2+x)$

б) $log_{\frac{1}{4}}(3+2x) < log_{\frac{1}{4}}(4+x)$

2. Решить неравенство

$$log_{\frac{1}{3}}(27+8x-2x^2) \leq -3$$

3. Решить неравенство

$$log_5(x-2) + log_5 x \geq 1 + log_5 3$$

4. Решить неравенство

$$lg^2(x) - \lg(x) - 56 \leq 0$$