# Модуль 3

## Формальные теории и исчисления

### *Занятие 3.1. Понятия формальной теории*

2020 г.

# Содержание

# Формальная теория

- множество *A* символов, образующих *алфавит*
- множество слов *F* в алфавите *A*, которые называются *формулами*
- подмножество *B* формул, $B \in F$ которые называются *аксиомами*
- множество *R* отношений на множестве формул $R \in F^{n+1}$, которые называются *правилами вывода*

# Ограничения (1)

- Алфавит *A* может быть конечным или бесконечным
- Множество формул *F* обычно задается индуктивно, как правило, оно бесконечно
- Множества *A* и *F* по совокупности определяют язык формальной теории, или сигнатуру

# Ограничения (2)

- Множество аксиом *B* может быть конечно или бесконечно
- Бесконечное множество аксиом *B* , как правило, задают в виде конечного множества схем и правил порождения из этих схем конкретных аксиом
- Множество правил вывода *R* обычно конечно

# Свойства формальной теории

- выводимость
- интерпретация
- общезначимость
- разрешимость
- непротиворечивость
- полнота
- независимость

# Выводимость

Пусть $F_1, F_2, F_n, G$ - формулы теории T,

е. $F_1, F_2, F_n, G \in F$

Если существует такое правило вывода R, что

$(F_1, F_2, F_n, G) \in R$ , то говорят, что формула G

непосредственно выводима из формул $F_1, F_2, F_n$

по правилу вывода R: $\dfrac{F_1, F_2, F_n}{G} R$

где формулы F называются посылками, а формула G заключением

# Вывод, гипотеза, теорема

**Вывод** формулы *G* из формул – $F_1, F_2, ..., F_n$ – это такая последовательность формул , что *Fn*=*G* , а любая формула *Fi* - либо аксиома, либо исходная формула, либо непосредственный вывод из ранее полученных формул

Если в теории *T* существует вывод формулы G из формул , то записывают

$F_1, F_2, ..., F_n \vdash G$, где – $F_1, F_2, ..., F_n$ - *гипотезы*

*Теорема* – формула, выводимая только из аксиом, без гипотез

# Интерпретация

*Интерпретацией* формальной теории *T* в область интерпретации *M* называется функция, $h{:}F \rightarrow M$, которая каждой формуле *F* теории *T* однозначно сопоставляет некое содержательное высказывание относительно объектов множества *M*

Высказывание может быть *истинно* или *ложно*, или не иметь истинностного значения. Если оно истинно, то говорят, что формула выполняется в данной интерпретации

# Интерпретация

Например, припишем значение 0 или 1 атомарным формулам (простым высказываниям), которые входят в сложные, что будет называться интерпретацией *h*

Говорят, что формула *A* исчисления истинна при некоторой интерпретации *h* тогда и только тогда, когда $h(A)=1$, в противном случае говорят, что *A* ложна при интерпретации *h*

# *Разрешимость*

**Формальная теория *T* называется *разрешимой*, если существует алгоритм, который для любой формулы теории определяет, является она теоремой или нет**

# Алгоритм

**Под *алгоритмом* в интуитивном смысле мы понимает такую последовательность действий, выполнение которых позволяет получить решение задачи регулярным путем за конечное число шагов**

# Свойства алгоритма

1. дискретность шагов
2. детерминируемость
3. регулярность
4. конечность
5. массовость

# Алгоритм

Например, правила дорожного движения не являются алгоритмом, т.к. содержат неоднозначность

Ярким примером такой неоднозначности может служить дорожный знак «прямо и направо»

# ***Общезначимость***

**Формула *общезначима* (тавтология), если она истинна в любой интерпретации**

**Формула называется *противоречием*, если она ложна в любой интерпретации**

# Непротиворечивость

**Формальная теория** ***семантически непротиворечива***, **если ни одна из ее теорем не является противоречием**

**Формальная теория формально** ***непротиворечива***, **если в ней не являются выводимыми одновременно формулы** $F$ **и** $\overline{F}$

# Полнота и независимость

**Формальная теория называется *полной*, если каждому истинному высказыванию соответствует теорема *Т***

**Система аксиом формальной теории называется *независимой*, если ни одна из аксиом не выводится из оставшихся**