

Модуль 3

Формальные теории и исчисления

Занятие 3.1. Понятия формальной теории



Содержание

1. **Формальная теория**
2. **Выводимость в формальной теории**
3. **Интерпретация**
4. **Разрешимость**
5. **Общезначимость**
6. **Непротиворечивость**
7. **Полнота и независимость**



Формальная теория

- множество A символов, образующих *алфавит*
- множество слов F в алфавите A , которые называются *формулами*
- подмножество B формул, $B \in F$ которые называются *аксиомами*
- множество R отношений на множестве формул $R \in F^{n+1}$ которые называются *правилами вывода*



Ограничения (1)

- Алфавит A может быть конечным или бесконечным
- Множество формул F обычно задается индуктивно, как правило, оно бесконечно
- Множества A и F по совокупности определяют язык формальной теории, или сигнатуру



Ограничения (2)

- Множество аксиом B может быть конечно или бесконечно
- Бесконечное множество аксиом B , как правило, задают в виде конечного множества схем и правил порождения из этих схем конкретных аксиом
- Множество правил вывода R обычно конечно



Свойства формальной теории

- ***выводимость***
- ***интерпретация***
- ***общезначимость***
- ***разрешимость***
- ***непротиворечивость***
- ***полнота***
- ***независимость***



Выводимость

Пусть F_1, F_2, F_n, G - формулы теории T ,

е. $F_1, F_2, F_n, G \in F$

Если существует такое правило вывода R , что

$(F_1, F_2, F_n, G) \in R$, то говорят, что формула G

непосредственно выводима из формул

F_1, F_2, F_n

по правилу вывода R :

$$\frac{F_1, F_2, F_n}{G} R$$

где формулы F называются **Г**сылками, а формула G

заключением



Вывод, гипотеза, теорема

Вывод формулы G из формул F_1, F_2, \dots, F_n – это такая последовательность формул, что $F_n = G$, а любая формула F_i – либо аксиома, либо исходная формула, либо непосредственный вывод из ранее полученных формул

Если в теории T существует вывод формулы G из формул, то записывают

$F_1, F_2, \dots, F_n \vdash G$, где F_1, F_2, \dots, F_n – **гипотезы**

Теорема – формула, выводимая только из аксиом, без гипотез



Интерпретация

Интерпретацией формальной теории T в область интерпретации M называется функция, $h:F \rightarrow M$, которая каждой формуле F теории T однозначно сопоставляет некое содержательное высказывание относительно объектов множества M

Высказывание может быть **истинно** или **ложно**, или не иметь истинностного значения. Если оно истинно, то говорят, что формула выполняется в данной интерпретации



Интерпретация

Например, припишем значение **0** или **1** атомарным формулам (простым высказываниям), которые входят в сложные, что будет называться интерпретацией ***h***

Говорят, что формула ***A*** исчисления истинна при некоторой интерпретации ***h*** тогда и только тогда, когда **$h(A)=1$** , в противном случае говорят, что ***A*** ложна при интерпретации ***h***



Разрешимость

Формальная теория T называется **разрешимой**, если существует алгоритм, который для любой формулы теории определяет, является она теоремой или нет



Алгоритм

Под **алгоритмом** в интуитивном смысле мы понимаем такую последовательность действий, выполнение которых позволяет получить решение задачи регулярным путем за конечное число шагов



Свойства алгоритма

- 1. дискретность шагов**
- 2. детерминированность**
- 3. регулярность**
- 4. конечность**
- 5. массовость**



Алгоритм

Например, правила дорожного движения не являются алгоритмом, т.к. содержат неоднозначность



Ярким примером такой неоднозначности может служить дорожный знак «прямо и направо»

Общезначимость

Формула **общезначима** (тавтология), если она истинна в любой интерпретации

Формула называется **противоречием**, если она ложна в любой интерпретации



Непротиворечивость

Формальная теория **семантически непротиворечива**, если ни одна из ее теорем не является противоречием

Формальная теория формально **непротиворечива**, если в ней не являются выводимыми одновременно формулы F и \overline{F}



Полнота и независимость

Формальная теория называется ***полной***, если каждому истинному высказыванию соответствует теорема ***T***

Система аксиом формальной теории называется ***независимой***, если ни одна из аксиом не выводится из оставшихся

