

# Модуль 3

## *Формальные теории и исчисления*

### *Занятие 3.1. Понятия формальной теории*



# Содержание

---

- 1. Формальная теория**
- 2. Выводимость в формальной теории**
- 3. Интерпретация**
- 4. Разрешимость**
- 5. Общезначимость**
- 6. Непротиворечивость**
- 7. Полнота и независимость**



# Формальная теория

---

- множество  $A$  символов, образующих *алфавит*
- множество слов  $F$  в алфавите  $A$ , которые называются *формулами*
- подмножество  $B$  формул,  $B \in F$  которые называются *аксиомами*
- множество  $R$  отношений на множестве формул  $R \in F^{n+1}$  которые называются *правилами вывода*



# Ограничения (1)

---

- Алфавит  $A$  может быть конечным или бесконечным
- Множество формул  $F$  обычно задается индуктивно, как правило, оно бесконечно
- Множества  $A$  и  $F$  по совокупности определяют язык формальной теории, или сигнатуру



# Ограничения (2)

---

- Множество аксиом  $B$  может быть конечно или бесконечно
- Бесконечное множество аксиом  $B$ , как правило, задают в виде конечного множества схем и правил порождения из этих схем конкретных аксиом
- Множество правил вывода  $R$  обычно конечно



# ***Свойства формальной теории***

---

- ***выводимость***
- ***интерпретация***
- ***общезначимость***
- ***разрешимость***
- ***непротиворечивость***
- ***полнота***
- ***независимость***



# Выводимость

Пусть  $F_1, F_2, F_n, G$  - формулы теории  $T$ ,

е.  $F_1, F_2, F_n, G \in F$

Если существует такое правило вывода  $R$ , что

$(F_1, F_2, F_n, G) \in R$ , то говорят, что формула  $G$

непосредственно выводима из формул

$F_1, F_2, F_n$

по правилу вывода  $R$ :

$$\frac{F_1, F_2, F_n}{G} R$$

где формулы  $F$  называются  $G$ сылками, а формула  $G$

заключением



# Вывод, гипотеза, теорема

**Вывод** формулы  $G$  из формул  $F_1, F_2, \dots, F_n$  – это такая последовательность формул, что  $F_n = G$ , а любая формула  $F_i$  – либо аксиома, либо исходная формула, либо непосредственный вывод из ранее полученных формул

Если в теории  $T$  существует вывод формулы  $G$  из формул, то записывают

$F_1, F_2, \dots, F_n \vdash G$ , где  $F_1, F_2, \dots, F_n$  – **гипотезы**

**Теорема** – формула, выводимая только из аксиом, без гипотез





# Интерпретация

---

**Интерпретацией** формальной теории  $T$  в область интерпретации  $M$  называется функция,  $h:F \rightarrow M$ , которая каждой формуле  $F$  теории  $T$  однозначно сопоставляет некоторое содержательное высказывание относительно объектов множества  $M$

Высказывание может быть **истинно** или **ложно**, или не иметь истинностного значения. Если оно истинно, то говорят, что формула выполняется в данной интерпретации



# Интерпретация

---

Например, припишем значение **0** или **1** атомарным формулам (простым высказываниям), которые входят в сложные, что будет называться интерпретацией ***h***

Говорят, что формула ***A*** исчисления истинна при некоторой интерпретации ***h*** тогда и только тогда, когда  **$h(A)=1$** , в противном случае говорят, что ***A*** ложна при интерпретации ***h***



# Разрешимость

---

Формальная теория  $T$  называется **разрешимой**, если существует алгоритм, который для любой формулы теории определяет, является она теоремой или нет



# Алгоритм

---

Под **алгоритмом** в интуитивном смысле мы понимаем такую последовательность действий, выполнение которых позволяет получить решение задачи регулярным путем за конечное число шагов



# ***Свойства алгоритма***

---

- 1. дискретность шагов**
- 2. детерминированность**
- 3. регулярность**
- 4. конечность**
- 5. массовость**



# Алгоритм

---

**Например, правила дорожного движения не являются алгоритмом, т.к. содержат неоднозначность**



**Ярким примером такой неоднозначности может служить дорожный знак «прямо и направо»**

# Общезначимость

---

Формула **общезначима** (тавтология), если она истинна в любой интерпретации

Формула называется **противоречием**, если она ложна в любой интерпретации



# Непротиворечивость

---

Формальная теория **семантически непротиворечива**, если ни одна из ее теорем не является противоречием

Формальная теория формально **непротиворечива**, если в ней не являются выводимыми одновременно формулы  $F$  и  $\overline{F}$





# ***Полнота и независимость***

---

Формальная теория называется ***полной***, если каждому истинному высказыванию соответствует теорема ***T***

Система аксиом формальной теории называется ***независимой***, если ни одна из аксиом не выводится из оставшихся

