




# Рекуррентные соотношения

Федотова Наталья Петровна


$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

- В 1202 году вышла книга "Liber Abaci" итальянского ученого Леона́рдо Пиза́нского (прозв. Фибоначчи), где он описал знаменитое рекуррентное соотношение  $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$
- Почему же это соотношение такое известное?
- Рассмотрим три задачи.



# Задача о кроликах

- Пусть в огороженном месте имеется пара кроликов (самка и самец) в первый день января. Эта пара кроликов производит новую пару кроликов (самку и самца) в первый день февраля и затем в первый день каждого следующего месяца. Каждая новорожденная пара кроликов становится зрелой уже через месяц и затем через месяц дает жизнь новой паре кроликов.
- Сколько пар кроликов будет в огороженном месте через год, то есть через 12 месяцев с начала размножения?



# Задача о последовательностях

- Требуется подсчитать количество последовательностей длины  $N$ , состоящих из 0 и 1, в которых никакие две единицы не стоят рядом.



# Задача о мячике на лесенке

- На вершине лесенки, содержащей  $N$  ступенек, находится мячик, который начинает прыгать по ним вниз, к основанию. Мячик может прыгнуть на следующую ступеньку, на ступеньку через одну.
- Требуется определить число всевозможных "маршрутов" мячика с вершины на землю.
  
- Где встречались эти задачи?
- Связь задач динамического программирования и рекуррентных соотношений.
- Что общего в этих задачах?

# Что общего в этих задачах?

- Последовательность Фибоначчи возникает при решении всех этих на первый взгляд несвязанных задач.
- Можно получить это соотношение отдельно для каждой задачи, а можно установить соответствие между решениями этих задач.
- Используя эти задачи можно вывести соотношение для вычисления  $F(n)$

$$F(n) = C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-p+1}^p,$$

# РС порядка $k$ .

## □ Опр.1

Мы будем говорить, что рекуррентное соотношение имеет порядок  $k$ , если оно позволяет выразить  $f(n+k)$  через  $f(n)$ ,  $f(n+1)$ , ...,  $f(n+k-1)$ . Например,

$$f(n+2) = f(n)f(n+1) - 3f^2(n+1) + 1$$

— рекуррентное соотношение второго порядка, а

$$f(n+3) = 6f(n)f(n+2) + f(n+1)$$

— рекуррентное соотношение третьего порядка

## □ Рекуррентное соотношение = РС



# Решение РС

□ Опр.2

Решением рекуррентного соотношения называется последовательность при подстановке которой в соотношение получается тождество.

У одного РС может быть бесконечно много решений.

Для РС порядка  $K$ , мы можем первые  $K-1$  элемент задать произвольно.





# Простой пример

- Назовите какое-нибудь решение РС:  
 $f(n) = 3 * f(n-1)$
  
- Назовите:
  - одно решение;
  - еще два;
  - общий вид решения;
  - А если  $f(1) = 7$ .
  
- А нельзя ли обобщить наше решение на большее число РС?



# Общее решение РС

- Решение РС порядка  $K$  называется общим, если оно зависит от  $K$  произвольных постоянных  $C_1, C_2 \dots C_K$  и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного РС.

# Линейные РС

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \dots + a_k f(n), \quad (22)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — некоторые числа. Такие соотношения называют *линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами*.



# ПЛАНШЕТ

□ ДОК-ВО ДЛЯ  $K=2$



# Решение линейных РС с пост. коэф.

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами, порядок которых больше двух, решаются таким же способом. Пусть соотношение имеет вид

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n). \quad (29)$$

Составляем характеристическое уравнение

$$r^k = a_1 r^{k-1} + \dots + a_k.$$

Если все корни  $r_1, \dots, r_k$  этого алгебраического уравнения  $k$ -й степени различны, то общее решение соотношения (29) имеет вид

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \dots + C_k r_k^{n-1}.$$

Если же, например,  $r_1 = r_2 = \dots = r_s$ , то этому корню соответствуют решения

$$f_1(n) = r_1^{n-1}, \quad f_2(n) = n r_1^{n-1}, \quad f_3(n) = n^2 r_1^{n-1}, \dots, \quad f_s(n) = n^{s-1} r_1^{n-1}$$

рекуррентного соотношения (29). В общем решении этому корню соответствует часть

$$r_1^{n-1} [C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \dots + C_s n^{s-1}].$$



# ПЛАНШЕТ

- Разбор примеров
  - числа Фибоначчи
  - $S_{179}$  ур 4 порядка
  - 418а,з