# Рекуррентные соотношения

Федотова Наталья Петровна

# $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

- В 1202 году вышла книга "Liber Abaci" итальянского ученого Леона́рдо Пиза́нского (прозв. Фибоначчи), где он описал знаменитое рекуррентное соотношение
  $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

- Почему же это соотношение такое известное?
- Рассмотрим три задачи.

# Задача о кроликах

- *Пусть в огороженном месте имеется пара кроликов (самка и самец) в первый день января. Эта пара кроликов производит новую пару кроликов (самку и самца) в первый день февраля и затем в первый день каждого следующего месяца. Каждая новорожденная пара кроликов становится зрелой уже через месяц и затем через месяц дает жизнь новой паре кроликов.*
- *Сколько пар кроликов будет в огороженном месте через год, то есть через 12 месяцев с начала размножения?*

# Задача о последовательностях

- Требуется подсчитать количество последовательностей длины N , состоящих из 0 и 1, в которых никакие две единицы не стоят рядом.

# Задача о мячике на лесенке

- На вершине лесенки, содержащей *N* ступенек, находится мячик, который начинает прыгать по ним вниз, к основанию. Мячик может прыгнуть на следующую ступеньку, на ступеньку через одну.
- Требуется определить число всевозможных "маршрутов" мячика с вершины на землю.

- Где встречались эти задачи?
- Связь задач динамического программирования и рекуррентных соотношений.
- Что общего в этих задачах?

# Что общего в этих задачах?

- Последовательность Фибоначчи возникает при решении всех этих на первый взгляд несвязанных задач.
- Можно получить это соотношение отдельно для каждой задачи, а можно установить соответствие между решениями этих задач.
- Используя эти задачи можно вывести соотношение для вычисления F(n)

$$F(n) = C_{n+1}^{0} + C_{n}^{1} + C_{n-1}^{2} + \ldots + C_{n-p+1}^{p},$$

# РС порядка k.

- Опр.1

Мы будем говорить, что рекуррентное соотношение имеет порядок $k$, если оно позволяет выразить $f(n+k)$ через $f(n)$, $f(n+1)$, ..., $f(n+k-1)$. Например,

$$f(n+2) = f(n)\, f(n+1) - 3f^2(n+1) + 1$$

— рекуррентное соотношение второго порядка, а

$$f(n+3) = 6f(n)\, f(n+2) + f(n+1)$$

— рекуррентное соотношение третьего порядка.

- Рекуррентное соотношение = РС

# Решение РС

- Опр.2

Решением рекуррентного соотношения называется последовательность при подстановке которой в соотношение получается тождество.

У одного РС может быть бесконечно много решений.

Для РС порядка К, мы можем первые К-1 элемент задать произвольно.

# Простой пример

- Назовите какое-нибудь решение РС:
  $f(n) = 3 * f(n-1)$

- Назовите:
  - одно решение;
  - еще два;
  - общий вид решения;
  - А если $f(1) = 7$.

- А нельзя ли обобщить наше решение на большее число РС?

# Общее решение РС

- Решение РС порядка К называется общим, если оно зависит от К произвольных постоянных $C_1$, $C_2$ … $C_K$ и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного РС.

# Линейные РС

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \ldots + a_k f(n), \qquad (22)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторые числа. Такие соотношения называют *линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами.*

# планшет

- Док-во для K=2

# Решение линейных РС с пост. коэф.

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами, порядок которых больше двух, решаются таким же способом. Пусть соотношение имеет вид

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n). \qquad (29)$$

Составляем характеристическое уравнение

$$r^k = a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Если все корни $r_1, \ldots, r_k$ этого алгебраического уравнения $k$-й степени различны, то общее решение соотношения (29) имеет вид

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \ldots + C_k r_k^{n-1}.$$

Если же, например, $r_1 = r_2 = \ldots = r_s$, то этому корню соответствуют решения

$$f_1(n) = r_1^{n-1}, \quad f_2(n) = n r_1^{n-1}, \quad f_3(n) = n^2 r_1^{n-1}, \quad \ldots, \quad f_s(n) = n^{s-1} r_1^{n-1}$$

рекуррентного соотношения (29). В общем решении этому корню соответствует часть

$$r_1^{n-1}\left[C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_s n^{s-1}\right].$$

# планшет

- Разбор примеров
  - числа Фибоначчи
  - С179 ур 4 порядка
  - 418а,з