

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Уральский государственный экономический университет»  
Институт Менеджмента и информационных технологий  
Кафедра Шахматного искусства и компьютерной математики



**Лекция № 003 по высшей математике**

**Тема: «Определитель (детерминант) квадратной матрицы».**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

**Автор:**  
Старший преподаватель  
Миронов Денис Сергеевич

Екатеринбург  
2019

**Определение 1 (плохое).** Каждой квадратной матрице  $A$  порядка  $n$  ставится в соответствие число, называемое определителем (детерминантом) матрицы  $A$ .

Три вариации обозначения определителя квадратной матрицы  $A$ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A = \nabla .$$



Начнем рассмотрение понятия определителя на примерах матриц разных порядков.

$$n = 1.$$

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

**Пример 1.**  $|-8| = -8.$

$$n = 2.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

**Пример 2.**  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 0 \cdot 1 = 12.$

**Пример 3.** Вычислить:  $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$



**Определение 2.** Минором некоторого элемента  $a_{ij}$  матрицы  $n$ -го порядка называется определитель  $n-1$  порядка, полученный из исходного путем вычеркивания  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца на пересечении которых он находится.

**Пример 4.** Найти миноры  $m_{11}, m_{23}, m_{32}$  матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

1)  $m_{11}$  – вычеркиваем первую строку и первый столбец:

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2)  $m_{23}$  – вычеркиваем вторую строку и третий столбец:

$$m_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2.$$

3)  $m_{32}$  – вычеркиваем третью строку и второй столбец:

$$m_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2.$$

**Вывод:** каждый элемент матрицы имеет свой минор, таким образом у матрицы 3-го порядка 9 миноров, а у матрицы 4-го порядка...

**Определение 3.** Алгебраическим дополнением элемента  $a_{ij}$  матрицы  $n$ -го порядка называется выражение вида:

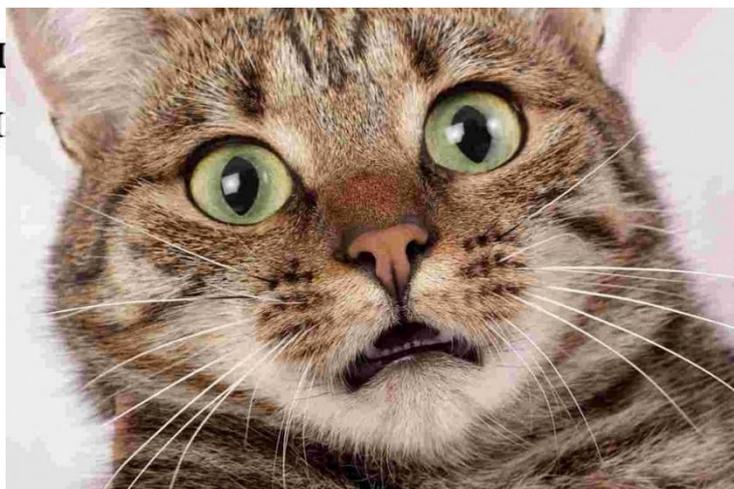
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}.$$

**Определение 4.** Определителем (детерминантом) квадратной матрицы  $A$  называется сумма произведений элементов произвольного ряда на соответствующее алгебраическое дополнение.

Например, формула вычисления определителя по первой строке:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot A_{1j} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot m_{1j}.$$

Таким образом  
любой строке или л



быть вычислен по  
ытат не изменится.

**Пример 5.** Вычислить: 
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Сразу изобразим матрицу знакового чередования алгебраического дополнения:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

1) Вычислим «по классике» по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (0 - 0) + 1 \cdot (4 - 12) = -8$$

2) Вычислим по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (0 - 2) + 4 \cdot (0 - 3) - 0 \cdot (6 - 6) = -8$$

3) Вычислим «с хитрым лицом» по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 12) - 0 + 0 = -8$$



Вернемся к формуле определителя второго порядка:

1) Раскроем по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} .$$

2) Раскроем по первому столбцу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} .$$

3) Раскроем по второй строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot a_{12} + a_{22} \cdot a_{11} .$$

4) Раскроем по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{12} \cdot a_{21} + a_{22} \cdot a_{11} .$$

## Свойства определителей (на примере 2 и 3-го порядков):

1) При перестановке местами двух параллельных строк определитель меняет свой знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4. \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4.$$

2) Определитель, имеющий два одинаковых ряда равен 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 = 0.$$

3) Если элементы одного ряда соответственно пропорциональны элементам другого ряда их определитель равен 0.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 = 0.$$

4) При внесении скаляра в определитель, на это число умножаются все элементы только одной строки или только одного столбца, причем неважно какого.

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

**Домашнее задание.** Посчитать определители левой и правой части равенства, убедиться в его достоверности.

## **Элементарные преобразования над определителями:**

- 1) К элементам строки можно добавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.
- 2) Элементы строки можно умножить на любое отличное от нуля число, при этом конечный результат умножается на это число (следствие свойства 4).
- 3) При перестановке местами двух строк знак определителя меняется на противоположный.



**На сегодня всё. Спасибо за внимание.**

*Надеюсь Вам понравилось, я старался!*

*«Знание только тогда знание,  
когда оно приобретено усилиями  
своей мысли, а не памятью».*

***Л. Толстой***

