Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Уральский государственный экономический университет»
Институт Менеджмента и информационных технологий
Кафедра Шахматного искусства и компьютерной математики

Лекция № 003 по высшей математике

Тема: «Определитель (детерминант) квадратной матрицы».

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Автор:
Старший преподаватель
Миронов Денис Сергеевич

Екатеринбург
2019

Определение 1 (плохое). Каждой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие число, называемое определителем (детерминантом) матрицы А.

Три вариации обозначения определителя квадратной матрицы А:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A = \nabla .$$

Начнем рассмотрение понятия определителя на примерах матриц разных порядков.

***n* = 1.**

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

Пример 1. $|-8| = -8.$

***n* = 2.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Пример 2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 0 \cdot 1 = 12.$

Пример 3. Вычислить: $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$

Определение 2. Минором некоторого элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель n–1 порядка, полученный из исходного путем вычеркивания i-ой строки и j-го столбца на пересечении которых он находится.

Пример 4. Найти миноры m_{11}, m_{23}, m_{32} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) m_{11} – вычеркиваем первую строку и первый столбец:

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) m_{23} – вычеркиваем вторую строку и третий столбец:

$$m_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2.$$

3) m_{32} – вычеркиваем третью строку и второй столбец:

$$m_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2.$$

Вывод: каждый элемент матрицы имеет свой минор, таким образом у матрицы 3-го порядка 9 миноров, а у матрицы 4-го порядка…

Определение 3. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется выражение вида:

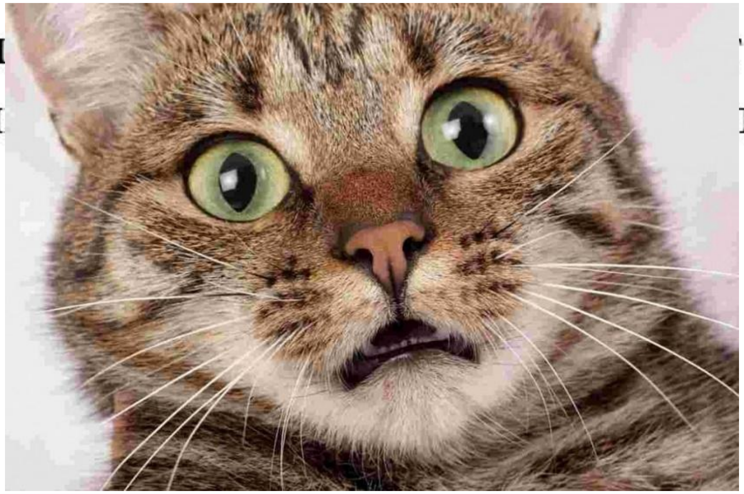
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}\,.$$

Определение 4. Определителем (детерминантом) квадратной матрицы A называется сумма произведений элементов произвольного ряда на соответствующее алгебраическое дополнение.

Например, формула вычисления определителя по первой строке:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot m_{1j}.$$

Таким образом быть вычислен по любой строке или л льтат не изменится.



Пример 5. Вычислить: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$

Сразу изобразим матрицу знакового чередования алгебраического дополнения: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$

1) Вычислим «по классике» по первой строке:

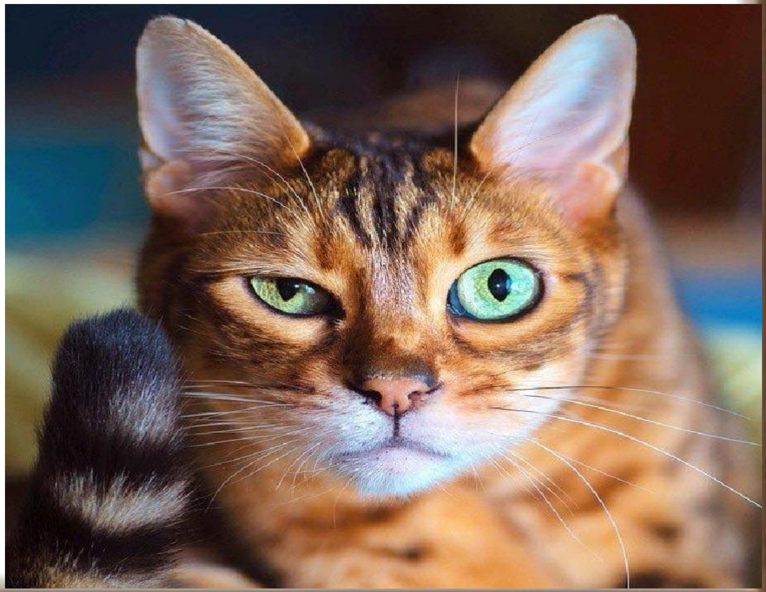
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (0-0) - 2 \cdot (0-0) + 1 \cdot (4-12) = -8$$

2) Вычислим по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(0-2) + 4\cdot(0-3) - 0\cdot(6-6) = -8$$

3) Вычислим «с хитрым лицом» по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0\left|\;\right| + 0\left|\;\right| = 1\cdot(4-12) - 0 + 0 = -8$$



Вернемся к формуле определителя второго порядка:

1) Раскроем по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

2) Раскроем по первому столбцу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

3) Раскроем по второй строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot a_{12} + a_{22} \cdot a_{11}.$$

4) Раскроем по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{12} \cdot a_{21} + a_{22} \cdot a_{11}.$$

Свойства определителей (на примере 2 и 3-го порядков):

1) При перестановке местами двух параллельных строк определитель меняет свой знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4. \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4.$$

2) Определитель, имеющий два одинаковых ряда равен 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 = 0.$$

3) Если элементы одного ряда соответственно пропорциональны элементам другого ряда их определитель равен 0.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} \, \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} \, \end{vmatrix} = (-1)\cdot 0 = 0.$$

4) При внесении скаляра в определитель, на это число умножаются все элементы только одной строки или только одного столбца, причем неважно какого.

$$2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

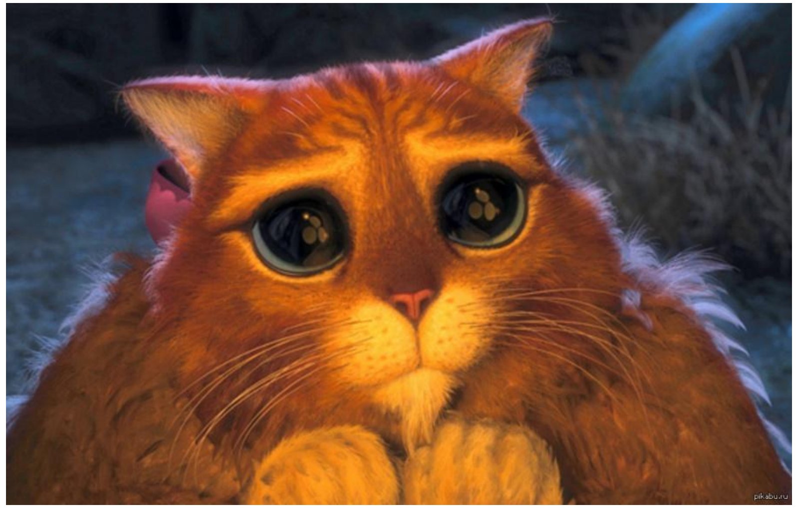
Домашнее задание. Посчитать определители левой и правой части равенства, убедиться в его достоверности.

Элементарные преобразования над определителями:

1) К элементам строки можно добавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

2) Элементы строки можно умножить на любое отличное от нуля число, при этом конечный результат умножается на это число (следствие свойства 4).

3) При перестановке местами двух строк знак определителя меняется на противоположный.



На сегодня всё. Спасибо за внимание.

Надеюсь Вам понравилось, я старался!

«Знание только тогда знание, когда оно приобретено усилиями своей мысли, а не памятью».

Л. Толстой