Элементы теории фредгольмовых отображений

https://vk.com/fredholm

1. Линейные пространства

Пусть E — множество элементов и для любых элементов $x, y \in E$ и вещественных или комплексных чисел λ определены две операции:

1. $\lambda\, x \in E$; 2. $x + y \in E$.

Предполагается, что при этом выполняются следующие аксиомы:

1. $x + y = y + x$,
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$,
3. $\lambda\,(x + y) = \lambda\, x + \lambda\, y$,
4. $(\lambda + \mu)\, x = \lambda\, x + \mu\, x$,
5. $\lambda\,(\mu\, x) = (\lambda\, \mu)\, x$,
6. $1\, x = x$,
7. $(\exists$ нулевой элемент $\Theta \in E)\,[0\, x = \Theta]$.

В таком случае множество E называется *линейным пространством* (сокращенно – ЛП). Если числа λ только вещественные, то E называется *вещественным* линейным пространством. Если же числа λ могут быть комплексными, то E называется *комплексным* линейным пространством.

Для $x \in E$ – ЛП определим элемент $-x = (-1)\, x \in E$, и для $x, y \in E$ определим элемент $x - y = x + (-y) \in E$.

Укажем некоторые простейшие свойства, следующие из аксиом линейного пространства.

а) $(\forall x \in E)\,[\,x + \Theta = x\,]$.

б) *Нулевой элемент единственный.*

в) $(\forall x \in E)\,[\,x + (-x) = \Theta\,]$.

г) $(\forall x \in E)\,[\,-(-x) = x\,]$.

д) $(\forall x, y \in E)(\forall \lambda, \mu)\,[\,(\lambda\,(x - y) = \lambda\,x - \lambda\,y) \wedge (\,(\lambda - \mu)\,x = \lambda\,x - \mu\,x)\,]$.

е) $(\forall x, y, z \in E)\,[\,(x + y = z) \longleftrightarrow (x = z - y)\,]$.

ж) $(\forall x, y \in E)\,[\,(x - y = \Theta) \to (x = y)\,]$.

з) $(\forall \lambda)[\,\lambda\Theta = \Theta\,]$.

и) $(\lambda\,x = \Theta) \to [\,(\lambda = 0) \vee (x = \Theta)\,]$.

к) $(\lambda\,x = \lambda\,y) \to [\,(\lambda = 0) \vee (x = y)\,]$.

л) $(\lambda\,x = \mu\,x) \to [\,(\lambda = \mu) \vee (x = \Theta)\,]$.

Доказательство этих свойств рекомендуется провести самостоятельно.

Примеры линейных пространств.

1. $\mathbb{R}^1$ (либо $\mathbb{C}^1$) с обычными операциями умножения и сложения вещественных (комплексных) чисел.

2. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}^1 \, (i = \overline{1,n})\}$ (либо соответственно $\mathbb{C}^n$), где действия умножения на число и сложение элементов проводятся покоординатно: $\lambda\, x = (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, ..., \lambda\, x_n)$ и $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

3. $C[a,b]$ – непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, где операции умножения на число и сложения проводятся пототечно:

$(\lambda\, x)(t) = \lambda\, x(t)$ и $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$.

4. $C^k[a,b]$, где $k \in \mathbb{N}$, – множество k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций с операциями умножения и сложения, как в $C[a,b]$.

Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ – ЛП называются *линейно независимыми*, если из того, что $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = \Theta$ следует, что $(\forall\, k = \overline{1, n})\,[c_k = 0]$. Заметим, что если элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независимы, то $(\forall\, k = \overline{1, n})\,[\,x_k \neq \Theta\,]$.

Система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ – ЛП называется *линейно зависимой*, если существует набор чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, среди которых есть отличные от нуля, и $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = \Theta$.

Если для элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ – ЛП выполняется, например, равенство $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k$, то говорят, что элемент x_n есть *линейная комбинация* элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Бесконечное множество элементов в линейном пространстве называется линейно независимым в том случае, если линейно независимо всякое конечное подмножество элементов этого множества.

Непустое множество $L \subset E$ – ЛП называется *линейным многообразием* (обозначение – ЛМ), если $(\forall\lambda)(\forall x, y \in L)\,[\,(\lambda\, x \in L) \wedge (x + y \in L)\,]$.

Заметим, что для любого L – ЛМ в E – ЛП выполняется $\Theta \in L$.

Пусть даны элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ – ЛП. Определим множество $\mathcal{L} = \{\sum_{k=1}^{n} c_k x_k \,|\, c_k - \text{числа}\}$. Очевидно, что $\mathcal{L}$ – ЛМ, которое называется линейным многообразием, порожденным элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, или *линейной оболочкой* этих элементов. Обозначают $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Линейное многообразие L в E – ЛП называется *конечномерным*, если $(\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in L)\,[\, L = \mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$. Если при этом выделенные элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независимы, то они называются *базисом* линейного многообразия, а число n называют *размерностью* L – ЛМ, что обозначается $\dim L = n$.

Пусть $L = \mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – базис в L. Если $x \in L$, то $x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$. Числа $c_1, c_2, ..., c_n$ называются *координатами* элемента x в базисе $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Легко видеть, что координаты элемента в заданном базисе определяются однозначно.

Если L – ЛМ такое, что в нем для любого $n \in \mathbb{N}$ существует n линейно независимых элементов, то L называют *бесконечномерным* линейным многообразием, что обозначается $\dim L = \infty$.

Замечание. Если E – ЛП, то можно считать, что E – ЛМ в E. Поэтому все определения и понятия, связанные с линейными многообразиями, справедливы и в отношении к линейным пространствам.

Пусть E – ЛП и $L_1, L_2, ..., L_n$ – линейные многообразия в E. Предположим, что всякий $x \in E$ однозначно представим в виде $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$, где элементы $x_i \in L_i$ $(i = \overline{1, n})$. В таком случае E – ЛП называют *прямой суммой* линейных многообразий $L_1, L_2, ..., L_n$. При этом используют обозначения

$$E = L_1 \bigoplus L_2 \bigoplus ... \bigoplus L_n = \sum_{i=1}^{n} \bigoplus L_i.$$

2. Нормированные пространства

Линейное пространство E называется линейным *нормированным* пространством (сокращенно – ЛНП), если для любого $x \in E$ определено вещественное число, обозначаемое $\|x\|$, такое, что для всех $x, y \in E$ и всех чисел λ (вещественных или комплексных) выполняются следующие аксиомы:

1) $\|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0 \longleftrightarrow x = \Theta\,;$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|\,;$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\,.$

При этом, число $\|x\|$ называется нормой элемента $x \in E$.

E – ЛНП называют *вещественным (комплексным)*, если соответствующее E – ЛП вещественное (комплексное).

В E – ЛНП можно определить метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$. При этом, выполнение аксиом метрики следует из аксиом нормы. Таким образом, на нормированные пространства переносятся все свойства и утверждения, установленные ранее для метрических пространств.

Отметим два новых свойства определенной выше метрики:

a) $\rho(x, y) = \rho(x + z,\, y + z)$ – инвариантность относительно сдвига;

b) $\rho(\lambda x,\, \lambda y) = |\lambda|\, \rho(x, y)$ – положительная однородность.

Нетрудно показать, что любая метрика на линейном пространстве, обладающая свойствами a) и b), порождена некоторой нормой.

Сходимость последовательности $\{x_n\} \subset E$ – ЛНП к элементу $x \in E$ по определенной выше метрике, а именно $\rho(x_n, x) = \|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, называется *сходимостью по норме* пространства E.

Отметим некоторые ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА в ЛНП:

1) $\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \le \|x - y\|$;

2) $(x_n \to x) \longrightarrow (\|x_n\| \to \|x\|)$;

3) $(x_n \to x) \wedge (\lambda_n \to \lambda) \longrightarrow (\lambda_n x_n \to \lambda x)$;

4) $(x_n \to x) \wedge (y_n \to y) \longrightarrow (x_n + y_n \to x + y)$.

Линейное многообразие $L \subset E$ – ЛНП называется *подпространством* E, если L замкнуто в E.

Нормированное пространство, полное в смысле сходимости по норме, называется *банаховым* пространством.

Примеры нормированных пространств.

1. $\mathbb{R}^1$ – множество вещественных чисел (либо $\mathbb{C}^1$ – множество комплексных чисел) с нормой $\|x\| = |x|$.

2. $\mathbb{R}^n_p$, где $1 \le p < \infty$, – множество n-мерных векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с вещественными координатами (либо $\mathbb{C}^n_p$ – множество n-мерных векторов с комплексными координатами) с нормой $\|x\| = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$.

3. $\mathbb{R}^n_\infty$ – множество n-мерных векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с вещественными координатами (либо $\mathbb{C}^n_\infty$ – множество n-мерных векторов с комплексными координатами) с нормой $\|x\| = \max_{1\le k\le n} |x_k|$.

4. $C[a, b]$ – множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|.$$

5. $C_1[a, b]$ – множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\, dt.$$

6. $C^k[a, b]$, где $k \in \mathbb{N}$, – множество k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)| + \max_{a\le t\le b} |x'(t)| + \ldots + \max_{a\le t\le b} |x^{(k)}(t)|.$$

Обратим внимание, что все указанные здесь линейные нормированные пространства, кроме $C_1[a, b]$, являются банаховыми.

Фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства

(напоминание из теории метрических пространств)

Пусть $\{X, \rho\}$ – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *фундаментальной*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N)[\,\rho(x_n, x_m) < \varepsilon\,]$$

или, что то же самое,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall p \geq 0)[\,\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon\,].$$

Очевидно, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Обратное утверждение неверно. В качестве примера рассмотрим множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Последовательность рациональных чисел $x_n = (1 + 1/n)^n$ является фундаментальной, но не сходится в пространстве $\mathbb{Q}$.

Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность в нем сходится. Соответственно, метрическое пространство называется *неполным*, если в нем существует фундаментальная последовательность, которая не сходится.

Простейшим примером полного пространства является пространство вещественных чисел $\mathbb{R}^1$ с метрикой $\rho(x,y) = |x-y|$. Связано это с тем, что свойство фундаментальности числовой последовательности означает необходимое и достаточное условие (критерий Коши) сходимости этой последовательности. Пространство же рациональных чисел $\mathbb{Q}$, с той же метрикой $\rho(x,y) = |x-y|$, является неполным.

3. Относительно компактные множества в нормированных пространствах

Множество M в линейном нормированном пр-ве E называется *относительно компактным* или предкомпактным, если из любой последовательности элементов $\{x_n\} \subset M$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, которая сходится в E.

Множество M в линейном нормированном пр-ве E называется *компактным*, если оно относительно компактно и замкнуто.

Относительная компактность в $\mathbb{R}_p^n$ $(1 \le p < \infty)$.

Теорема 1. *Множество $M \subset \mathbb{R}_p^n$ относительно компактно тогда и только тогда, когда это множество в $\mathbb{R}_p^n$ ограничено.*

Относительная компактность в $C[a,b]$.

Пусть множество $M = \{x(t)\} \subset C[a,b]$. *Ограниченность* M означает, что

$$(\exists K \ge 0)(\forall x \in M)(\forall t \in [a,b])[\,|x(t)| \le K\,].$$

Множество M называется *равностепенно непрерывным*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall t_1, t_2 \in [a,b])[(|t_1 - t_2| < \delta) \to (|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon)].$$

Теорема Арцела. *Множество $M \subset C[a,b]$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Теорема 3. *Всякое ограниченное множество в E – ЛНП относительно компактно тогда и только тогда, когда пространство E конечномерно.*

4. Пространства со скалярным произведением

Пусть H — вещественное (комплексное) линейное пространство. Говорят, что в H задано скалярное произведение, если для любых двух элементов x, y из H определено вещественное (комплексное) число (x, y), удовлетворяющее для $x, y, z \in H$ и чисел λ следующим аксиомам:

1. $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \longleftrightarrow x = \Theta$;
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где черта сверху означает комплексное сопряжение;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Число (x, y) в этом случае называется *скалярным произведением* элементов x и y, а само пространство H называется *пространством со скалярным произведением* (обозначение – ПСП).

Укажем некоторые простейшие свойства, следующие из аксиом скалярного произведения. Для $x, y, z \in H$ и чисел λ выполняется:

а) $(\Theta, x) = 0$; б) $(x, \lambda\, y) = \overline{\lambda}\,(x, y)$; в) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

Лемма. *В H – ПСП выполняется неравенство Коши-Буняковского*

$$(\forall x, y \in H)\ \left[\,|(x, y)|^2 \le (x, x)\,(y, y)\,\right].$$

Определим в H – ПСП норму $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Первые две аксиомы нормы выполняются очевидным образом. Третья аксиома нормы следует из неравенства Коши-Буняковского.

Если H – ПСП является полным по норме, порожденной скалярным произведением, то пространство H называется *гильбертовым* (обозначение – ГП).

Примеры пространств со скалярным произведением.

1. $\mathbb{R}_2^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}^1\}$, где скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$.

2. $\mathbb{C}_2^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{C}^1\}$, где скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$.

3. l_2 – пространство числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$, суммируемых со второй степенью. Если пространство l_2 вещественное, то есть координаты $x_i \in \mathbb{R}^1$, то скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$. Если же пространство l_2 комплексное, то есть координаты $x_i \in \mathbb{C}^1$, то скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^\infty x_k \overline{y_k}$.

4. $C_2[a, b]$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, где скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$.

Обратим внимание, что в примерах 1 – 3 соответствующие пространства являются полными по нормам, которые порождаются скалярными произведениями, то есть это гильбертовы пространства. В 4-ом примере соответствующее пространство не является полным.

Литература

1. Смагин В.В. Метрические пространства. Учебное пособие

2. Смагин В.В. Линейные нормированные пространства. Учебное пособие

https://vk.com/fredholm