

Элементы теории фредгольмовых отображений

<https://vk.com/fredholm>

1. Линейные пространства

Пусть E — множество элементов и для любых элементов $x, y \in E$ и вещественных или комплексных чисел λ определены две операции:

$$1. \lambda x \in E; \quad 2. x + y \in E.$$

Предполагается, что при этом выполняются следующие аксиомы:

$$\begin{array}{ll} 1. x + y = y + x, & 2. x + (y + z) = (x + y) + z, \\ 3. \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, & 4. (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \\ 5. \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, & 6. 1x = x, \\ 7. (\exists \text{ нулевой элемент } \Theta \in E) [0x = \Theta]. \end{array}$$

В таком случае множество E называется *линейным пространством* (сокращенно — ЛП). Если числа λ только вещественные, то E называется *вещественным* линейным пространством. Если же числа λ могут быть комплексными, то E называется *комплексным* линейным пространством.

Для $x \in E$ — ЛП определим элемент $-x = (-1)x \in E$, и для $x, y \in E$ определим элемент $x - y = x + (-y) \in E$.

Укажем некоторые простейшие свойства, следующие из аксиом линейного пространства.

а) $(\forall x \in E) [x + \Theta = x]$.

б) *Нулевой элемент единственный.*

в) $(\forall x \in E) [x + (-x) = \Theta]$.

г) $(\forall x \in E) [-(-x) = x]$.

д) $(\forall x, y \in E)(\forall \lambda, \mu) [(\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y) \wedge ((\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x)]$.

е) $(\forall x, y, z \in E) [(x + y = z) \longleftrightarrow (x = z - y)]$.

ж) $(\forall x, y \in E) [(x - y = \Theta) \rightarrow (x = y)]$.

з) $(\forall \lambda)[\lambda\Theta = \Theta]$.

и) $(\lambda x = \Theta) \rightarrow [(\lambda = 0) \vee (x = \Theta)]$.

к) $(\lambda x = \lambda y) \rightarrow [(\lambda = 0) \vee (x = y)]$.

л) $(\lambda x = \mu x) \rightarrow [(\lambda = \mu) \vee (x = \Theta)]$.

Доказательство этих свойств рекомендуется провести самостоятельно.

ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ.

1. \mathbb{R}^1 (либо \mathbb{C}^1) с обычными операциями умножения и сложения вещественных (комплексных) чисел.

2. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^1 (i = \overline{1, n})\}$ (либо соответственно \mathbb{C}^n), где действия умножения на число и сложение элементов проводятся по координатам: $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ и $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

3. $C[a, b]$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, где операции умножения на число и сложения проводятся поточечно:

$$(\lambda x)(t) = \lambda x(t) \text{ и } (x + y)(t) = x(t) + y(t).$$

4. $C^k[a, b]$, где $k \in \mathbb{N}$, – множество k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с операциями умножения и сложения, как в $C[a, b]$.

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ – ЛП называются *линейно независимыми*, если из того, что $\sum_{k=1}^n c_k x_k = \Theta$ следует, что $(\forall k = \overline{1, n}) [c_k = 0]$. Заметим, что если элементы x_1, x_2, \dots, x_n линейно независимы, то $(\forall k = \overline{1, n}) [x_k \neq \Theta]$.

Система элементов $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ – ЛП называется *линейно зависимой*, если существует набор чисел c_1, c_2, \dots, c_n , среди которых есть отличные от нуля, и $\sum_{k=1}^n c_k x_k = \Theta$.

Если для элементов $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ – ЛП выполняется, например, равенство $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k$, то говорят, что элемент x_n есть *линейная комбинация* элементов x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

Бесконечное множество элементов в линейном пространстве называется *линейно независимым* в том случае, если линейно независимо всякое конечное подмножество элементов этого множества.

Непустое множество $L \subset E$ – ЛП называется *линейным многообразием* (обозначение – ЛМ), если $(\forall \lambda)(\forall x, y \in L) [(\lambda x \in L) \wedge (x + y \in L)]$.

Заметим, что для любого L – ЛМ в E – ЛП выполняется $\Theta \in L$.

Пусть даны элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ – ЛП. Определим множество $\mathcal{L} = \{\sum_{k=1}^n c_k x_k \mid c_k \text{ — числа}\}$. Очевидно, что \mathcal{L} – ЛМ, которое называется *линейным многообразием*, порожденным элементами x_1, x_2, \dots, x_n , или *линейной оболочкой* этих элементов. Обозначают $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Линейное многообразие L в E – ЛП называется *конечномерным*, если $(\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in L) [L = \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n)]$. Если при этом выделенные элементы x_1, x_2, \dots, x_n линейно независимы, то они называются *базисом* линейного многообразия, а число n называют *размерностью* L – ЛМ, что обозначается $\dim L = n$.

Пусть $L = \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – базис в L . Если $x \in L$, то $x = \sum_{k=1}^n c_k x_k$. Числа c_1, c_2, \dots, c_n называются *координатами* элемента x в базисе $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Легко видеть, что координаты элемента в заданном базисе определяются однозначно.

Если L – ЛМ такое, что в нем для любого $n \in \mathbb{N}$ существует n линейно независимых элементов, то L называют *бесконечномерным* линейным многообразием, что обозначается $\dim L = \infty$.

Замечание. Если E – ЛП, то можно считать, что E – ЛМ в E . Поэтому все определения и понятия, связанные с линейными многообразиями, справедливы и в отношении к линейным пространствам.

Пусть E – ЛП и L_1, L_2, \dots, L_n – линейные многообразия в E . Предположим, что всякий $x \in E$ однозначно представим в виде $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, где элементы $x_i \in L_i$ ($i = \overline{1, n}$). В таком случае E – ЛП называют *прямой суммой* линейных многообразий L_1, L_2, \dots, L_n . При этом используют обозначения

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n = \sum_{i=1}^n \oplus L_i.$$

2. Нормированные пространства

Линейное пространство E называется линейным *нормированным* пространством (сокращенно – ЛНП), если для любого $x \in E$ определено вещественное число, обозначаемое $\|x\|$, такое, что для всех $x, y \in E$ и всех чисел λ (вещественных или комплексных) выполняются следующие аксиомы:

- 1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = \Theta$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

При этом, число $\|x\|$ называется нормой элемента $x \in E$.

E – ЛНП называют *вещественным* (*комплексным*), если соответствующее E – ЛП вещественное (комплексное).

В E – ЛНП можно определить метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$. При этом, выполнение аксиом метрики следует из аксиом нормы. Таким образом, на нормированные пространства переносятся все свойства и утверждения, установленные ранее для метрических пространств.

Отметим два новых свойства определенной выше метрики:

- a) $\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$ – инвариантность относительно сдвига;
- b) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$ – положительная однородность.

Нетрудно показать, что любая метрика на линейном пространстве, обладающая свойствами a) и b), порождена некоторой нормой.

Сходимость последовательности $\{x_n\} \subset E$ – ЛНП к элементу $x \in E$ по определенной выше метрике, а именно $\rho(x_n, x) = \|x_n - x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, называется *сходимостью по норме* пространства E .

Отметим некоторые ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА в ЛНП:

$$1) \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|;$$

$$2) \quad (x_n \rightarrow x) \longrightarrow (\|x_n\| \rightarrow \|x\|);$$

$$3) \quad (x_n \rightarrow x) \wedge (\lambda_n \rightarrow \lambda) \longrightarrow (\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x);$$

$$4) \quad (x_n \rightarrow x) \wedge (y_n \rightarrow y) \longrightarrow (x_n + y_n \rightarrow x + y).$$

Линейное многообразие $L \subset E$ – ЛНП называется *подпространством* E , если L замкнуто в E .

Нормированное пространство, полное в смысле сходимости по норме, называется *банаховым* пространством.

ПРИМЕРЫ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ.

1. \mathbb{R}^1 – множество вещественных чисел (либо \mathbb{C}^1 – множество комплексных чисел) с нормой $\|x\| = |x|$.

2. \mathbb{R}_p^n , где $1 \leq p < \infty$, – множество n -мерных векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с вещественными координатами (либо \mathbb{C}_n^n – множество n -мерных векторов с комплексными координатами) с нормой $\|x\| = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$.

3. \mathbb{R}_∞^n – множество n -мерных векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с вещественными координатами (либо \mathbb{C}_∞^n – множество n -мерных векторов с комплексными координатами) с нормой $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

4. $C[a, b]$ – множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

5. $C_1[a, b]$ – множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt.$$

6. $C^k[a, b]$, где $k \in \mathbb{N}$, – множество k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| + \dots + \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|.$$

Обратим внимание, что все указанные здесь линейные нормированные пространства, кроме $C_1[a, b]$, являются банаховыми.

Фундаментальные последовательности.

Полные метрические пространства

(напоминание из теории метрических пространств)

Пусть $\{X, \rho\}$ – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *фундаментальной*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N)[\rho(x_n, x_m) < \varepsilon]$$

или, что то же самое,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall p \geq 0)[\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon].$$

Очевидно, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Обратное утверждение неверно. В качестве примера рассмотрим множество рациональных чисел \mathbb{Q} с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Последовательность рациональных чисел $x_n = (1 + 1/n)^n$ является фундаментальной, но не сходится в пространстве \mathbb{Q} .

Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность в нем сходится. Соответственно, метрическое пространство называется *неполным*, если в нем существует фундаментальная последовательность, которая не сходится.

Простейшим примером полного пространства является пространство вещественных чисел \mathbb{R}^1 с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Связано это с тем, что свойство фундаментальности числовой последовательности означает необходимое и достаточное условие (критерий Коши) сходимости этой последовательности. Пространство же рациональных чисел \mathbb{Q} , с той же метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, является неполным.

3. Относительно компактные множества в нормированных пространствах

Множество M в линейном нормированном пр-ве E называется *относительно компактным* или предкомпактным, если из любой последовательности элементов $\{x_n\} \subset M$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, которая сходится в E .

Множество M в линейном нормированном пр-ве E называется *компактным*, если оно относительно компактно и замкнуто.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ КОМПАКТНОСТЬ В \mathbb{R}_p^n ($1 \leq p < \infty$).

ТЕОРЕМА 1. Множество $M \subset \mathbb{R}_p^n$ относительно компактно тогда и только тогда, когда это множество в \mathbb{R}_p^n ограничено.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ КОМПАКТНОСТЬ В $C[a, b]$.

Пусть множество $M = \{x(t)\} \subset C[a, b]$. Ограниченность M означает, что

$$(\exists K \geq 0)(\forall x \in M)(\forall t \in [a, b])[|x(t)| \leq K].$$

Множество M называется *равностепенно непрерывным*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall t_1, t_2 \in [a, b])(|t_1 - t_2| < \delta \rightarrow (|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon)).$$

ТЕОРЕМА АРЦЕЛА. Множество $M \subset C[a, b]$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.

ТЕОРЕМА 3. Всякое ограниченное множество в E – ЛНП относительно компактно тогда и только тогда, когда пространство E конечномерно.

4. Пространства со скалярным произведением

Пусть H — вещественное (комплексное) линейное пространство. Говорят, что в H задано скалярное произведение, если для любых двух элементов x, y из H определено вещественное (комплексное) число (x, y) , удовлетворяющее для $x, y, z \in H$ и чисел λ следующим аксиомам:

1. $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \iff x = \Theta$;
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где черта сверху означает комплексное сопряжение;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Число (x, y) в этом случае называется *скалярным произведением* элементов x и y , а само пространство H называется *пространством со скалярным произведением* (обозначение – ПСП).

Укажем некоторые простейшие свойства, следующие из аксиом скалярного произведения. Для $x, y, z \in H$ и чисел λ выполняется:

$$\text{а) } (\Theta, x) = 0; \quad \text{б) } (x, \lambda y) = \bar{\lambda} (x, y); \quad \text{в) } (x, y + z) = (x, y) + (x, z).$$

ЛЕММА. В H – ПСП выполняется неравенство Коши-Буняковского
 $(\forall x, y \in H) [|(x, y)|^2 \leq (x, x) (y, y)]$.

Определим в H – ПСП норму $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Первые две аксиомы нормы выполняются очевидным образом. Третья аксиома нормы следует из неравенства Коши-Буняковского.

Если H – ПСП является полным по норме, порожденной скалярным произведением, то пространство H называется *гильбертовым* (обозначение – ГП).

ПРИМЕРЫ ПРОСТРАНСТВ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ.

1. $\mathbb{R}_2^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^1\}$, где скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$.

2. $\mathbb{C}_2^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{C}^1\}$, где скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$.

3. l_2 – пространство числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, суммируемых со второй степенью. Если пространство l_2 вещественное, то есть координаты $x_i \in \mathbb{R}^1$, то скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Если же пространство l_2 комплексное, то есть координаты $x_i \in \mathbb{C}^1$, то скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$.

4. $C_2[a, b]$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, где скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt$.

Обратим внимание, что в примерах 1 – 3 соответствующие пространства являются полными по нормам, которые порождаются скалярными произведениями, то есть это гильбертовы пространства. В 4-ом примере соответствующее пространство не является полным.

Литература

1. Смагин В.В. Метрические пространства. Учебное пособие
2. Смагин В.В. Линейные нормированные пространства. Учебное пособие

<https://vk.com/fredholm>