

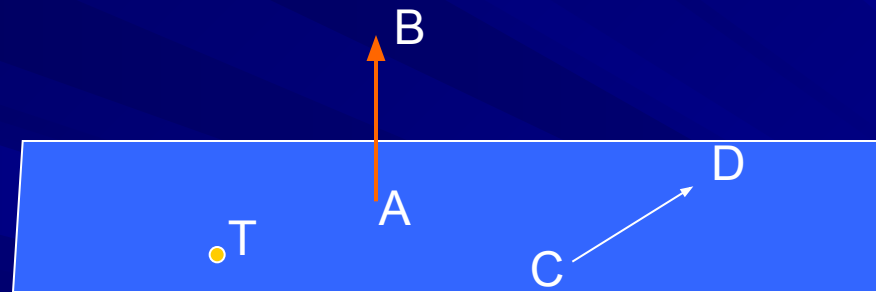
Векторы в пространстве

Содержание

- Понятие Понятие вектора
- Равенство векторов
- Сложение и вычитание векторов
- Сумма нескольких векторов
- Умножение вектора на число
- Компланарные векторы
- Правило параллелепипеда
- Разложение вектора по трем некопланарным векторам
- Математический диктант
- Контрольный тест

Понятие вектора

- Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется **вектором**.

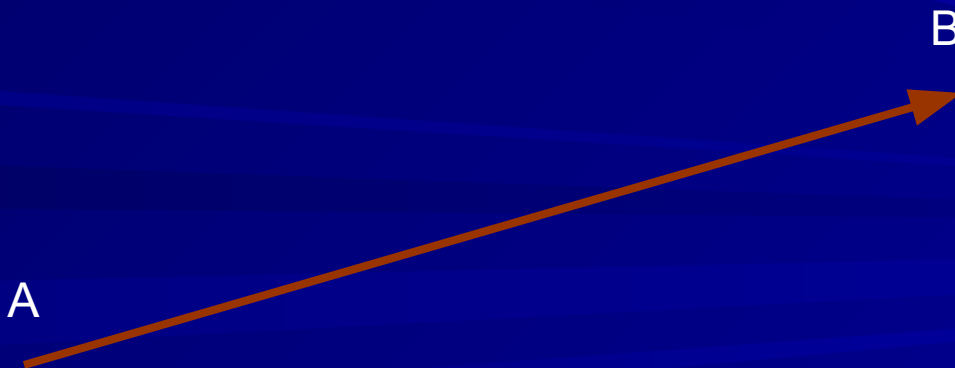


- Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется **нулевым**.

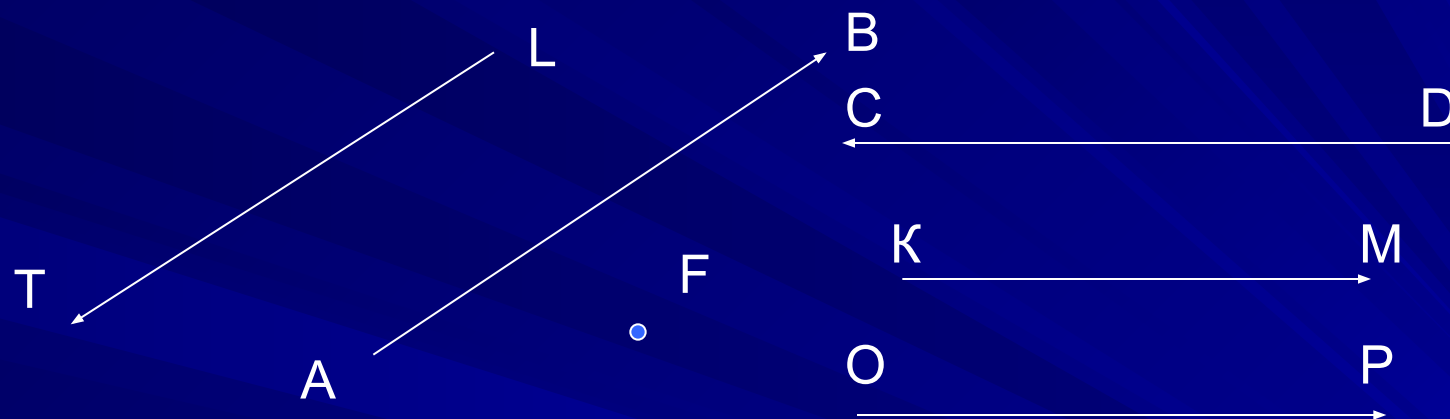
TT – нулевой вектор ($TT = O$)

Длина вектора

- Длиной ненулевого вектора \vec{AB} называется длина отрезка AB.
- Длина вектора \vec{AB} (вектора \vec{a}) обозначается так: $|\vec{AB}|$ ($|\vec{a}|$).
- Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}|=0$



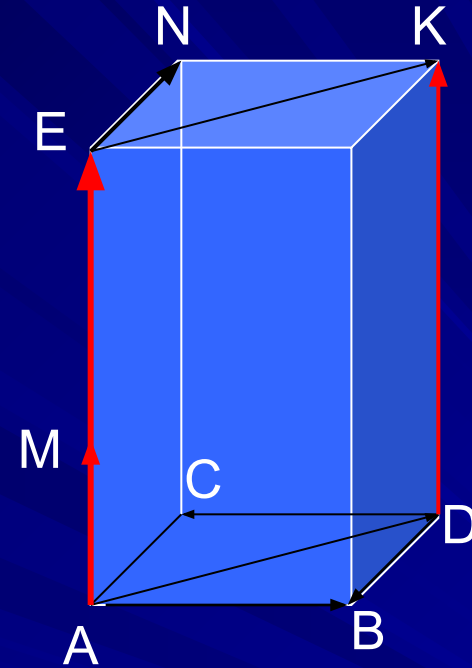
- Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.



- Два ненулевых вектора OP и KM коллинеарны и при этом лучи OP и KM сонаправлены
- Векторы OP и KM называются сонаправленными
- Если лучи не являются сонаправленными, то векторы называются противоположно направленными.
- Нулевой вектор считается сонаправленным с любым вектором.
- $OP \uparrow\uparrow KM$; $CD \uparrow\downarrow KM$; $TL \uparrow\downarrow AB$; $CD \uparrow\downarrow OP$

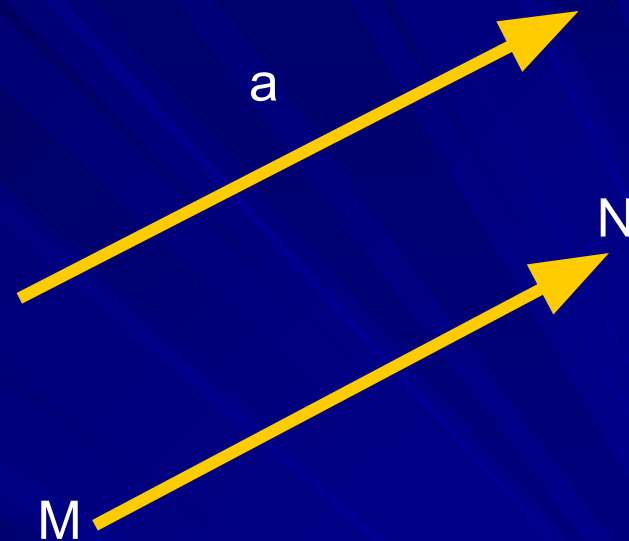
Равенство векторов

- Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны. $\vec{AE} = \vec{DK}$, так как $\vec{AE} \parallel \vec{DK}$ и $|\vec{AE}| = |\vec{DK}|$, а $\vec{AB} \neq \vec{DC}$, так как $\vec{AB} \parallel \vec{DC}$.



- От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Доказательство. В самом деле, пусть \vec{a} – данный вектор, M – данная точка. Проведем через начало и конец вектора \vec{a} и точку M плоскость и в этой плоскости построим вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$. Очевидно, что вектор \overrightarrow{MN} искомый. Из построения ясно также, что \overrightarrow{MN} – единственный вектор с началом M , равный вектору \vec{a} .

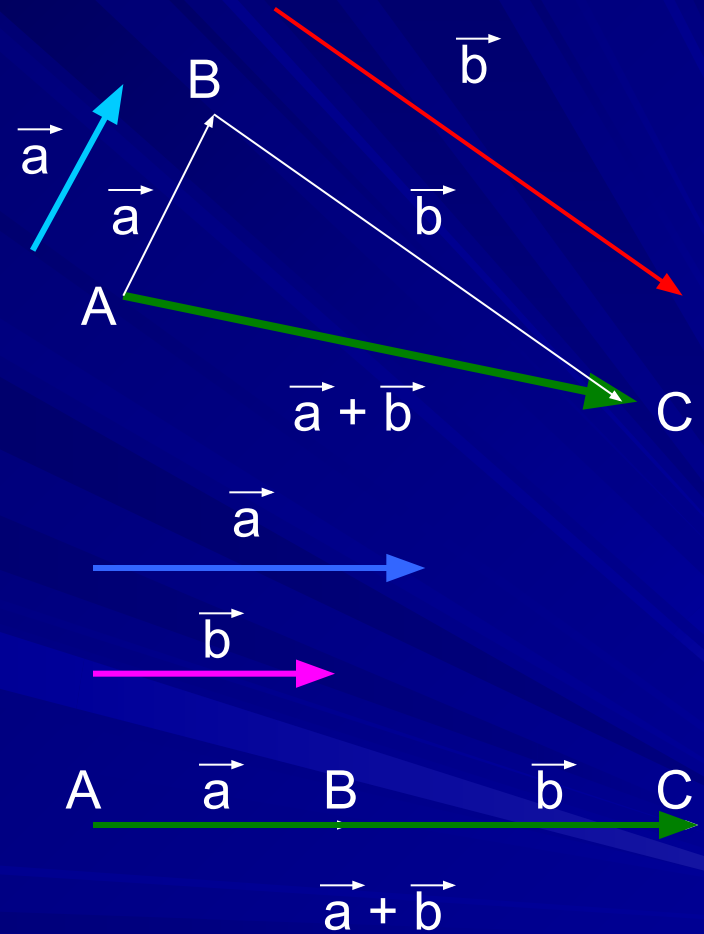


Сложение и вычитание векторов

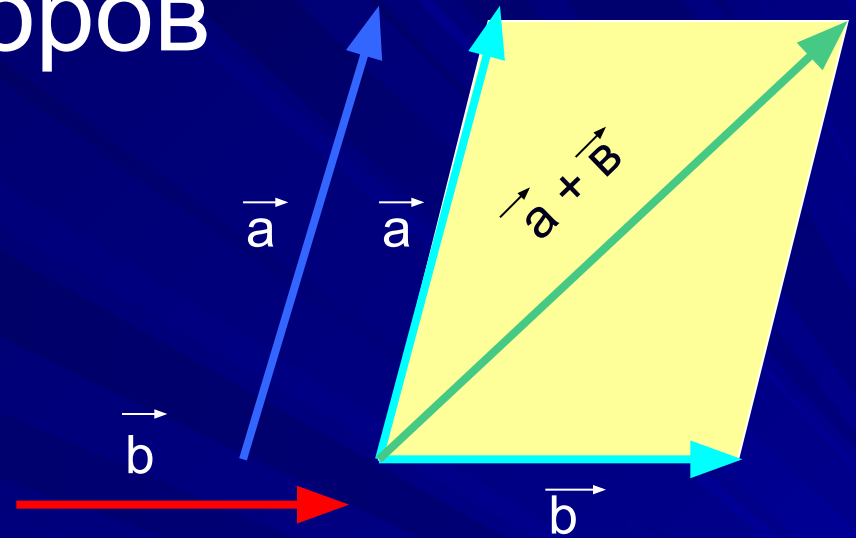
- Правило треугольника.

Для любых трех точек А, В, и С имеет место равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов

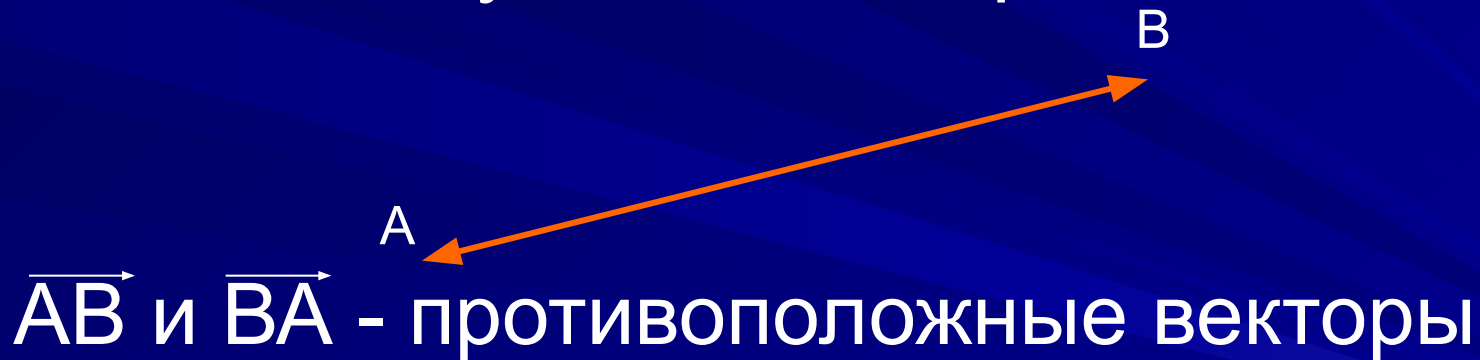


Свойства сложения векторов.

Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} справедливы равенства:

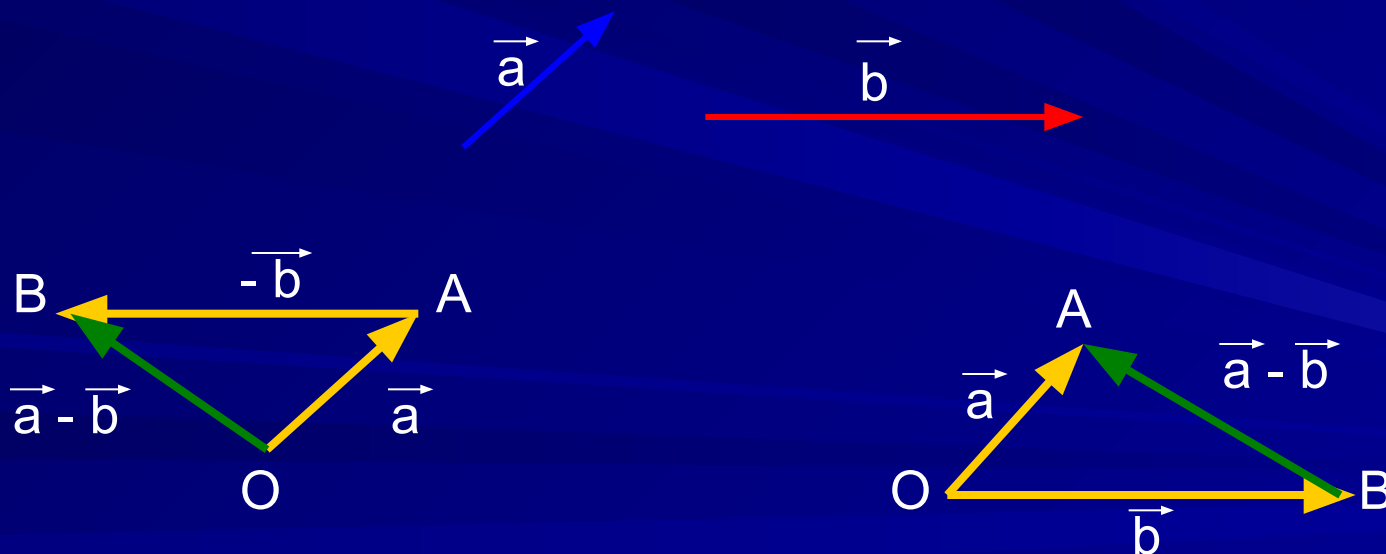
- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон)
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон)

- Два ненулевых вектора называются противоположными, если их длины равны и они противоположно направлены. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор.



- Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор, сумма которого с вектором \vec{b} равна вектору \vec{a} .

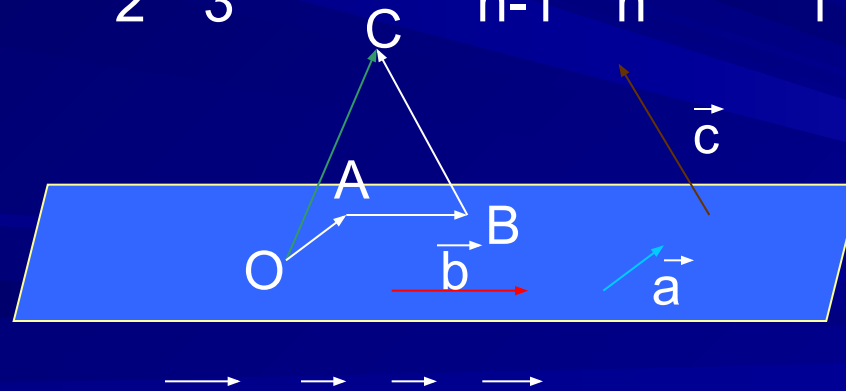
Разность $\vec{a} - \vec{b}$ векторов \vec{a} и \vec{b} можно найти по формуле $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, где $(-\vec{b})$ – вектор, противоположный вектору \vec{b} .



Сумма нескольких векторов

- Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.
- Правило многоугольника.

Если A_1, A_2, \dots, A_n - произвольные точки,
то $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$



Умножение вектора на число

- Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число k называется такой вектор \vec{b} , длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причем векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены при $k > 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{b} = \vec{0}$.

Если $k = 0$, то $\vec{b} = \vec{0}$.

Основные свойства

$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ сочетательный закон

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ I распределительный закон

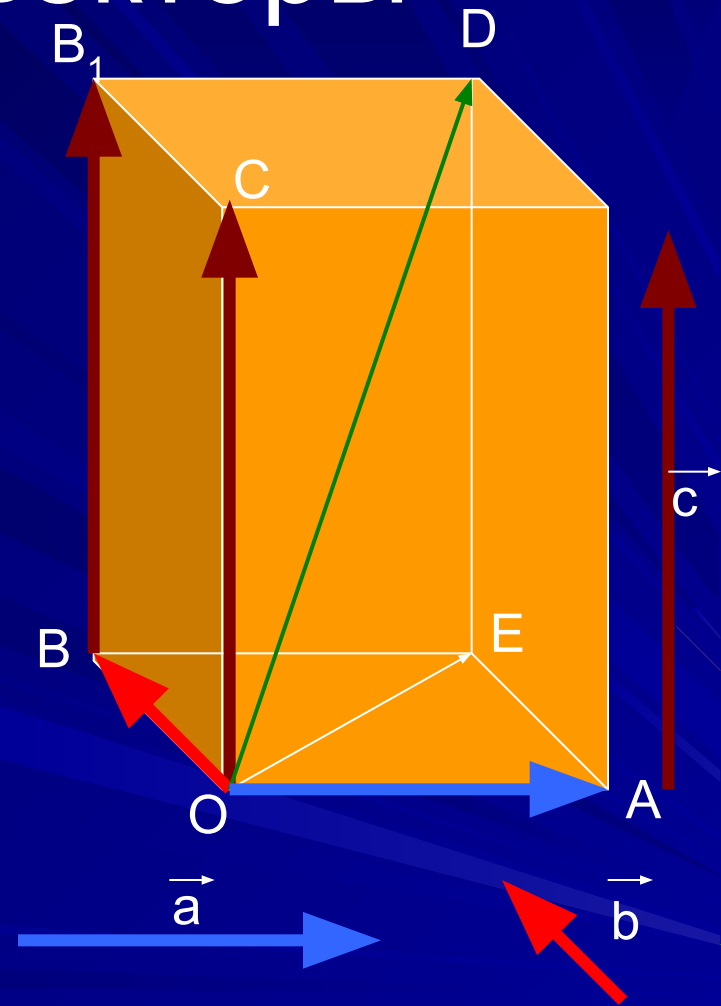
$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ II распределительный закон

Если \vec{a} и \vec{b} коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует k , что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Компланарные векторы

- Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

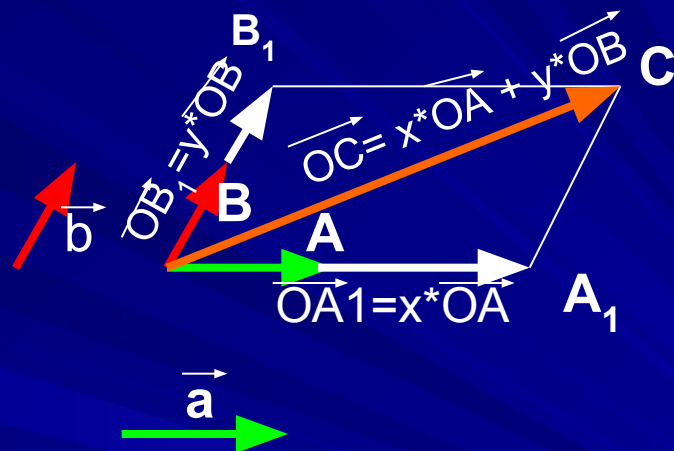
На рисунке векторы $\overrightarrow{BB_1}$, \overrightarrow{OD} и \overrightarrow{OE} компланарны, так как если отложить от точки O вектор, равный $\overrightarrow{BB_1}$, то получится вектор \overrightarrow{OC} , а векторы \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OD} и \overrightarrow{OE} лежат в одной плоскости OCE . Векторы \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} и \overrightarrow{OC} не компланарны, так как вектор \overrightarrow{OC} не лежит в плоскости OAB .



Признак копланарности трех векторов

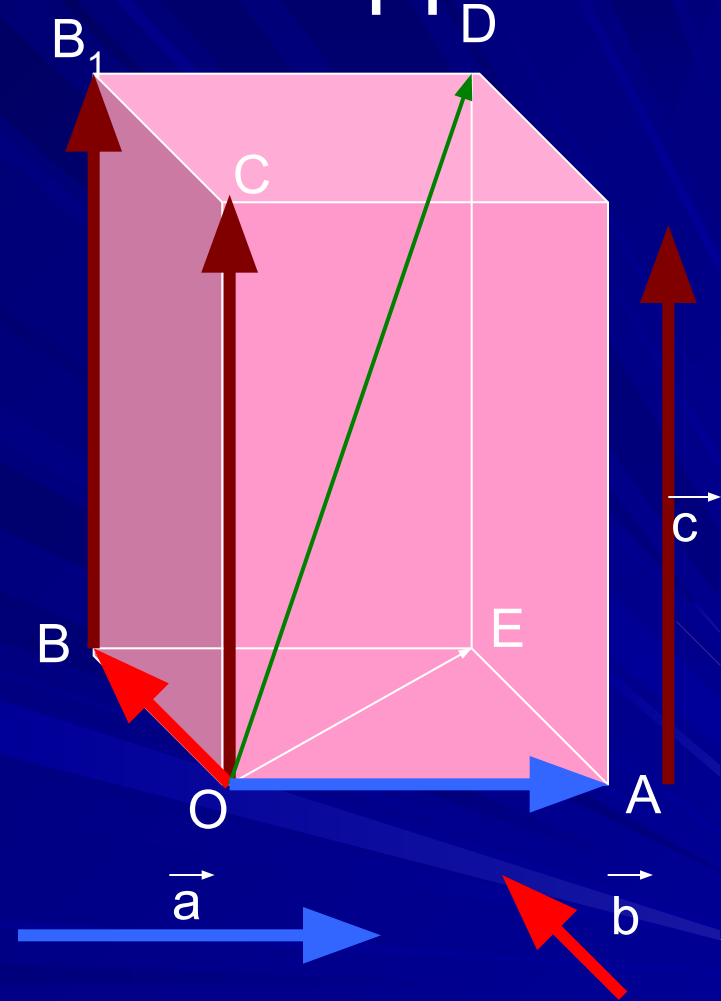
- Если вектор c можно разложить по векторам a и b , т.е. представить в виде $c = xa + yb$, где x и y – некоторые числа, то векторы a , b и c компланарны.

Справедливо и обратное утверждение: если векторы a , b и c компланарны, а векторы a и b не коллинеарны, то вектор c можно разложить по векторам a и b , причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

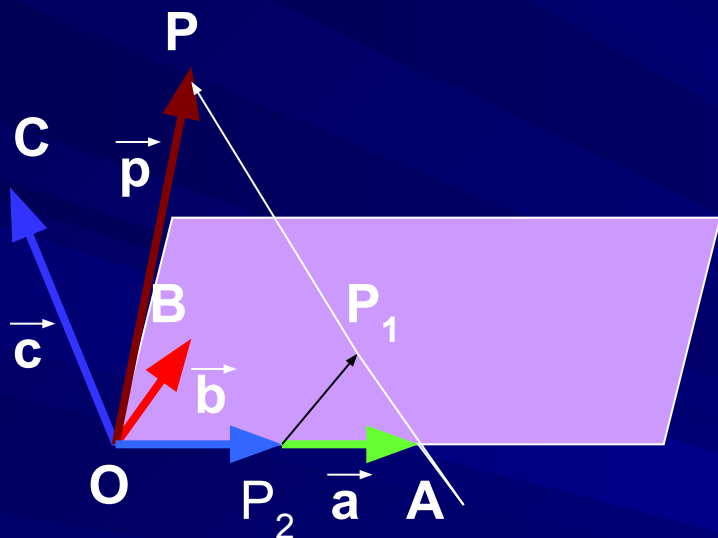


Правило параллелепипеда

- Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – некопланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA , OB и OC были его ребрами. Тогда диагональ OD этого параллелепипеда изображает сумму векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} : $\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Действительно, $\vec{OD} = \vec{OE} + \vec{ED} = (\vec{OA} + \vec{AE}) + \vec{ED} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



Разложение по трем некомпланарным векторам



- Если вектор \vec{p} представлен в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, где x, y и z – некоторые числа, то говорят, что **вектор \vec{p} разложен по векторам \vec{a}, \vec{b} и \vec{c}** . Числа x, y, z называются **коэффициентами разложения**.

Теорема.

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются **единственным образом**.

Математический диктант

1. Нарисуйте параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
2. Найдите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов : а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1 D_1} + \overrightarrow{C A_1}$; б) $\overrightarrow{C A_1} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1 C_1}$.
3. Найдите вектор, равный: а) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{C_1 D_1} - \overrightarrow{B B_1}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A A_1} - \overrightarrow{C_1 B_1}$
4. Представьте вектор $\overrightarrow{B C_1}$ в виде разности двух векторов, один из которых вектор $\overrightarrow{B D_1}$; вектор $\overrightarrow{D_1 B}$.
5. Упростите выражение: а) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{TR}$; б) $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{EN} - \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{ST}$
6. Упростите выражение: а) $3(\vec{a} + \vec{b}) - 4(2\vec{a} - \vec{b}) + \vec{a}$; б) $\vec{m} + 3(2\vec{m} - \vec{n}) - 2(\vec{m} - 4\vec{n})$

Контрольный тест

1. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажите вектор с началом и концом в вершинах параллелепипеда, равный:

а) $A_1 B_1 + BC + DD_1 + CD$

а) $B_1 C + AB + BB_1 + B_1 A$

б) $AB - CC_1$

б) $DC - BB_1$

2. Дан тетраэдр $DABC$. Точка M – середина ребра BC , точка N – середина отрезка DM . Выразите вектор AN через вектора $a=AB$, $b=AC$ и $c=AD$ (I вариант)

Дан тетраэдр $DABC$. Медианы треугольника BDC пересекаются в точке P , K – середина отрезка AP . Выразите вектор BK через векторы $a=AB$, $b=AC$ и $c=AD$ (II вариант).

3. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ медианы треугольника ABD пересекаются в точке P . Разложите вектор $B_1 P$ по векторам $a = B_1 A$, $b = B_1 C$, $c = B_1 B$ (I вариант).

В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка O лежит на отрезке $B_1 D_1$, причем $B_1 O : OD_1 = 2 : 1$. Разложите вектор AO по векторам $a=AB_1$, $b = AD_1$, $c = A_1 A$ (II вариант).