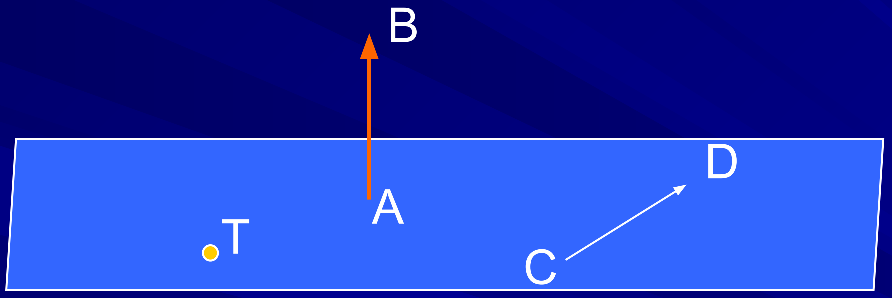
Векторы в пространстве

Содержание

Понятие вектора

- Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется вектором.

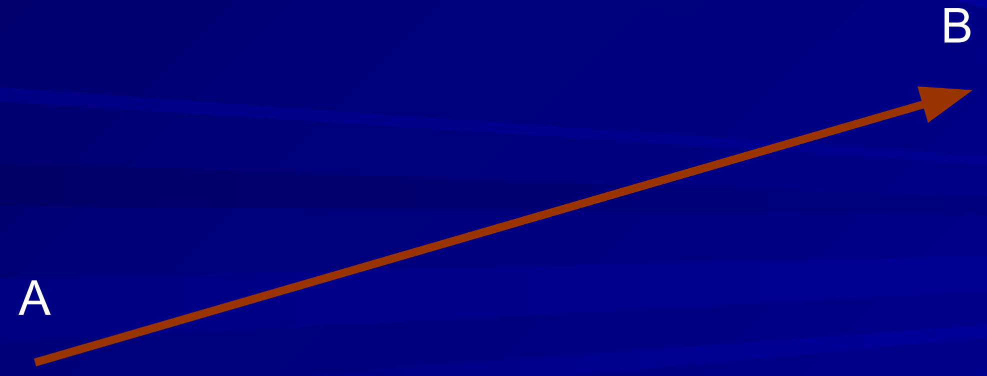


- Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется нулевым.

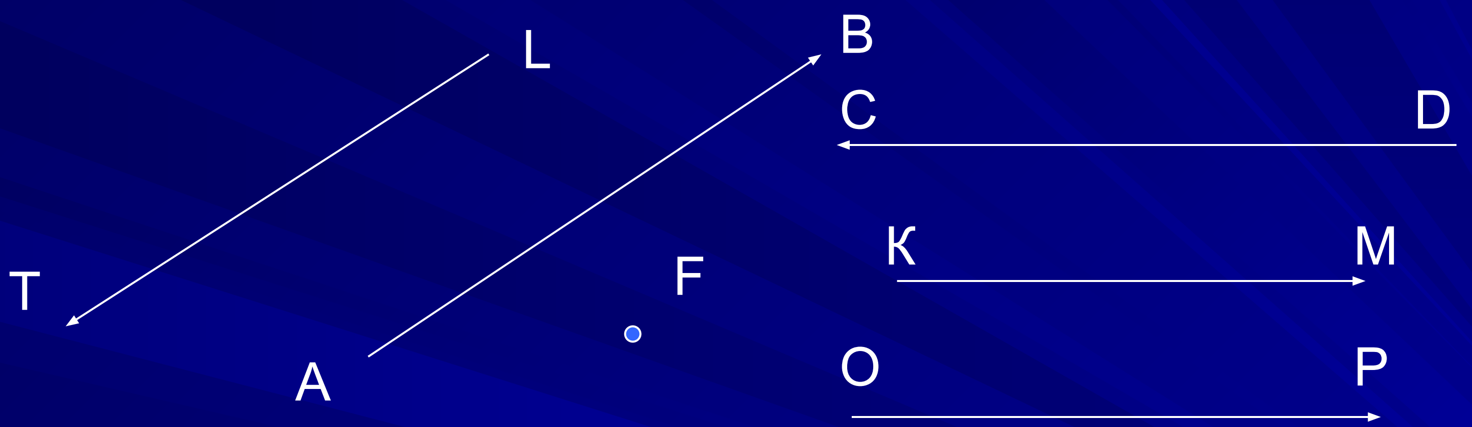
$\overrightarrow{TT}$ – нулевой вектор ($\overrightarrow{TT}$ = O)

Длина вектора

- Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется <u>длина отрезка АВ</u>.
- Длина вектора $\overrightarrow{AB}$(вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$).
- Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}|=0$



- Два ненулевых вектора называются коллинеарными ,если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

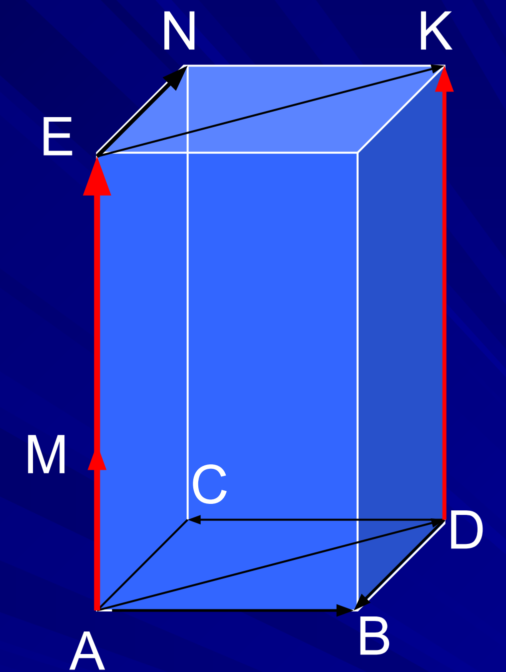


- Два ненулевых вектора OP и KM коллинеарны и при этом лучи OP и KM сонаправлены
- Векторы OP и KM называются сонаправленными
- Если лучи не являются сонаправленными, то векторы называются противоположно направленными.

- Нулевой вектор считается сонаправленным с любым вектором.
- $OP \upuparrows KM$; $CD \uparrow\downarrow KM$; $TL \uparrow\downarrow AB$; $CD \uparrow\downarrow OP$

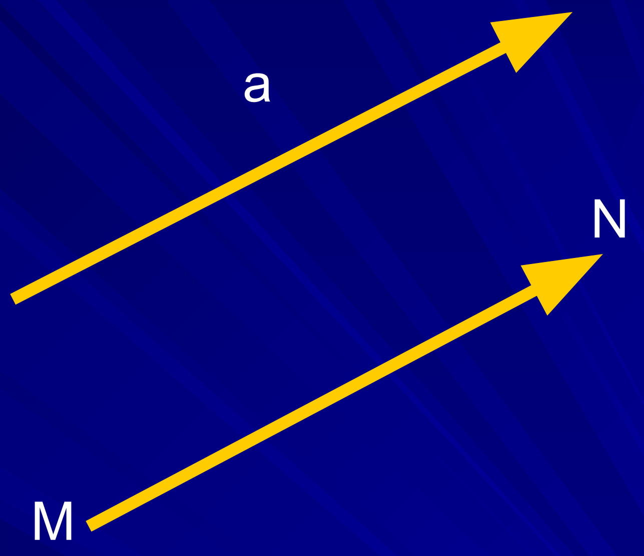
Равенство векторов

- Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DK}$, так как $\overrightarrow{AE} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$ и $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{DK}|$, а $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$.



- От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Доказательство. В самом деле, пусть $\vec{a}$ – данный вектор, M – данная точка. Проведем через начало и конец вектора $\vec{a}$ и точку M плоскость и в этой плоскости построим вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{MN}$ искомый. Из построения ясно также, что $\overrightarrow{MN}$ – единственный вектор с началом M, равный вектору a.

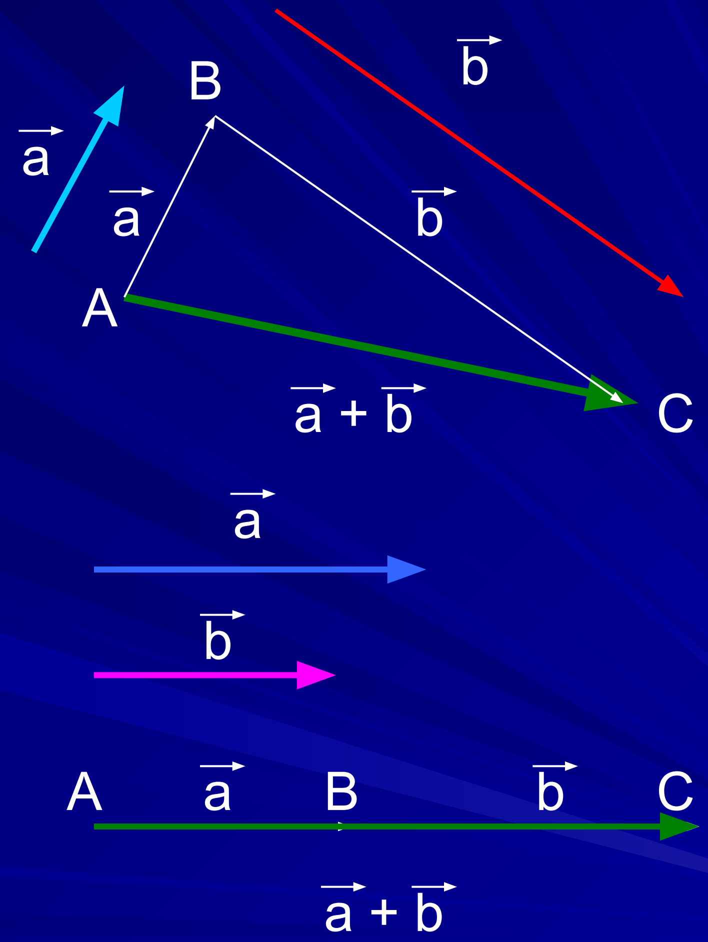


Сложение и вычитание векторов

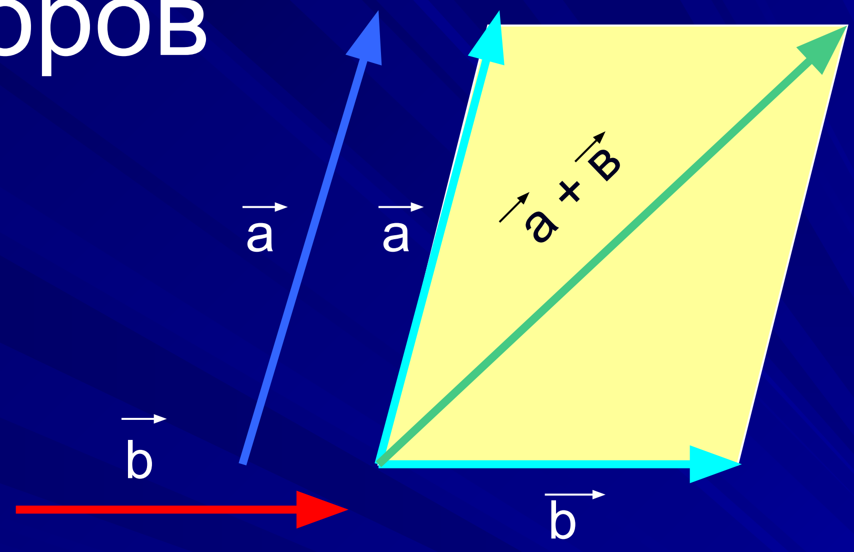
- Правило треугольника.

Для любых трех точек A,B, и C имеет место равенство

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов



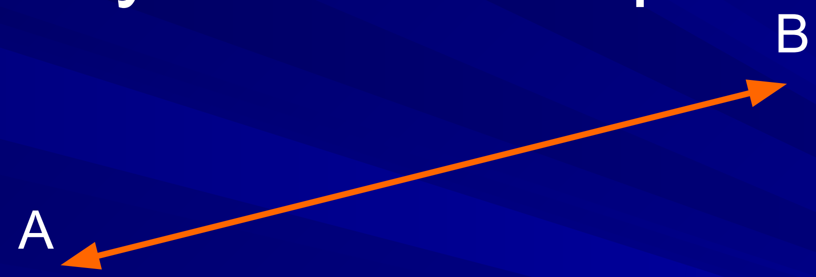
Свойства сложения векторов.

Для любых векторов a, b, c справедливы равенства:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон)

2) $(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон)

- Два ненулевых вектора называются противоположными, если их длины равны и они противоположно направлены. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор.

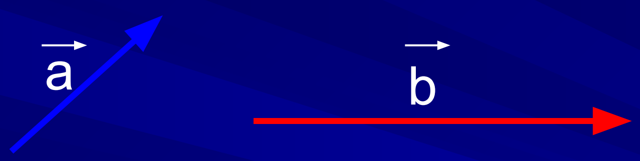


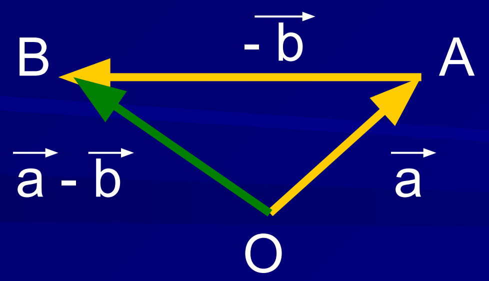
$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ - противоположные векторы

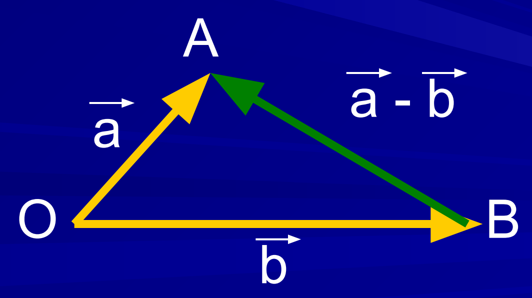
- Разностью векторов a и b называется такой вектор, сумма которого с вектором b равна вектору a.

Разность a - b векторов a и b можно найти по формуле $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, где

$(-\vec{b})$ – вектор, противоположный вектору $\vec{b}$.



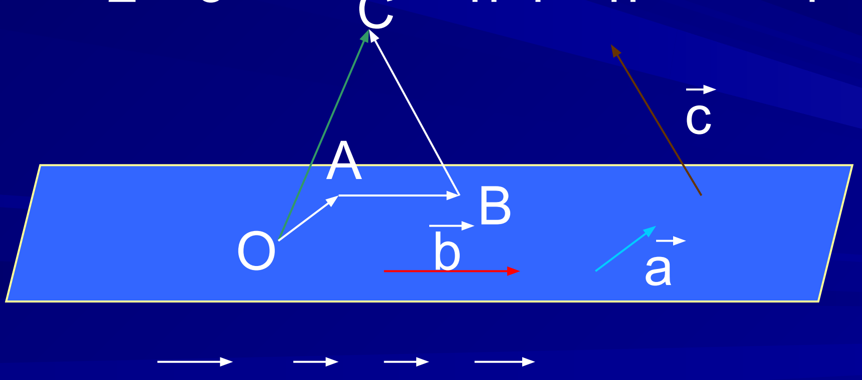




Сумма нескольких векторов

- Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.
- Правило многоугольника.

Если A_1, A_2, …, A_n - произвольные точки, то $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$



Умножение вектора на число

- Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число к называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|к| * |\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при к > 0 и противоположно направлены при к < 0.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{b} = \vec{0}$.

Если к = 0, то $\vec{b} = \vec{0}$.

Основные свойства

$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ сочетательный закон

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ I распределительный закон

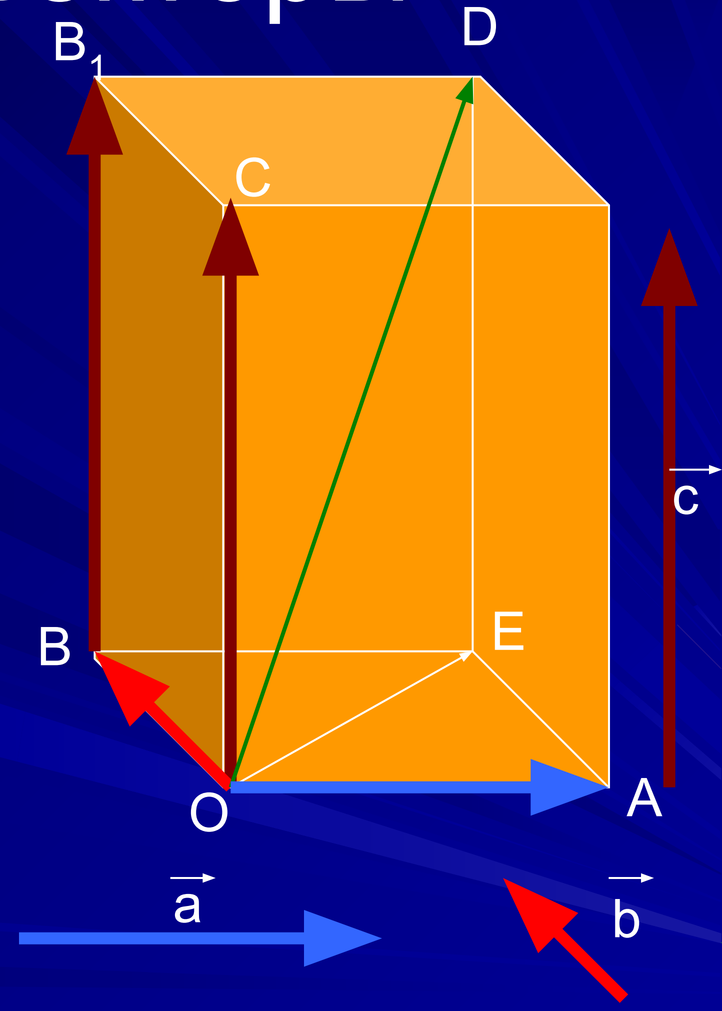
$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ II распределительный закон

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} = \vec{o}$, то существует к, что $\vec{b}=k\vec{a}$.

Компланарные векторы

- Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

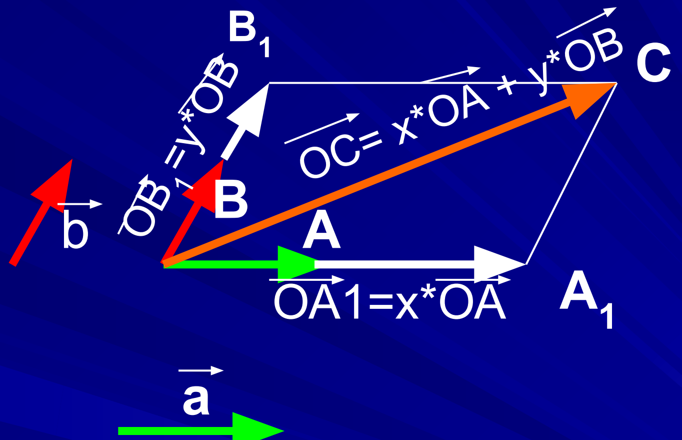
На рисунке векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарны, так как если отложить от точки O вектор, равный $\overrightarrow{BB_1}$, то получится вектор $\overrightarrow{OC}$, а векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ лежат в одной плоскости OCE. Векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ не компланарны, так как вектор $\overrightarrow{OC}$ не лежит в плоскости OAB.



Признак копланарности трех векторов

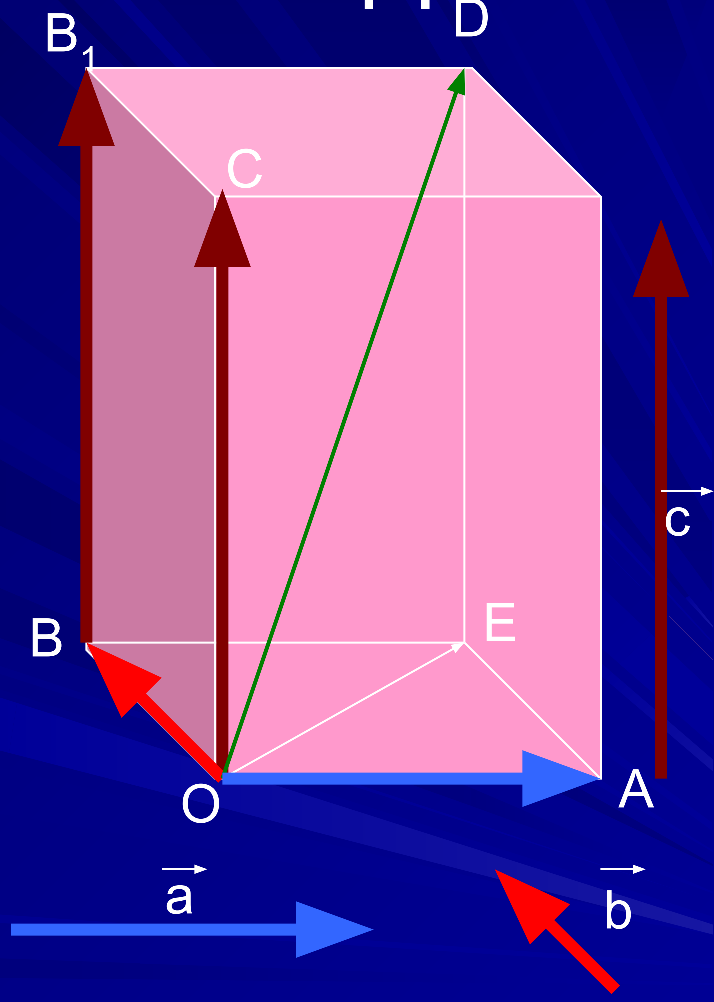
- ***Если вектор с можно разложить по векторам a и b, т.е. представить в виде c = xa + yb, где x и y – некоторые числа, то векторы a, b и c компланарны.***

Справедливо и обратное утверждение : ***если векторы a, b и c компланарны, а векторы a и b не коллинеарны, то вектор с можно разложить по векторам a и b, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.***

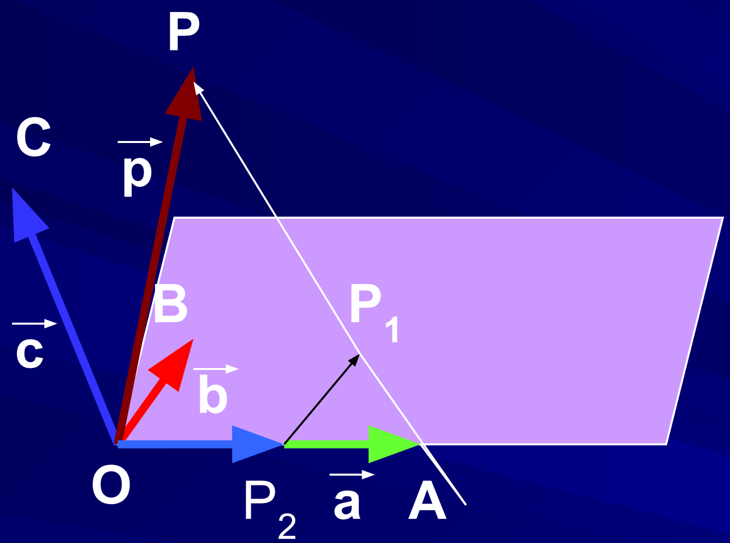


Правило параллелепипеда

- Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB и OC были его ребрами. Тогда диагональ OD этого параллелепипеда изображает сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Действительно, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



Разложение по трем некомпланарным векторам



- Если вектор p представлен в виде
- p = xa + yb + zc, где x, y и z – некоторые числа, то говорят, что **вектор p разложен по векторам a, b и c.** Числа x, y, z называются **коэффициентами разложения.**
- **Теорема.**

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Математический диктант

1. Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
2. Найдите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов : а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{CA_1}$; б) $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1}$.
3. Найдите вектор, равный: а) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{C_1D_1} - \overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{C_1B_1}$
4. Представьте вектор $\overrightarrow{BC_1}$ в виде разности двух векторов, один из которых вектор $\overrightarrow{BD_1}$; вектор $\overrightarrow{D_1B}$.
5. Упростите выражение: а) $\overrightarrow{MN} – \overrightarrow{PQ} – \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{TR}$; б) $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{EN} – \overrightarrow{MN} – \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{ST}$
6. Упростите выражение: а) $3(\vec{a} + \vec{b}) – 4(2\vec{a} – \vec{b}) + \vec{a}$; б) $\vec{m} + 3(2\vec{m} – \vec{n}) – 2(\vec{m} – 4\vec{n})$

Контрольный тест

1.Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите вектор с началом и концом в вершинах параллелепипеда, равный:

а) $A_1B_1 + BC + DD_1 + CD$ а) $B_1C + AB + BB_1 + B_1A$

б) $AB - CC_1$ б) $DC - BB_1$

2. Дан тетраэдр DABC. Точка M – середина ребра BC, точка N - середина отрезка DM. Выразите вектор AN через вектора a=AB, b=AC и c=AD (I вариант)

Дан тетраэдр DABC. Медианы треугольника BDC пересекаются в точке P,K – середина отрезка AP. Выразите вектор BK через векторы a=AB, b=Ac и c=AD (II вариант).

3. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ медианы треугольника ABD пересекаются в точке P. Разложите вектор B_1P по векторам $a = B_1A$, $b = B_1C$, $c = B_1B$ (I вариант).

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка O лежит на отрезке B_1D_1, причем $B_1O : OD_1 = 2 :1$. Разложите вектор AO по векторам $a=AB_1$, $b = AD_1$, $c= A_1A$ (II вариант).