Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным

Основные методы решения тригонометрических уравнений

Решите уравнение:

$$6sin^2x - 5sinx - 4 = 0$$

введем новую переменную $sinx = t.$

Тогда уравнение примет вид

$$6t^2 - 5t - 4 = 0$$

$t_1 = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $t_2 = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\sin x = -\frac{1}{2}$

корней нет $\qquad$ $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \epsilon Z$

Решим уравнения:

$$4cos^2x - 8\,sinx + 1 = 0$$

$$7sin^2x + 4sinxcosx - 3cos^2x = 0$$

1. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

2. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

$$x = arctg + \pi n, n \in Z.$$

Решите используя основные методы решения тригонометрических уравнений

I вариант

$a)6sin^2x + 7cosx - 7 = 2$

б)$\cos 2x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$

в)$cos2x + sin^2x = 0{,}25$

II вариант

$a)$ $7sin^2x + 8cosx - 8 = 0$

б)$2sin^2x - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

в)$sin2x + \sqrt{3}sinx = 0$

Тригонометрические уравнения:

1 вид: 1) $\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0$,

4) $-\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$,

5) $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$.

2 вид: 3) $\cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$.

3 вид: 2) $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \cos^2 x$.

Однородные уравнения

$$6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 = 1$$

$$6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0 \,\Big|\, \cos^2 x$$

$$\frac{5\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x * \cos x}{\cos^2 x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$5tg^2 x - 3tgx - 2 = 0$$

Задача 1 Решите уравнение $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Решение

▶ Пусть $\sin x = t$, тогда получаем:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0.$$

Отсюда $t_1 = 3$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

1. При $t = 3$ имеем $\sin x = 3$ — уравнение не имеет корней, поскольку $|3| > 1$.
2. При $t = \frac{1}{2}$ имеем $\sin x = \frac{1}{2}$,

тогда $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$,

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Комментарий

Анализируя вид этого уравнения, замечаем, что в его запись входит только одна тригонометрическая функция $\sin x$. Поэтому удобно ввести новую переменную $\sin x = t$.

После решения квадратного уравнения необходимо выполнить обратную замену и решить полученные простейшие тригонометрические уравнения.

Замечание. Записывая решения задачи 1, можно при введении замены $\sin x = t$ учесть, что $|\sin x| \leqslant 1$, и записать ограничения $|t| \leqslant 1$, а далее заметить, что один из корней $t = 3$ не удовлетворяет условию $|t| \leqslant 1$, и после этого обратную замену выполнять только для $t = \frac{1}{2}$.

№1

а) $2sin^2x - sinx - 1 = 0$

б) $2cos^2x - cosx - 1 = 0$

в) $2sin^2x + sinx - 1 = 0$

г) $2cos^2x + sinx - 1 = 0$