

**Курс лекций «Дискретная математика»
Ф.И. Каган, к.ф.-м.н., доцент,
Заслуженный работник культуры РФ**



07

КОМБИНАТОРИКА

7.1. Что такое комбинаторика?

Комбинаторикой (комбинаторным анализом) называют раздел математики, изучающий с разных точек зрения всевозможные конфигурации элементов конечных множеств.

Комбинаторика – это раздел дискретной математики, рассматривающий различные комбинаторные задачи и способы их решения. В свою очередь, в комбинаторных задачах мы имеем дело с подсчетом числа различных комбинаций из элементов конечных множеств.

Одну из таких задач мы уже рассматривали в связи с понятием булеана конечного множества.

Пусть A – некоторое множество. Множество всех его подмножеств, включая и «несобственные подмножества», т.е. пустое подмножество \emptyset и само множество A , называется **булеаном** множества A . Булеан множества A обозначается через 2^A .

Это обозначение связано со следующим фактом.

Пусть A – конечное множество, имеющее n элементов:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Условимся каждому подмножеству множества A ставить в соответствие n -разрядное двоичное число, у которого на i -ом месте ставится 1, если элемент a_i входит в подмножество, и 0 – в противном случае.

В частности, пустому подмножеству \emptyset будет соотнесено число 0, представленное двоичным набором из n нулей, а самому множеству A , как максимальному своему подмножеству, будет соотнесено число, имеющее двоичное представление в виде n единиц, т.е. число $2^n - 1$.

Таким образом, булеан множество A , состоящего из n элементов, имеет число подмножеств, равное

$$1 + (2^n - 1) = 2^n,$$

где первая единица в этом равенстве связана с включением в булеан и пустого подмножества.

Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем в 1666 году, когда им был опубликован труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

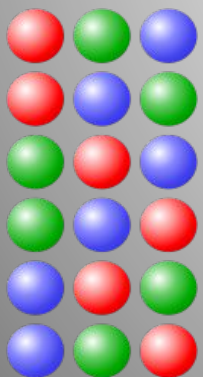
Комбинаторика связана с другими областями математики – алгеброй, геометрией, теорией вероятностей, дискретной математикой – и применяется в различных областях знаний (например, в информатике, генетике, статистической физике).

В теории вероятностей немало задач требуют обращения к формулам, позволяющим найти число определенных конфигураций для элементов некоторого конечного множества. Это так называемые перестановки, размещения и сочетания. С соответствующих формул мы и начнем наше рассмотрение.

7.2. Число перестановок из n элементов

Пусть имеется множество из n элементов. **Перестановкой** называется конкретное размещение этих элементов в определенном порядке.

На рисунке слева изображены все возможные перестановки в множестве, элементами которого являются три разноцветных шарика. В данном случае $n = 3$, а числе всех перестановок равно 6.



Рассмотрим общий случай. Выберем первый элемент нашего множества. Имеется n способов его размещения на n позициях. Следующий элемент можно разместить $n-1$ способами, поскольку одно место уже занято. А количество вариантов размещения двух первых элементов, очевидно, равно $n \times (n-1)$. Размещение трех первых элементов имеет $n \times (n-1) \times (n-2)$ вариантов. И так далее, рассуждая подобным образом, мы приходим к выражению $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$.

В математике принято обозначение

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n \text{ (читается как } n\text{-факториал)}$$

Итак, число всевозможных перестановок в множестве из n элементов выражается формулой

$$P_n = n!$$

Кстати, в нашем примере число шариков равнялось 3. Поэтому $P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

7.3. Число размещений из n элементов по m

Прежде чем дать общее определение, рассмотрим вполне практическую задачу. Из группы в n человек требуется рассадить за столом в определенном порядке m человек ($m < n$). Сколькими способами это можно сделать?

Пронумеруем m стульев. Тогда на первый стул можно усадить одного из n человек. Пусть первое место уже занято. На второе место остается $n-1$ претендент. Каждая из n возможностей занять первое место сочетается с $n-1$ возможностью занять второе место. Таким образом, имеется $n \times (n-1)$ вариантов занять первые

два стула. Рассуждая аналогичным образом, мы приходим к количеству вариантов рассаживания n человек на m стульев в виде произведения

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-m+1).$$

Это же выражение путем умножения и деления на $(n-m)!$ можно представить в виде

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Таким образом, мы приходим к формуле, выражающей число всевозможных размещений из n элементов по m

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Если в этой последней формуле положить $m = n$, то в ее знаменателе мы получим $0!$ В математике принято соглашение: $0! = 1$. И тогда мы приходим к уже известной нам формуле числа всевозможных перестановок из n элементов, которые рассматриваются как частные случаи размещений: $P_n = n!$

7.4. Число сочетаний из n элементов по m

Сочетание по m элементов из n возможных отличается от размещения тем, что оно не рассматривает порядок, в котором отбираются элементы для сочетания. Это просто любое неупорядоченное подмножество, содержащее m элементов.

Ясно поэтому, что число размещений должно превосходить число сочетаний во столько раз, сколько можно сделать перестановок в множестве из m элементов, чтобы превратить его из неупорядоченного множества, сочетания, в то, что мы называем размещением. Иными словами, имеет место равенство

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$$

И отсюда окончательная формула для числа всевозможных сочетаний из n элементов по m

$$C_n^m = \frac{n!}{(n - m)!m!}$$

7.5.. Свойства биномиальных коэффициентов

Выражения C_n^m , с которыми мы часто встречаемся в комбинаторике, называются **биномиальными коэффициентами**. И это не случайно, ибо они являются коэффициентами в знаменитом соотношении, именуемом **биномом Ньютона**:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Это свойство можно представить в виде следующего соотношения:

$$\sum_{m=0}^n C_n^m = 2^n .$$