Курс лекций «Дискретная математика»

Ф.И. Каган, к.ф.-м.н., доцент,
Заслуженный работник культуры РФ

07

КОМБИНАТОРИКА

7.1. Что такое комбинаторика?

Комбинаторикой (комбинаторным анализом) называют раздел математики, изучающий с разных точек зрения всевозможные конфигурации элементов конечных множеств.

Комбинаторика – это раздел дискретной математики, рассматривающий различные комбинаторные задачи и способы их решения. В свою очередь, в комбинаторных задачах мы имеем дело с подсчетом числа различных комбинаций из элементов конечных множеств.

Одну из таких задач мы уже рассматривали в связи с понятием булеана конечного множества.

Пусть A - некоторое множество. Множество всех его подмножеств, включая и «несобственные подмножества», т.е. пустое подмножество $\emptyset$ и само множество A, называется булеаном множества A. Булеан множества A обозначается через 2^A.

Это обозначение связано со следующим фактом.

Пусть A – конечное множество, имеющее n элементов:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Условимся каждому подмножеству множества A ставить в соответствие n-разрядное двоичное число, у которого на i-ом месте ставится 1, если элемент a_i входит в подмножество, и 0 – в противном случае.

В частности, пустому подмножеству $\emptyset$ будет соотнесено число 0, представленное двоичным набором из n нулей, а самому множеству A, как максимальному своему подмножеству, будет соотнесено число, имеющее двоичное представление в виде n единиц, т.е. число 2^n- 1.

Таким образом, булеан множество А, состоящего из n элементов, имеет число подмножеств, равное

$$1 + (2^n - 1) = 2^n,$$

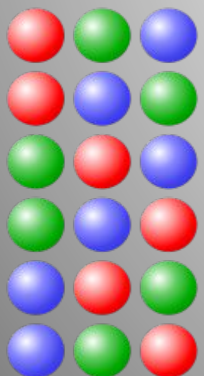
где первая единица в этом равенстве связана с включением в булеан и пустого подмножества.

Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем в 1666 году, когда им был опубликован труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Комбинаторика связана с другими областями математики – алгеброй, геометрией, теорией вероятностей, дискретной математикой – и применяется в различных областях знаний (например, в информатике, генетике, статистической физике).

В теории вероятностей немало задач требуют обращения к формулам, позволяющим найти число определенных конфигураций для элементов некоторого конечного множества. Это так называемые перестановки, размещения и сочетания. С соответствующих формул мы и начнем наше рассмотрение.

7.2. Число перестановок из n элементов



Пусть имеется множество из n элементов. Перестановкой называется конкретное размещение этих элементов в определенном порядке.

На рисунке слева изображены все возможные перестановки в множестве, элементами которого являются три разноцветных шарика. В данном случае n = 3, а число всех перестановок равно 6.

Рассмотрим общий случай. Выберем первый элемент нашего множества. Имеется n способов его размещения на n позициях. Следующий элемент можно разместить n-1 способами, поскольку одно место уже занято. А количество вариантов размещения двух первых элементов, очевидно, равно $n \times (n-1)$. Размещение трех первых элементов имеет $n \times (n-1) \times (n-2)$ вариантов. И так далее, рассуждая подобным образом, мы приходим к выражению $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

В математике принято обозначение

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n$$ **(читается как n–факториал)**

Итак, число всевозможных перестановок в множестве из n элементов выражается формулой

$$P_n = n!$$

Кстати, в нашем примере число шариков равнялось 3. Поэтому $P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

7.3. Число размещений из n элементов по m

Прежде чем дать общее определение, рассмотрим вполне практическую задачу. Из группы в n человек требуется рассадить за столом в определенном порядке m человек ($m<n$). Сколькими способами это можно сделать?

Пронумеруем m стульев. Тогда на первый стул можно усадить одного из n человек. Пусть первое место уже занято. На второе место остается $n-1$ претендент. Каждая из n возможностей занять первое место сочетается с n-1 возможностью занять второе место. Таким образом, имеется $n \times (n-1)$ вариантов занять первые

два стула. Рассуждая аналогичным образом, мы придем к количеству вариантов рассаживания n человек на m стульев в виде произведения

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-m+1).$$

Это же выражение путем умножения и деления на (n-m)! можно представить в виде

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-m+1)= n!/(n-m)!$$

Таким образом, мы приходим к формуле, выражающей число всевозможных размещений из n элементов по m

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Если в этой последней формуле положить m = n, то в ее знаменателе мы получим 0! В математике принято соглашение: 0! = 1. И тогда мы приходим к уже известной нам формуле числа всевозможных перестановок из n элементов, которые рассматриваются как частные случаи размещений: $P_n = n!$

7.4. Число сочетаний из n элементов по m

Сочетание по m элементов из n возможных отличается от размещения тем, что оно не рассматривает порядок, в котором отбираются элементы для сочетания. Это просто любое неупорядоченное подмножество, содержащее m элементов.

Ясно поэтому, что число размещений должно превосходить число сочетаний во столько раз, сколько можно сделать перестановок в множестве из **m** элементов, чтобы превратить его из неупорядоченного множества, сочетания, в то, что мы называем размещением. Иными словами, имеет место равенство

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$$

И отсюда окончательная формула для числа всевозможных сочетаний из **n** элементов по **m**

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

7.5.. Свойства биномиальных коэффициентов

Выражения C_n^m, с которыми мы часто встречаемся в комбинаторике, называются **биномиальными коэффициентами.** И это не случайно, ибо они являются коэффициентами в знаменитом соотношении, именуемом **биномом Ньютона:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Представим бином Ньютона для частных случаев:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2a^1b^1 + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + b^6$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6a^1b^5 + b^6$$

Любопытно отметить, что биномиальные коэффициенты образуют так называемый треугольник Паскаля, в котором каждое новое число является суммой ближайших к нему двух чисел предыдущего ряда.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Заметим еще, что если в формуле бинома Ньютона положить $a = b = 1$, то сумма всех биномиальных коэффициентов окажется равной 2^n .

Это свойство можно представить в виде следующего соотношения:

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n .$$