Множества. Операции над множествами.

Часто в повседневной жизни объединённые по некоторому признаку объекты мы называем *группой, объединением, коллекцией, совокупностью* и т. п. Для этих слов в математике существует синоним — **множество.**

Приведём несколько примеров множеств:

- множество учеников вашей школы;
- множество городских округов Алтайского края.

Отдельным важнейшим множествам присвоены общепринятые названия и обозначения:

- множество точек плоскости — **геометрическая фигура**;
- множество натуральных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{N}$;
- множество целых чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{Z}$;
- множество рациональных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{Q}$;
- множество действительных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{R}$.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут: $a \in A$ (читают: «a принадлежит множеству A»). Если элемент b не принадлежит множеству A, то пишут: $b \notin A$ (читают: «b не принадлежит множеству A»).

Например, $12 \in \boldsymbol{N}$, $-3 \notin \boldsymbol{N}$, $\frac{2}{3} \in \boldsymbol{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{Z}$, $\sqrt{2} \in \boldsymbol{R}$, $a \in \{a, b, c\}$.

Множества часто задают одним из двух следующих способов.

Первый способ состоит в том, что множество задают указанием (перечислением) всех его элементов. Например, если M — множество натуральных чисел, меньших 5, то пишут: $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Второй способ состоит в том, что указывается **характеристическое свойство элементов множества**, то есть свойство, которым обладают все элементы данного множества, и только они.

- $\{x \mid x = 3n, n \in \boldsymbol{N}\}$ — множество натуральных чисел, кратных 3.
- $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ — множество корней уравнения $x(x^2 - 1) = 0$.

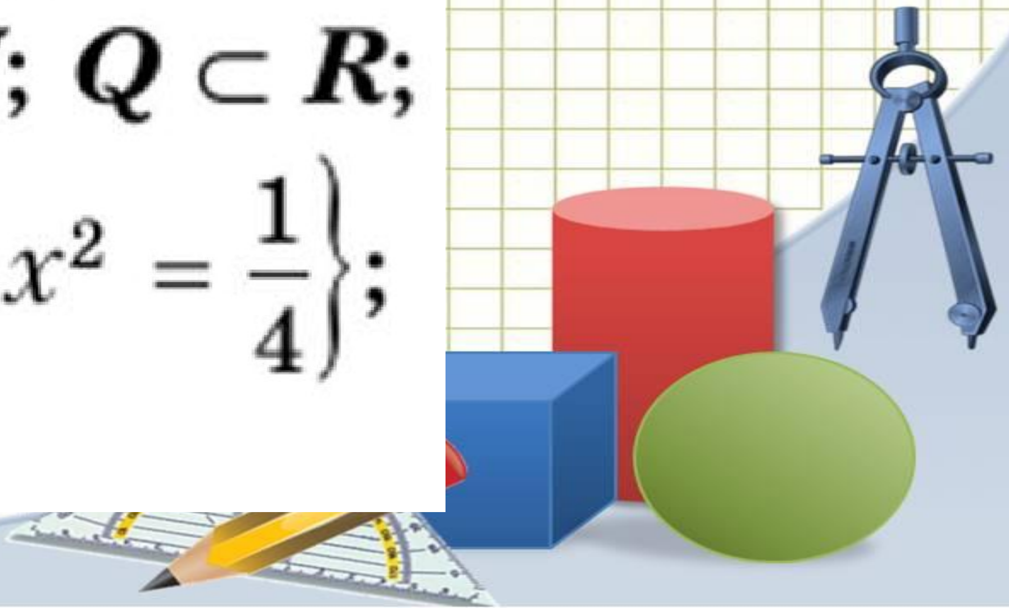
Определение

Множество B называют подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Это записывают так: $B \subset A$ или $A \supset B$

Рассмотрим примеры:

- $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{Q} \supset \boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$.



Для иллюстрации соотношений между множествами пользуются схемами, называемыми **диаграммами Эйлера**.

На рисунке 1.1 изображены множество A (больший круг) и множество B (меньший круг, полностью содержащийся в большем). Эта схема означает, что $B \subset A$.

На рисунке 1.2 с помощью диаграмм Эйлера показано соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$.

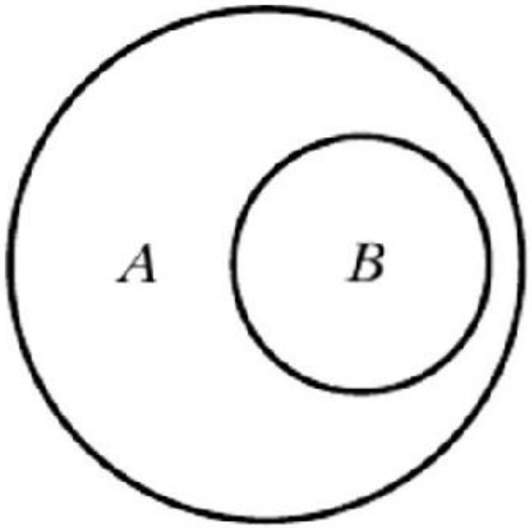


Рис. **1.1**

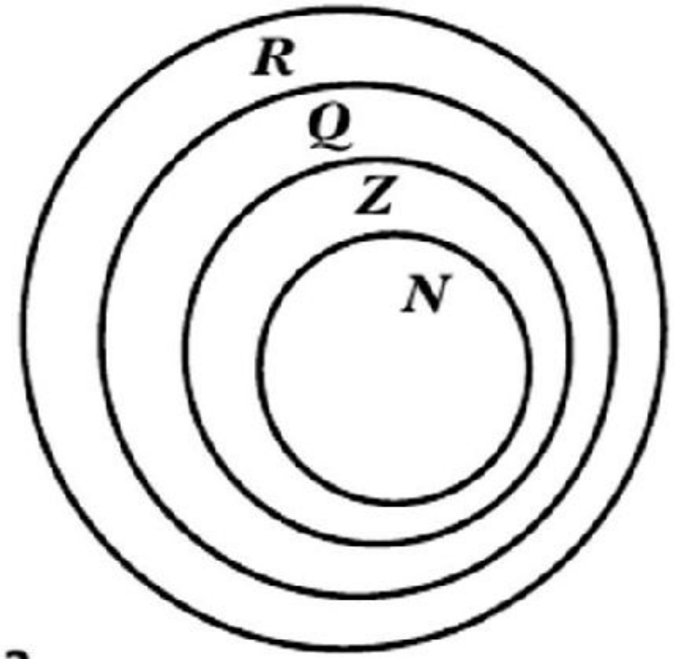


Рис. **1.2**

Отметим, что если $A \subset B$ и $B \subset A$, то

Пустое множество считают подмножеством любого множества, то есть для любого множества A справедливо утверждение: $\varnothing \subset A$.

Любое множество A является подмножеством самого себя, то есть $A \subset A$.

Определение

Если $B \subset A$ и $B \neq A$, то множество B называют собственным подмножеством множества A.

Например, множество $\boldsymbol{Z}$ является собственным подмножеством множества $\boldsymbol{Q}$.

Приведите свой пример

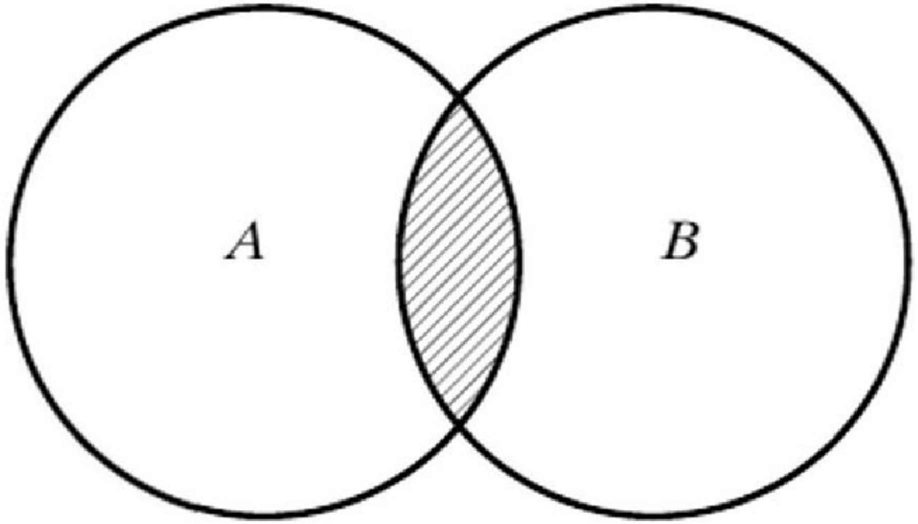
Определение

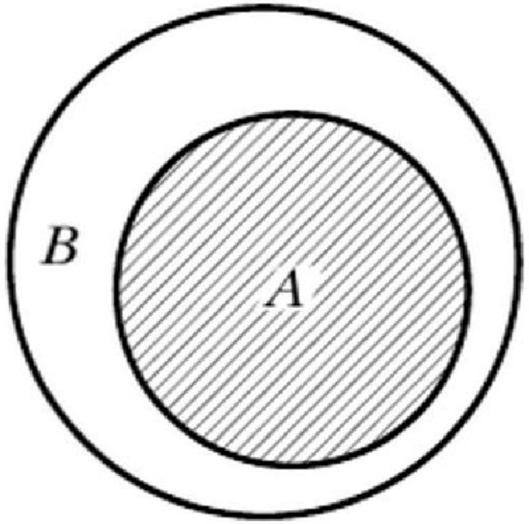
Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B.

Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$. Из определения следует, что

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечением является пустое множество, то есть $A \cap B = \varnothing$. Также заметим, что $A \cap \varnothing = \varnothing$.





Определение

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B.

Объединение множеств A и B обозначают так: $A \cup B$. Из определения следует, что

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \cup \varnothing = A$.

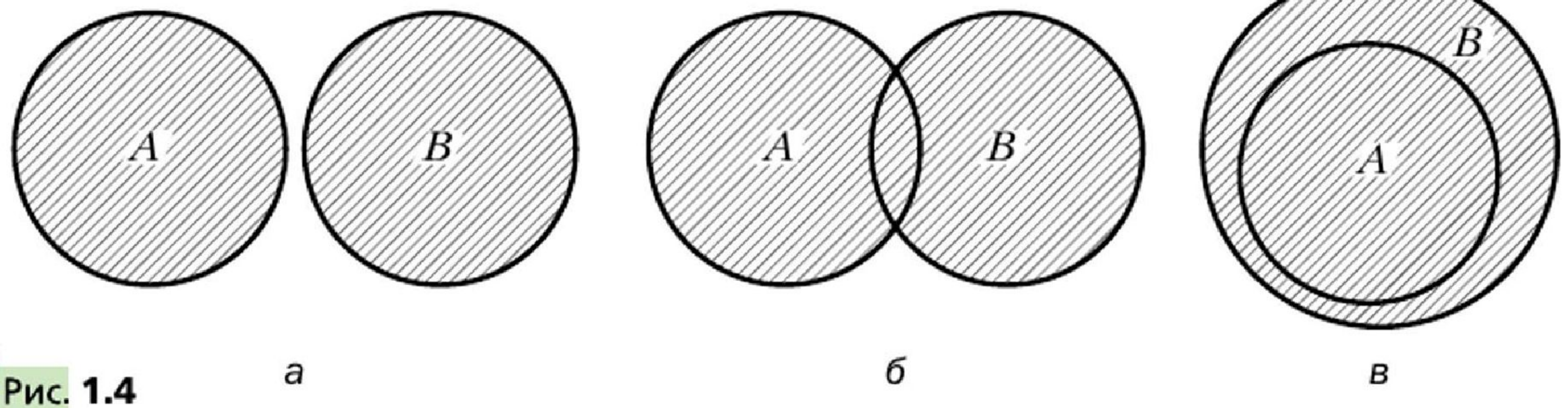
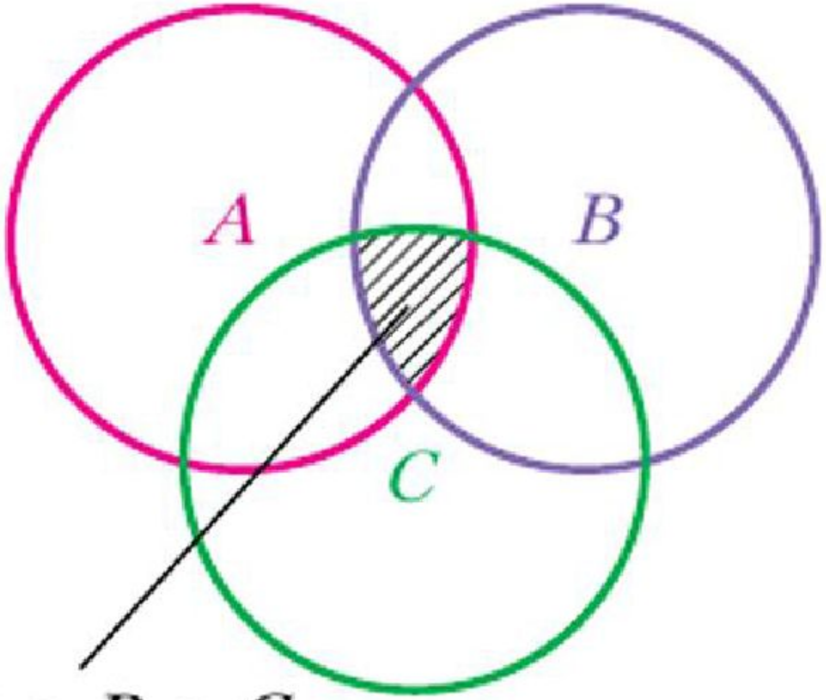
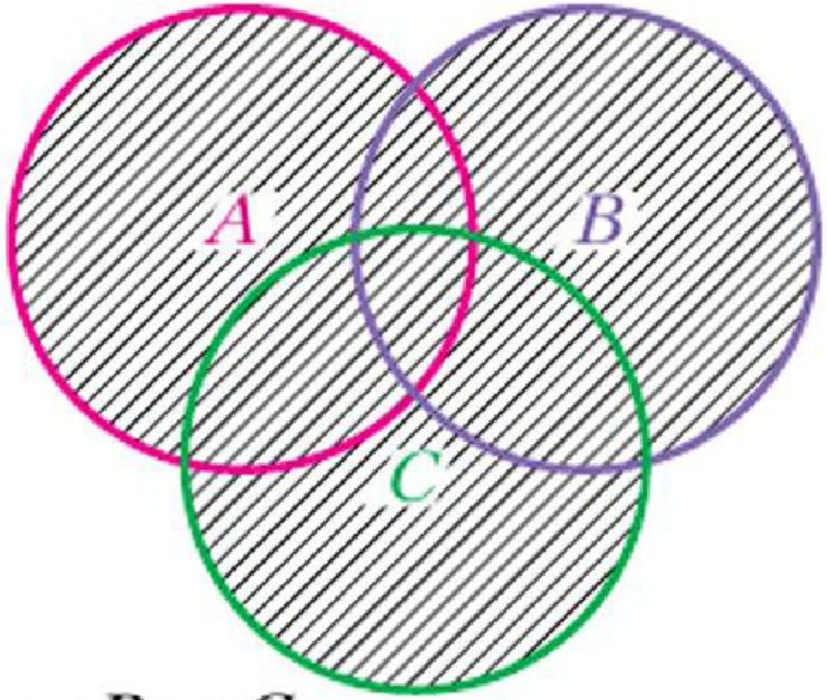


Рис. 1.4



$A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$

Например, объединение множеств остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников — это множество

Определение

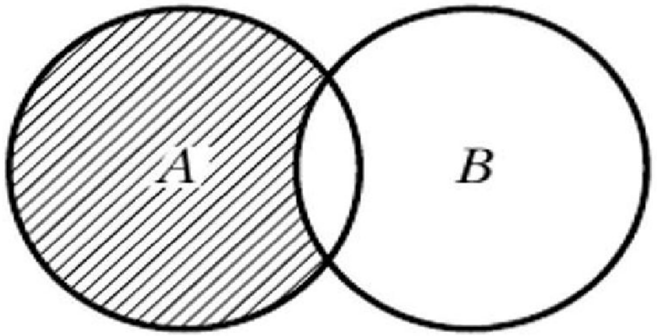
Разностью множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B.

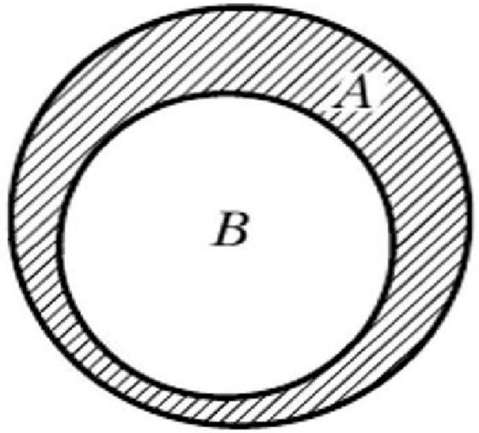
Разность множеств A и B обозначают так: $A \setminus B$. Из определения следует, что

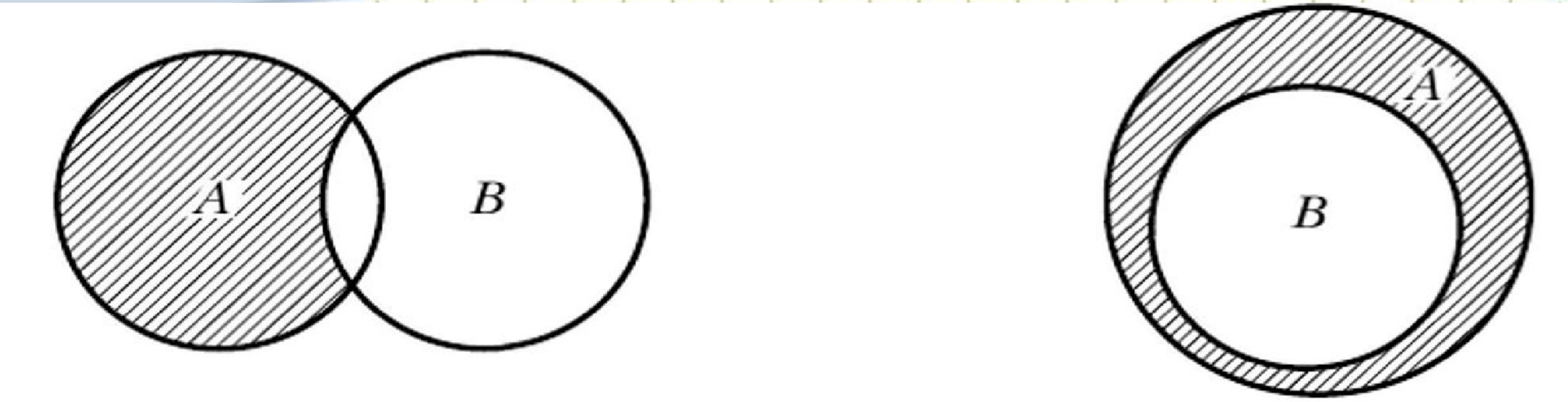
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \setminus \varnothing = A$.

Из определения разности двух множеств следует, что если $A \subset B$, то $A \setminus B = \varnothing$, в частности, если $B = A$, то $A \setminus A = \varnothing$.







В случае, когда множество B является подмножеством множества A, разность $A \setminus B$ называют **дополнением множества** B в множестве A. На рисунке 1.7, *б* это множество изображено штриховкой. Например, дополнением множества нечётных чисел в множестве натуральных чисел является множество чётных чисел.

Пусть $A \neq \varnothing$. Какие два разных подмножества всегда имеет множество A?

Равны ли множества A и B:

1) $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{2,\ 1\}$; +

2) $A = \{(0;\ 1)\}$, $B = \{(1;\ 0)\}$; −

3) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x$ кратно 2 и 3$\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x$ кратно 6$\}$ +

Какие из следующих множеств равны пустому множеству:

1) $A = \{x \mid x \neq x\}$; +

2) $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ \frac{1}{2}x - 2 = 0\}$;

3) $C = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ |\,x\,| < 1\}$?

Какое из следующих утверждений верно:

1) $\{a\} \in \{a, b\}$;

2) $\{a\} \subset \{a, b\}$; +

3) $a \subset \{a, b\}$;

4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

1.8. Какое из множеств, A или B, является подмножеством другого, если:
$A = \{x \mid x = 4n + 2, n \in \mathbf{N}\}$; $B = \{x \mid x = 8n + 2, n \in \mathbf{N}\}$?

1.9. Даны множества $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7, 11\}$, $\{7, 19\}$, $\{11, 19\}$, $\varnothing$, являющиеся всеми собственными подмножествами некоторого множества A. Запишите множество A.

Какое из следующих утверждений верно:

1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$;

2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$;

3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$; +

4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

Какое из следующих утверждений верно:

1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$; +

2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;

3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;

4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

1.13. Найдите пересечение множеств A и B, если:

1) $A = \{x \mid x < 19\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x > 11\}$;

2) $A = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6n, n \in \mathbf{N}\}$;

3) $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$.

1.14. Найдите объединение множеств A и B, если:

1) $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$;

2) $A = \{x \mid 2x + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3 = 2\}$;

3) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x < 7\}$.

1.15. Какое из следующих утверждений верно:

1) $\{a, b\} \setminus \{a\} = b$;

2) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a, b\}$;

3) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a\}$;

4) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{b\}$? +