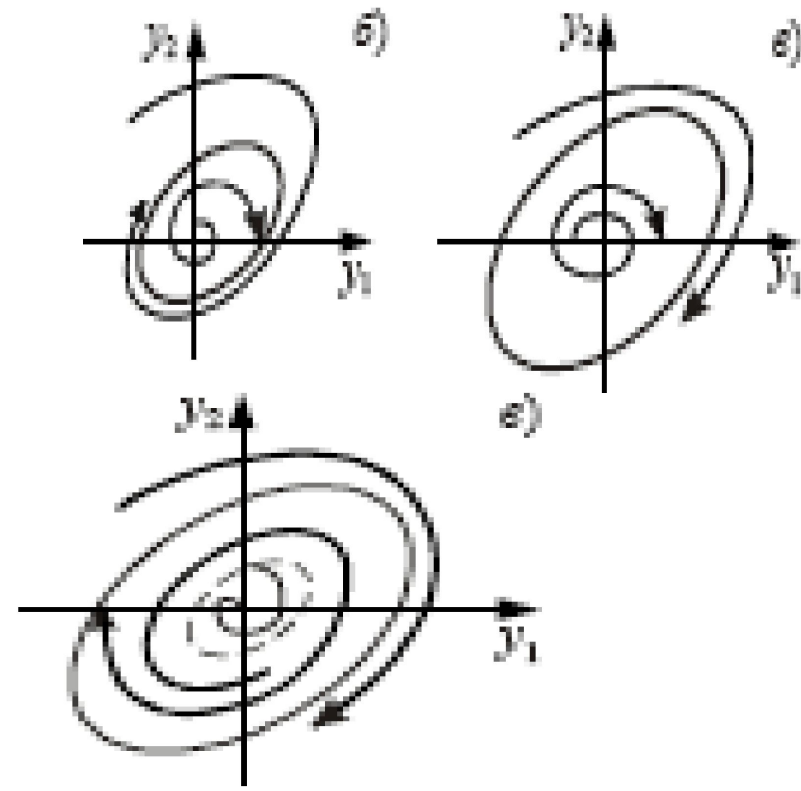


Автоколебания – это собственные колебания в нелинейной системе, обладающие свойством *устойчивости*, т.е. способностью *сохранять амплитуду и форму колебаний* на фазовой плоскости режим автоколебаний (АК) отображается замкнутой фазовой траекторией – **предельным циклом**. Поэтому проследить условия возникновения (АК)

можно на примере возникновения предельного цикла. Существует два режима (АК):

режим **мягкого возбуждения** (образуется устойчивый предельный цикл),

и режим **жесткого возбуждения** (неустойчивый предельный цикл)



Методы исследования АК

- **Критерий Бендиксона** -основан на том, что АК отсутствуют, если в фазовом портрете системы нет замкнутых фазовых траекторий.
- **Метод точечного преобразования А. Андронова** используется для качественного исследования хода фазовых траекторий, выявления АК в системе и изучения их устойчивости.
- **Метод гармонического баланса** (Л.С. Гольдфарб) основан на применении частотных характеристик нелинейной системы, получаемых в результате **гармонической линеаризации**, применяется для приближенного исследования.

Критерий Бендиксона

Область применения: для АСУ, описываемых системой нелинейных дифференциальных уравнений (НДУ):

$$dy_1/dt = F_1(y_1, y_2);$$

$$dy_2/dt = F_2(y_1, y_2),$$

где $F_1(y_1, y_2)$, $F_2(y_1, y_2)$ – нелинейные функции **аналитические** на всей фазовой плоскости.

Если в некоторой области на фазовой плоскости выражение $\partial F_1 / \partial y_1 + \partial F_2 / \partial y_2$ знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых фазовых траекторий (АК).

Пример: в химическом реакторе идеального перемешивания протекает химическая реакция, описываемая уравнениями:

где: y_1 , y_2 – текущие концентрации реагентов в реакторе;

y_{10} , y_{20} – начальные входные концентрации;
 λ – расход; t – время.

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = -y_1^2(t) + y_2(t) + \lambda(y_{10} - y_1(t)); \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = y_1^2(t) - y_2(t) + \lambda(y_{20} - y_2(t)), \end{cases}$$

Находим выражение:

$$\partial F_1 / \partial y_1 + \partial F_2 / \partial y_2 = -2 y_1 - 2 \lambda - 1.$$

В соответствии с физическим смыслом $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, т.е. концентрации не могут быть отрицательными, а также $\lambda > 0$, последнее выражение представляет собой знакопостоянную отрицательную функцию, следовательно, автоколебания существовать не могут.

Метод точечного преобразования

А.Андропова

Система НДУ, описывающих поведение нелинейной АСУ:

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x, y) \quad 1)$$

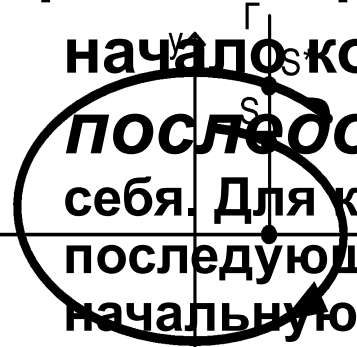
$$\frac{dy}{dt} = F_2(x, y) \quad 2)$$

Уравнение фазовой траектории получим, разделив

уравнение 2) на
уравнение 1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)}$$

При $t \rightarrow \infty$ фазовая траектория последовательно обходит начало координат. $S^* = \Psi(S)$ – функция



последования для точечного преобразования отрезка 0-Г в себя. Для каждой точки пересечения S она позволяет вычислить последующую точку пересечения S^* . Зная $S^* = \Psi(S)$ и, приняв за начальную точку пересечения S_0 , можно вычислить:

Это итерационный процесс.

$$\begin{aligned} \Psi_1(S) &= 0 \\ \Psi_2(S) &= 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Особое значение имеют точки пересечения $S_n = \Psi(S_{n-1})$, $n=1, 2, \dots$ которые преобразуются функцией Ψ в себя:

$$\Psi(S) = S \quad (*)$$

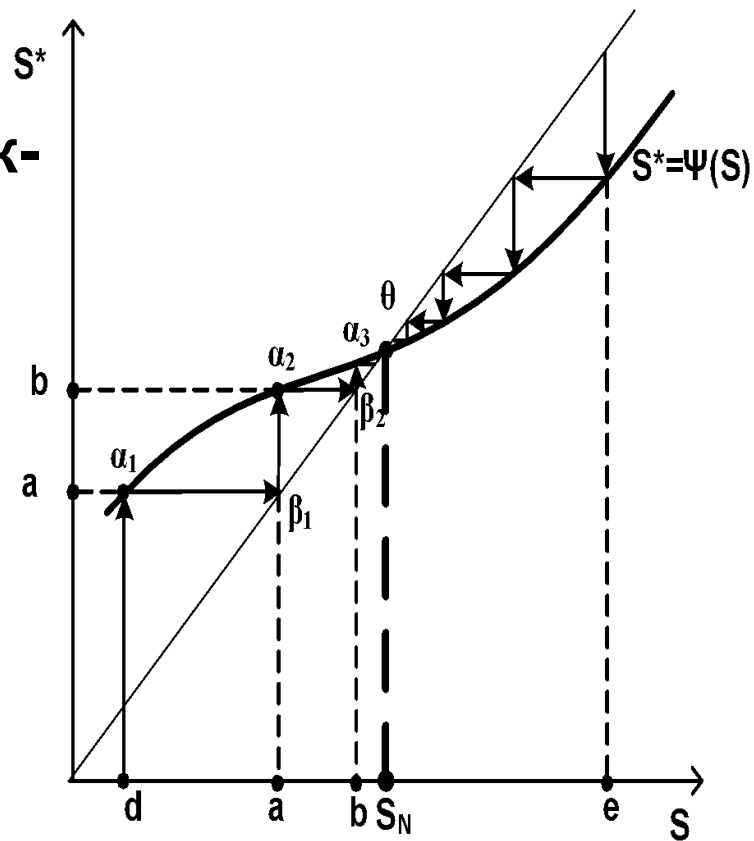
На отрезке «0-Г» S_n , является решением уравнения (*), и называется неподвижной (или инвариантной) точкой преобразования Ψ . Ее наличие свидетельствует об АК

Наглядная геометрическая интерпретация точечного преобразования

Значения начальных точек - s , значения последующих точек - s^* .

Из т. α_1 проводим линию параллельно оси s до пересечения с биссектрисой в т. β_1 . Из т. β_1 проводим перпендикуляр до пересечения с графиком Ψ , в т. α_2 . Из т. α_2 проводим линию, параллельную оси s до пересечения в т. β_2 .

Из т. β_2 проводим перпендикуляр, который пересекает график Ψ в т. α_3 и т.д. Получается «лестница», по которой будем подниматься к т. θ , соответствующей неподвижной т. S_N .



Если начальная $t.S_0$ находится в т. ϵ оси S , то, по лестнице спускаемся к точке θ .

Из рис. видно, что неподвижная $t.S_N$ может быть пределом последовательности итерационного процесса:

$$\Psi_n(S)_{n-1} \quad (*)$$

$t.S_N$ – устойчива (устойчивые АК), если существует такая сколь угодно малая окрестность, что любая последовательность (*), начинающаяся в ней, сходится к $t.S_N$. В противном случае неподвижная $t.S_N$ называется неустойчивой. «Лестница» на диаграмме это наглядно показывает.

Формальный критерий следующий:

Точка S_N устойчива, если удовлетворяется неравенство:

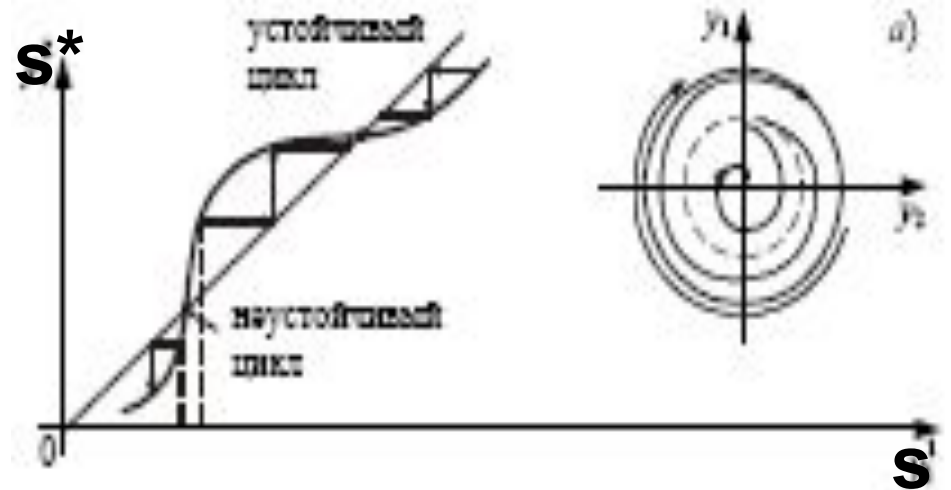
$$\left| \frac{\Psi}{dS} \right| < 1 \quad \text{[]}$$

и неустойчива, если удовлетворяется неравенство:

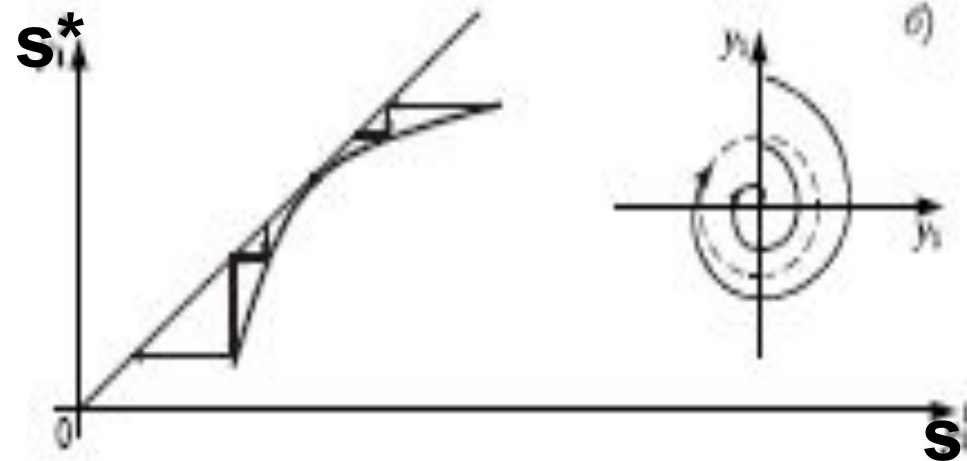
$$\left| \frac{\Psi}{dS} \right| > 1 \quad \text{[]}$$

Варианты точечного преобразования

а – наличие устойчивого и неустойчивого предельных циклов;



б – наличие полустойчивого предельного цикла



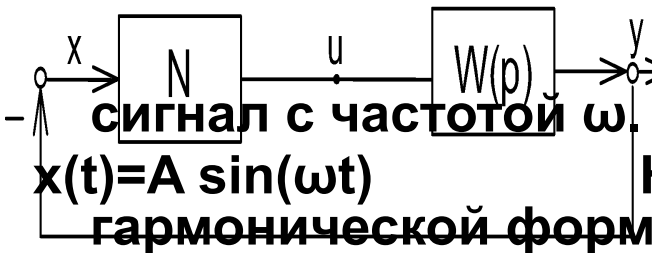
Метод гармонического баланса (Л.С.Гольдфарб)

Исходим из того, что: *Нелинейная замкнутая АСУ состоит из линейной части, имеющей характеристику $W_{лч}(i\omega)$ и объединяющей все линейные элементы системы, и нелинейного звена $Y_{нэ} = F(y)$;*

- **нелинейный элемент не должен быть частото-преобразующим.**
- **нелинейность может быть как статической, так и динамической.**
- **линейная часть должна быть фильтром высоких частот.**

Подобное упрощение для большинства промышленных систем регулирования не несет значительных ошибок.

Фильтр высоких частот



На вход НЭ (N) подается гармонический сигнал с частотой ω .

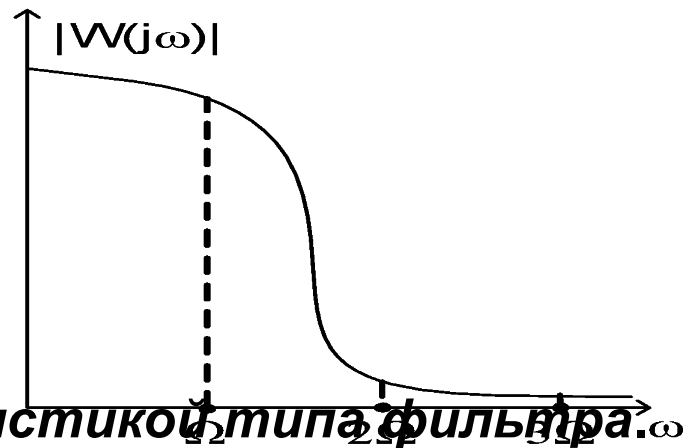
На его выходе устанавливаются колебания, не гармонической формы (например, прямоугольная волна).

$u(t) = N(A \sin(\Omega t))$ - периодическая функция с периодом $T = 2\pi / \Omega$, представим ее рядом Фурье в виде суммы гармоник с частотами $\Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$, они поступают на вход ЛЧ и, проходя через нее, изменяет свою амплитуду в $A_l(k\omega)$ раз, где: $A_l(\omega)$ - АЧХ линейной части.

Гипотеза фильтра высокой частоты выполняется, если АЧХ линейной части удовлетворяет условию

$$A_l(2\Omega) < 0,05 A_l(\Omega),$$

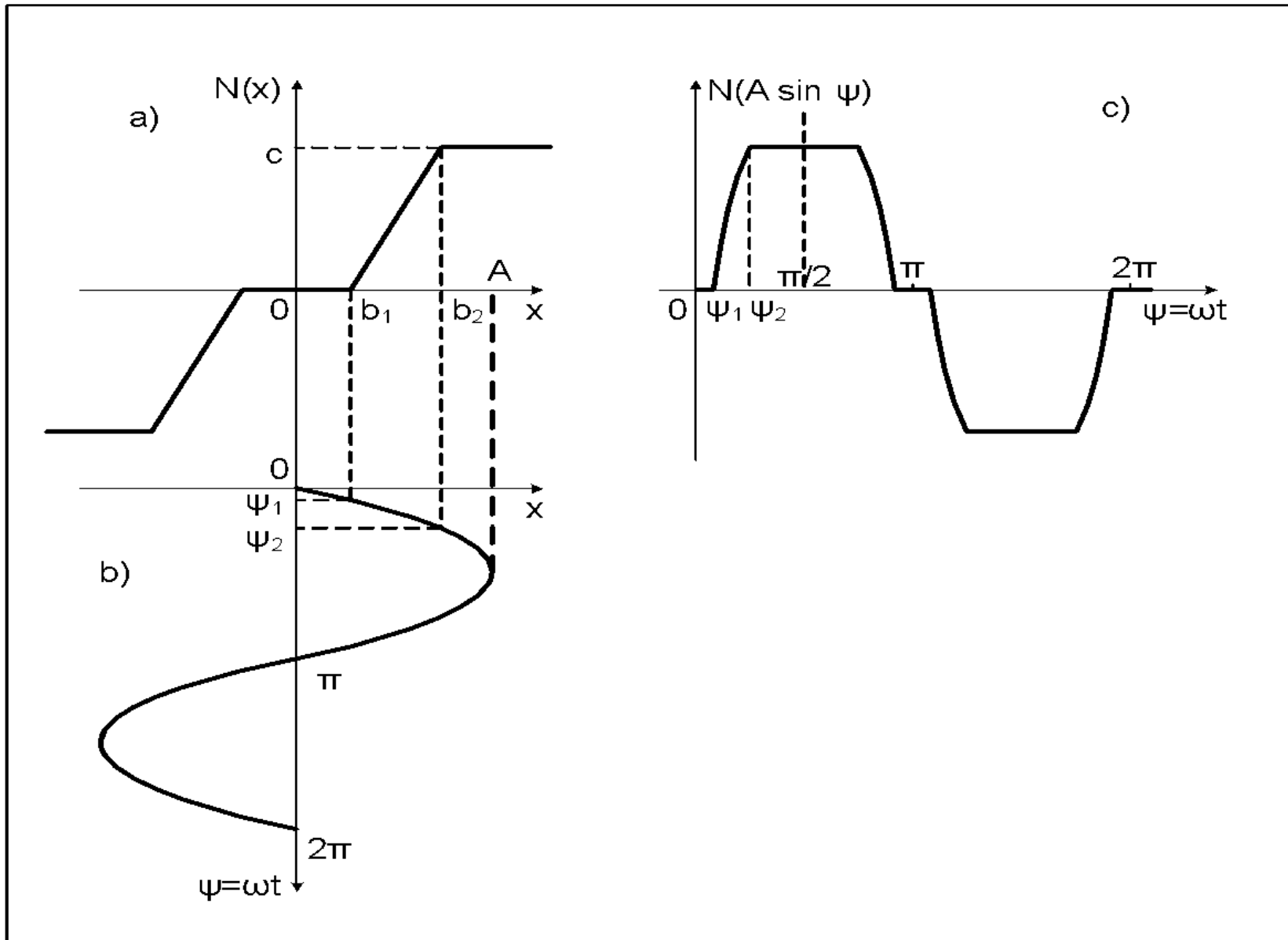
т.е. АЧХ должна быть вида, представленного на рисунке:



Такая АЧХ называется характеристикой типа фильтра.

Система с такой характеристикой не пропускает высокие частоты, поэтому выходной сигнал ЛЧ будет практически содержать лишь первую гармонику с частотой $\omega_a = \Omega$.

Прохождение гармонического сигнала через нелинейный элемент



Метод гармонической линеаризации

Идея принадлежит Н.М. Крылову и Н.Н. Боголюбову и **базируется на замене НЭ - линейным звеном**, параметры которого определяются при гармоническом входном воздействии из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе НЭ и эквивалентного ему линейного звена. Метод используется, если линейная часть системы удовлетворяет условиям «гипотезы фильтра»: отфильтровываются все возникающие на выходе НЭ гармонические составляющие, кроме первой гармоники.

Разложение периодического сигнала в ряд Фурье

Выходной сигнал НЭ $y_{\text{НЭ}}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t)$,

где $a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(A \sin \omega t) d(\omega t)$; a_0 и b_0 со второй имеют достаточно малую амплитуду по сравнению с первой гармоникой и ими можно пренебречь.

$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(A \sin \omega t) \sin k\omega t d(\omega t)$; a_k — коэффициент амплитуды k -й гармоники на выходе.

$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(A \sin \omega t) \cos k\omega t d(\omega t)$.

$y_{\text{НЭ}}(t) \approx a_0 + a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t$ или $y_{\text{НЭ}}(t) \approx C_1 \sin(\omega t + \varphi) + a_0$,

При $C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$; $\varphi = \arctg \frac{b_1}{a_1}$

$y_{\text{НЭ}}(t) \approx C_1 \sin(\omega t + \varphi)$

Вывод: на вход подали гармонический сигнал и на выходе получили также гармонический. Следовательно, в рассмотрение можно ввести частотные характеристики, аналогичные характеристикам линейной системы.

Коэффициенты гармонической линеаризации

$x(t) = A \sin(\omega t)$ – входной сигнал, \rightarrow $\sin(\omega t) = x / A$;

производная входного сигнала в операторной форме ($p = d/dt$):
 $p x = A \omega \cos(\omega t)$, \rightarrow $\cos(\omega t) = p x / A \omega$.

Первая гармоника периодических колебаний на выходе НЭ:

$$Y_{H1} = a_1 \sin(\omega t) + b_1 \cos(\omega t) = a_1 x / A + b_1 p x / A \omega = \\ = (q + q' p / \omega) x;$$

Это уравнение гармонической линеаризации, где: $q = a_1 / A$; $q' = b_1 / A$,
 q и q' - коэффициенты гармонической линеаризации, для различных
нелинейных характеристик они приведены в справочниках по ТАУ.

В общем случае $q(A, \omega)$ и $q'(A, \omega)$ зависят от амплитуды A и частоты ω колебаний на входе НЭ,

- для статических нелинейностей $q(A)$ и $q'(A)$ являются функцией только амплитуды A входного сигнала,
- для статических однозначных нелинейностей $q'(A) =$

В результате гармонической линеаризации НЭ
представлен эквивалентной передаточной функцией:

$$W_{\text{э}}(p) = q + q' p / \omega.$$

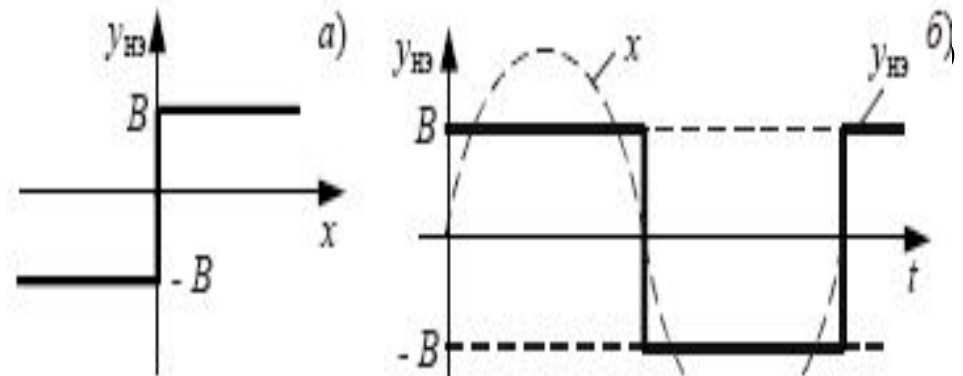
Частотные характеристики гармонически линеаризованного НЭ:

АФЧХ - $W_{\text{э}}(j\omega) = q(A, \omega) + j q'(A, \omega) = A_{\text{э}}(A, \omega) e^{j \varphi_{\text{э}}(A, \omega)}$;

АЧХ - $A_{\text{э}}(A, \omega) = |W_{\text{э}}(j\omega)| = \sqrt{[q(A, \omega)]^2 + [q'(A, \omega)]^2}$

ФЧХ - $\varphi_{\text{э}}(A, \omega) = \arg [W_{\text{э}}(j\omega)] = \arctg [q'(A, \omega) / q(A, \omega)]$.

Статическая характеристика
реле:



При подаче на вход звена гармонического сигнала $x(t)$ на его выходе
установятся прямоугольные колебания, амплитуда которых равна

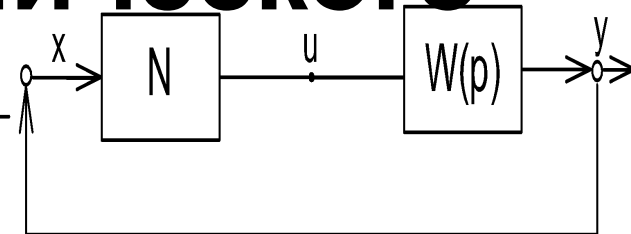
B при $x > 0$, и $-B$ при $x < 0$.

Коэффициенты гармонической линеаризации такой нелинейности:

$q'(A, \omega) = 0$; $W_{\text{э}}(j\omega) = q(A, \omega) = 4B / (\pi A)$;

$\varphi_{\text{э}}(A, \omega) = 0$

Уравнение гармонического баланса



Из структурной схемы АСУ

очевидно соотношение: $x = -y$,

для гармонического сигнала комплексное обозначение

$$x(t) = A \sin(\omega t) = A e^{j\varphi(\omega)}$$

По схеме:

$$y = W_{\Sigma}(A) W_{\Pi}(j\omega) * x = A e^{j\varphi(\omega)} * W_{\Sigma}(A) W_{\Pi}(j\omega) = -A e^{j\varphi(\omega)}$$

Сократим на неравный нулю множитель $A e^{j\varphi(\omega)}$ и получим:

$$W_{\Sigma}(A, \omega) W_{\Pi}(j\omega) = -1$$

уравнение гармонического баланса.

$$-1 = e^{j\varphi(\omega)}$$

где: $\varphi(\omega) = -(2k+1)\pi$, при $k = 0, 1, 2, \dots$

Если удастся найти действительные числа $A = A_a$ и $\omega = \Omega$, которые обращают это уравнение в тождество, то в системе имеют место автоколебания почти гармонической формы с частотой Ω и амплитудой A .

При исследовании нелинейных систем по частотным характеристикам **уравнение гармонического баланса** записывают отдельно для модуля и аргумента эквивалентной комплексной передаточной

функции разомкнутой нелинейной системы:

$$|W_{\text{э}}(A, j\omega)| * |W_{\text{л}}(j\omega)| = 1;$$

$$\arg [W_{\text{э}}(A, j\omega)W_{\text{л}}(j\omega)] = -(2k+1)\pi, \text{ при } k = 0, 1, 2, \dots$$

либо:

$$A_{\text{э}}(A, \omega) * A_{\text{л}}(\omega) = 1;$$

$$\varphi_{\text{э}}(A, \omega) + \varphi_{\text{л}}(\omega) = -(2k+1)\pi, \text{ при } k = 0, 1, 2, \dots$$

Определение параметров АК - (Аа, Ω)

1 этап: Выполнить гармоническую
линеаризацию НЭ -

$$W_{\text{э}}(p) = q + q' * p / \omega.$$

Запишем передаточную функцию
разомкнутой линеаризованной АСУ:

$$\begin{aligned} W_{\text{р}}(p) &= W_{\text{л}}(p) W_{\text{э}}(p) = \\ &= R_{\text{л}}(p) * [q + q' * p / \omega] / Q_{\text{л}}(p). \end{aligned}$$

2 этап: Для оценки возможности возникновения **АК** в линеаризованной нелинейной АСУ найдем

условия границы устойчивости.

Также, как и при анализе устойчивости линейных систем **АК** существуют, если при

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_a \text{ и } \omega = \Omega,$$

характеристическое уравнение
линеаризованной системы

$$Q_{\text{л}}(p) + R_{\text{л}}(p) \times [q(\mathbf{A}, \omega) + q'(\mathbf{A}, \omega) * p/\omega] = 0$$

имеет пару мнимых корней $p_i = j \Omega$ ***и***

$$p_{i+1} = -j \Omega.$$

3 этап: исследовать устойчивость АК

АК устойчивы, если их амплитуда $A = A_a$, частота $\omega = \Omega$ и форма устойчивы к малым возмущениям начальных условий.

Для этого необходимо выполнить условие:

$$\left. \frac{\partial X(A, \omega)}{\partial A} \frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\substack{A=A_a \\ \omega = \Omega}} \left. \frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial A} \frac{\partial X(A, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\substack{A=A_a \\ \omega = \Omega}} > 0$$

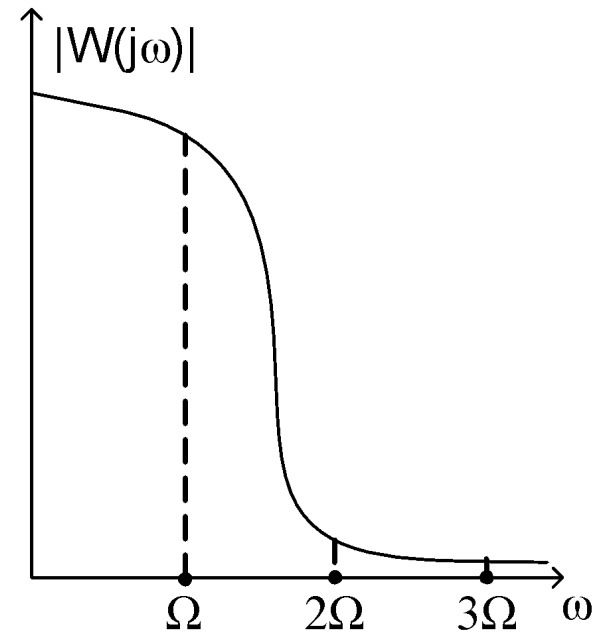
Условие является лишь необходимым, то есть позволяет отсеять заведомо неустойчивые АК.

4 этап: проверить гипотезу фильтра высокой частоты

Построить АЧХ линейной части АСУ $A_{л}(\omega)$ и
проверить выполнение условия:

$$A_{л}(2\Omega) < 0,05A_{л}(\Omega),$$

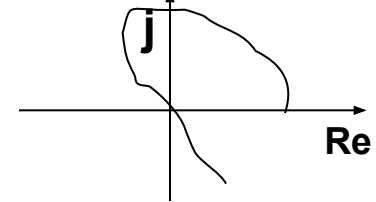
*Если оно не выполняется,
применение метода
гармонической линеаризации
было не правомерно!*



ПО КРИТЕРИЮ МИХАЙЛОВА

АСУ находится на границе устойчивости, если годограф Михайлова $D(j\omega)$ проходит через начало координат, т.е.:

$$D(j\omega) = Q_{\text{л}}(j\omega) + R_{\text{л}}(j\omega) * [q(A, \omega) + j * q'(A, \omega)] = \\ = X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0.$$



параметры **АК** рассчитываются из системы уравнений:

$$(*) \quad \begin{array}{l} X(A, \omega) = 0; \quad \longleftrightarrow \quad A = A_a \\ Y(A, \omega) = 0. \quad \longrightarrow \quad \omega = \Omega \end{array}$$

Из (*) можно найти зависимость **A** и **Ω АК** от параметров АСУ, например, от коэффициента передачи **k** линейной части. Для чего в (*) **k** считают переменной величиной и

записывают в виде: $X(A, \omega, k) = 0;$

$$Y(A, \omega, k) = 0.$$

По графикам $A = f(k)$, $\Omega = f(k)$ можно выбрать такой **k**, при котором **A** и **Ω** возможных **АК** имеют допустимые значения, или они вообще отсутствуют.

Частотный метод (Л.С.Гольдфарб)

По критерию Найквиста незатухающие колебания (**АК**) в гармонически линеаризованной нелинейной АСУ возникают, если АФЧХ разомкнутой АСУ проходит через точку $[-1, j0]$:

$$W_p(j\omega, A) = W_l(j\omega) W_\varepsilon(j\omega, A) = -1. \quad (*)$$

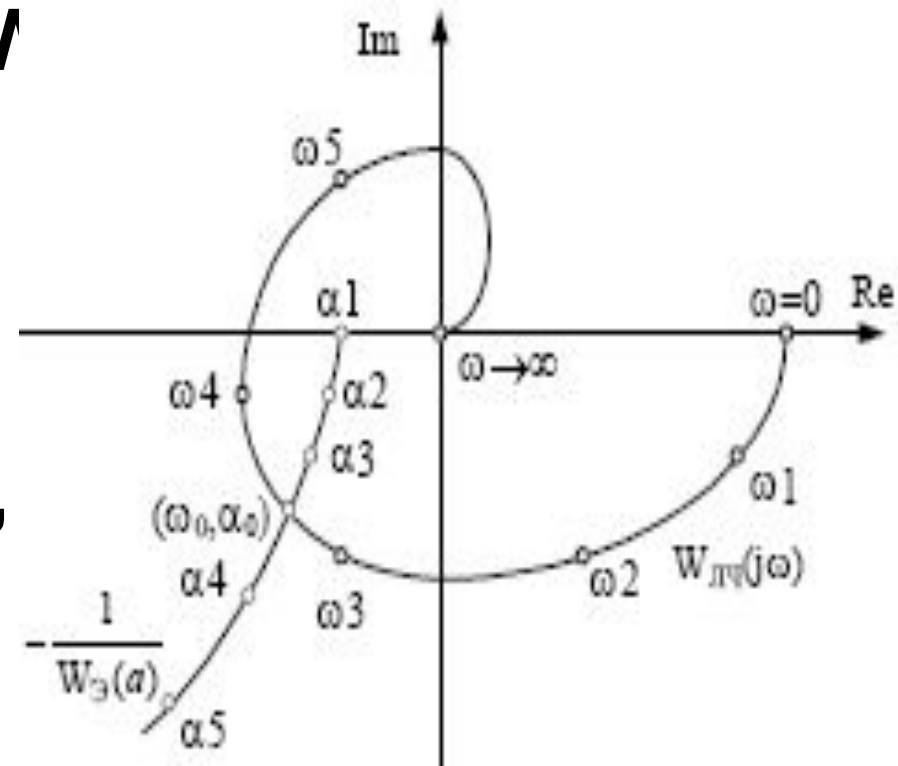
В случае статической характеристики **НЭ** условие (*) принимает вид: $W_l(j\omega) = -1 / W_\varepsilon(j\omega, A)$

Решение этого уравнения относительно Ω и A_a можно получить графически как точку пересечения АФЧХ - $W_l(j\omega)$ и годографа обратной АФЧХ нелинейной части $-1 / W_\varepsilon(j\omega, A)$, взятой с обратным знаком. Если эти годографы не пересекаются, то режим **АК** в АСУ не существует.

Для устойчивости **АК** с частотой Ω и амплитудой A_a требуется, чтобы изображающая точка при перемещении по годографу нелинейной части

$-1/W_3(j\omega, A)$ в направлении увеличения амплитуды A_a подходила к точке пересечения характеристик **$-1/W_3(j\omega, A)$** и **$W_{лн}(j\omega)$** изнутри АФЧХ **V**

На рис. годографы расположены так, что в нелинейной АСУ существуют устойчивые **АК**. Значение A_a определяем на **$-1/W_3(j\omega, A)$** , а Ω - на **$W_{лн}(j\omega)$** .



Исследование АК по ЛЧХ

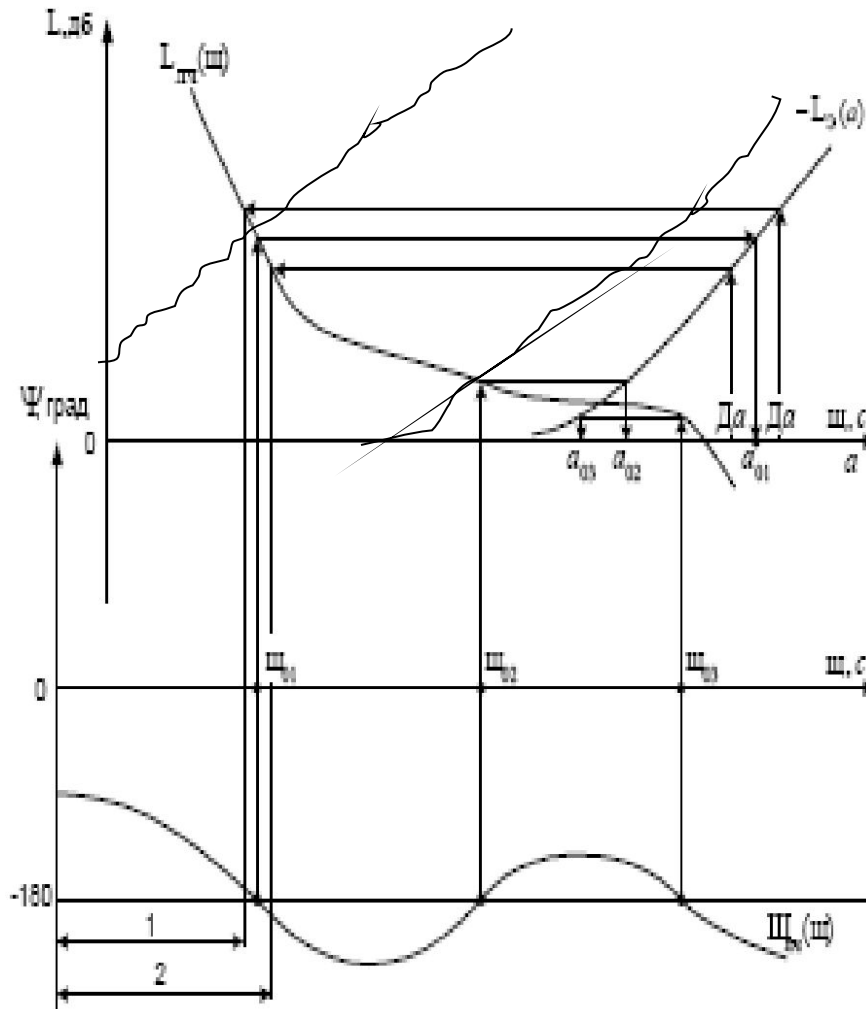
Запишем уравнения гармонического баланса применительно к ЛЧХ: $L_3(A, \omega) + L_l(\omega) = 0$; при $k = 0, 1, 2$,
 $\phi_3(A, \omega) + \phi_l(\omega) = -(2k+1)\pi$,

Коэффициент $q'(A, \omega) = 0$ и $\phi_3(A, \omega) = 0$ для НЭ с однозначными статическими характеристиками. В этом случае АК существуют, если выполняются условия:
 $L_3(A, \omega) = L_l(\omega)$;
 $\phi_l(\omega) = -(2k+1)\pi$, при $k = 0, 1, 2, \dots$
 Решить эти уравнения можно аналитически. Однако, часто целесообразно их решать графически: точки пересечения характеристик должны лежать на одной вертикали.

Для $L_3(A, \omega)$ есть шаблоны!

АК будут устойчивы, если в точке пересечения $\phi_l(\omega)$ с линией $-(2k+1)\pi$ производная $d\phi_l(\omega)/d\omega < 0$.

На рис. устойчивы АК в точках с **Аа1** и **Аа3**.

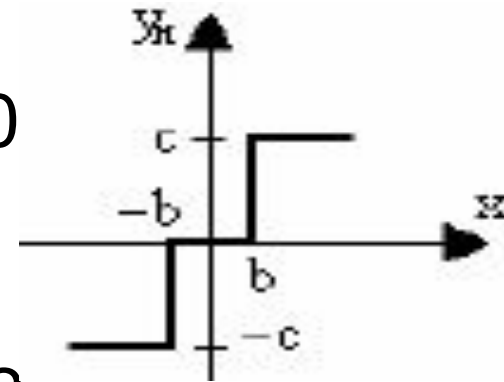


Тренировочное задание

Исследовать **АК** в нелинейной системе, линейная часть которой имеет следующую передаточную функцию

$$W_{\text{л}}(p) = k / [p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)], \text{ где } k = 20 \\ T_1 = 1.5 \text{ с}; T_2 = 0.015 \text{ с},$$

а в качестве **НЭ** используется реле с зоной нечувствительности при $c = 10$, $b = 2$.



Р е ш е н и е. Из справочника для реле с зоной нечувствительности находим коэффициенты

гармонической линеаризации: $q'(A, \omega) = 0$,

$$q(A, \omega) = 4c / (\pi A) \sqrt{1 - (b/A)^2} \text{ при } A \geq b.$$

Ответ: $A_a = 58 \text{ В}; \Omega = 4,3 \text{ рад/с}.$

Тренировочное задание

- В соответствии с критерием Бендиксона в рассматриваемой области не существует замкнутых фазовых траекторий при выполнении определенных условий. Сформулируйте эти условия
- Какая функция называется функцией последования?
- Каким образом в соответствии с методом преобразования можно определить в системе существующий режим?

Тренировочное задание

- Какими свойствами должна обладать линейная часть нелинейной системы, чтобы можно было применить к исследованию режима автоколебаний метод гармонического баланса?
- Какой факт лежит в основе доказательства существования в нелинейной системе автоколебаний?
- Сформулируйте аналог критерия Найквиста для исследования устойчивости автоколебаний.

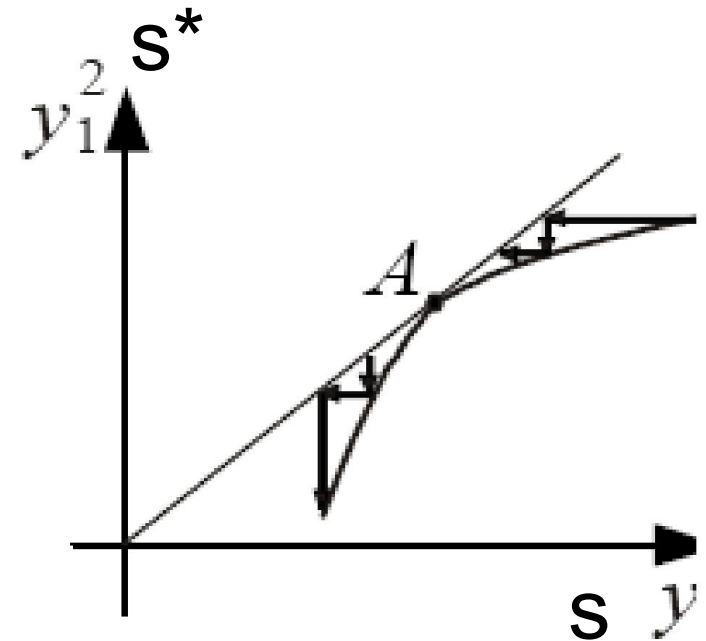
Тренировочное задание

В результате исследования режима автоколебаний методом точечного преобразования получили следующую функцию последования. В точке A будет предельный цикл

A устойчивый;

B неустойчивый;

C полуустойчивый?



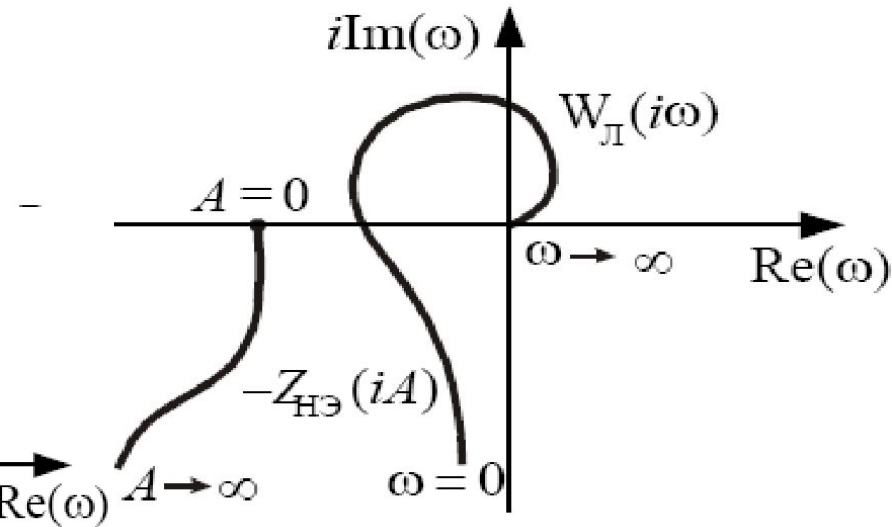
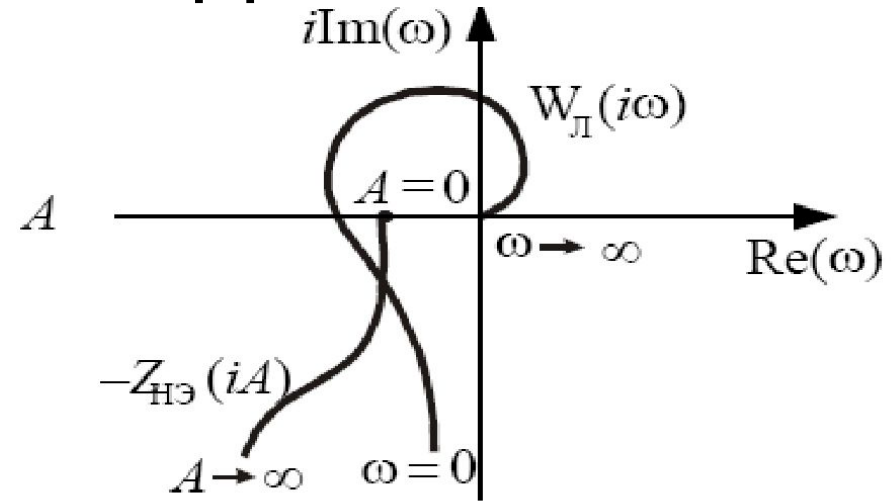
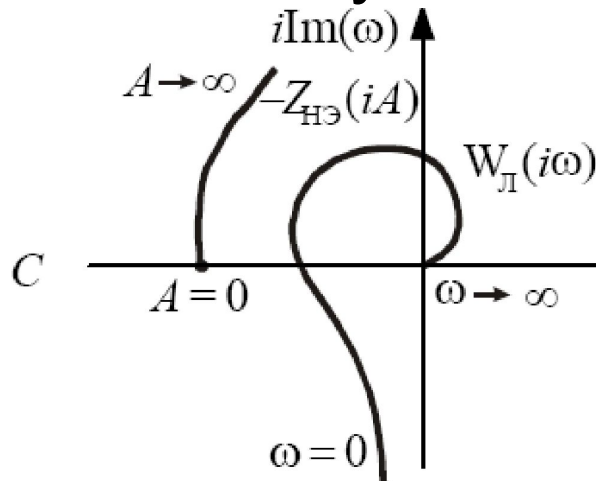
Тренировочное задание

В результате построения функции последования получим $s^* > s$, что свидетельствует о том, что в системе будет процесс

- А -колебательный;
- В -расходящийся;
- С -затухающий.

Тренировочное задание

Согласно методу гармонического баланса в нелинейной системе существует режим автоколебаний, если АФХ линейной части и инверсная АФХ нелинейного элемента расположены следующим образом:



Тренировочное задание

Основное уравнение, используемое в методе гармонического баланса, имеет вид

$$A \quad W_{\text{л}}(i\omega)W_{\text{нэ}}(iA) = -1;$$

$$B \quad W_{\text{л}}(i\omega) + W_{\text{нэ}}(iA) = -1;$$

$$C \quad W_{\text{л}}(i\omega) = W_{\text{нэ}}(iA).$$

Тренировочное задание

В критерии Бендиксона исследуемое выражение должно быть

A -знакопеременным;

B -знакоопределенным

C -знакопостоянным.

$$A \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} ;$$

$$B \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} ;$$

$$C \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} .$$