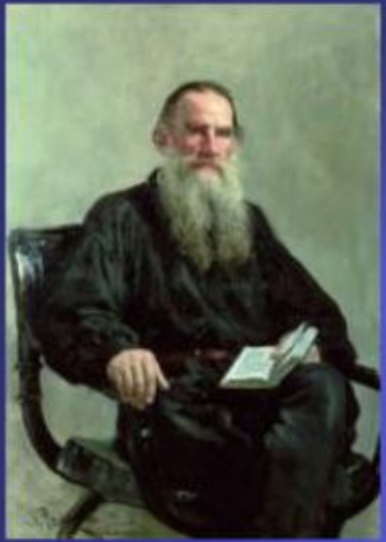


И.Е.Репин
Портрет 1887 г.

Знание только тогда знание, когда оно добыто усилием собственной мысли, а не памятью.

Л.Н.Толстой

Введение

Введение.

1) Развитие понятия о числе. Натуральные числа. Дробные числа. Отрицательные числа. Рациональные и иррациональные числа. Основные законы действий над рациональными числами.
2) Периодические дроби.
3) Элементы вычислительной математики. Вычисления в современной науке и технике. Вычислительные приборы.
4) Абсолютная погрешность и граница абсолютной погрешности приближенных значений чисел.
5) Верные и значащие цифры числа.
6) Относительная погрешность приближенного значения числа. Округление и погрешность округления. Действия над приближенными значениями чисел с учетом границ погрешностей. Вычисления с наперед заданной точностью.

Краткая история развития числа

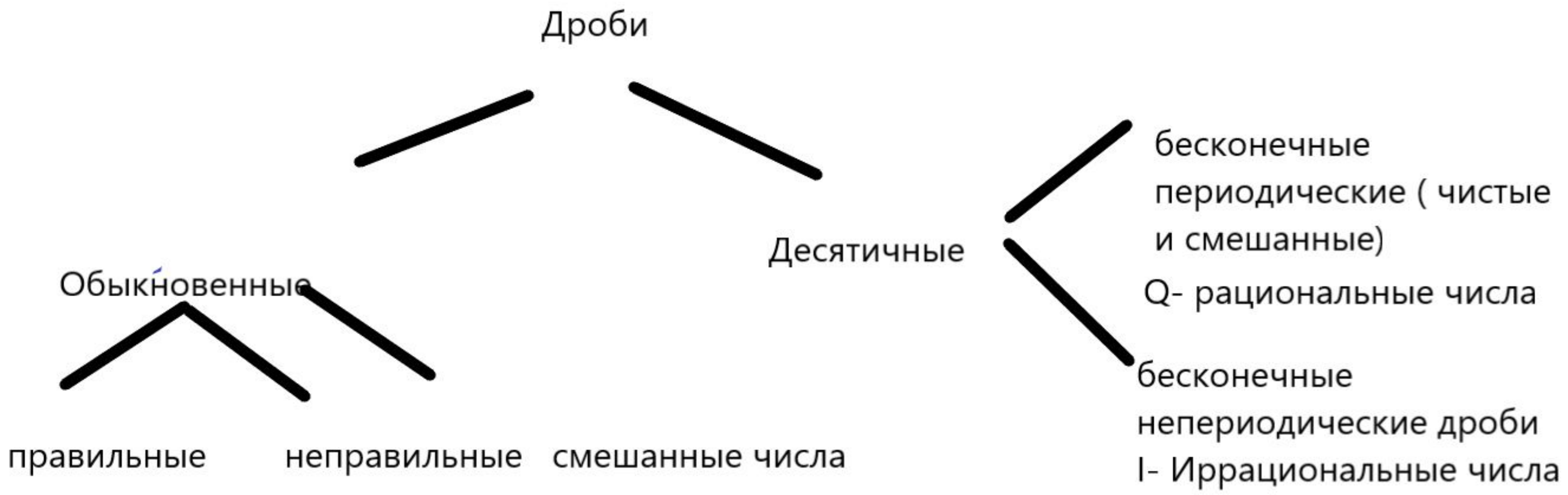
- Первоначальные представления о числе формировались в эпоху каменного века-палеолита. Тогда человек нуждался лиши в нескольких первых числах (примерно 15 тысяч лет тому назад).
- С зарождением обмена продуктами труда возникли понятия больше, меньше, столько же или равно (примерно 10 тысяч лет тому назад).
- С развитием действий с числами и операций над ними возникла наука арифметика.

В III веке до нашей эры Архимед в трактате «Исчисление песчинок» - «Псаммит» показал, что натуральный ряд чисел бесконечен.

Анаксагор(ок. 500-428гг. до н.э.), Аристотель(384-322гг. до н.э.), Евклид считали математическую прямую бесконечной .

Дроби

- Первые дроби возникли как определённые части некоторых мер.
- Герон Александрийский (I-II вв.н.э.) употреблял дроби.
- Диофант (III вв.н.э.) обозначал дробь при помощи черты.
- Дробная черта встречается у ал-Хассара (XIIв.).
- Общеупотребимой она стала только в (XVIв.).
- В России (XVI-XVII вв.) при выговаривании дроби со знаменателем от 5 до 10 прибавляли окончание «инна», для дробей со знаменателем больше 10 к названию прибавлялось слово «жеребей».


Дроби
Обыкновенные
правильные
неправильные
смешанные числа
Десятичные
бесконечные периодические (чистые и смешанные)
Q- рациональные числа
бесконечные непериодические дроби
I- Иррациональные числа

Иррациональные и комплексные числа

- **В IV в. до н.э. Пифагор – несоизмеримые отрезки (диагональ квадрата со стороной 1 - $\sqrt{2}$).**
- **Иррациональные числа.**
- **При решении уравнений встретились с числом $\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Оно получило своё место в множестве комплексных чисел.**
- **С развитием цивилизации число играет всё большую и большую роль в жизни человека.**

РАЗДЕЛ I

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

Глава 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Натуральные и рациональные числа

О ***Число*** — это один из основных математических объектов, абстракция, используемая для количественной характеристики и нумерации объектов.

Возникнув еще в первобытном обществе из потребностей счета, понятие числа изменялось и обогащалось на протяжении всей истории деятельности человечества и превратилось в важнейшее математическое понятие.

Письменными знаками (символами) для записи чисел служат цифры.

Перечислим основные, последовательно расширяющиеся множества (или классы) чисел.

О ***Натуральные числа*** получают при естественном счете; множество натуральных чисел обозначают **N** (**N** = {1, 2, 3, ...}). Иногда к множеству натуральных чисел также относят нуль (**N** = {0, 1, 2, 3, ...}).

Натуральные числа замкнуты относительно сложения и умножения (но не вычитания или деления). Операции сложения и умножения натуральных чисел коммутативны и ассоциативны, операция умножения натуральных чисел дистрибутивна относительно сложения и вычитания.

Важным подмножеством натуральных чисел являются простые числа **P**.

О ***Простое число*** — это натуральное число, имеющее ровно два различных натуральных делителя: единицу и самого себя.

Все остальные натуральные числа, кроме единицы, называют составными. Ряд простых чисел начинается так: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... Любое натуральное число, большее единицы, представимо в виде произведения простых чисел, причем единственным способом с точностью до порядка следования сомножителей. Например, $121\,968 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$.

О ***Целыми числами*** (от фр. *zero* — нуль, подчеркивая тем самым исключительную роль нуля) называют объединение натуральных чисел с множеством отрицательных чисел и нулем и обозначают **Z** (**Z** = {... −2, −1, 0, 1, 2, ...}).

Целые числа замкнуты относительно операций сложения, вычитания и умножения (но не деления).

О ***Рациональными числами*** (от лат. *ratio* — отношения) называют числа, представленные в виде дроби $\frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$, где m — целое число, а n — натуральное число, и обозначают **Q**.

Рациональные числа замкнуты относительно всех четырех арифметических действий: сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль).

Если кроме этих чисел ввести в рассмотрение отрицательные целые числа, положительные и отрицательные дроби, т.е. числа вида $\pm\frac{m}{n}$, где m и n — произвольные натуральные числа и $n \neq 0$, а также число 0, то полученная таким образом совокупность чисел образует класс *рациональных чисел* (обозначение **Q**).

Укажем некоторые важные свойства целых и рациональных чисел.

Признаки делимости целых чисел. Приведем признаки делимости некоторых целых чисел:

1) если число оканчивается четной цифрой или нулем, то оно делится на 2 (например, 20, 126).

! Четные числа — числа вида $2n$, где n — любое натуральное число; нечетные числа — числа вида $2n \pm 1$, где n — любое натуральное число;

2) если число оканчивается цифрой 5 или 0, то оно делится на 5 (например, 35, 70);

3) если сумма цифр числа делится на 3 (на 9), то и само число делится на 3 (на 9) (например, для числа 153 сумма цифр $1 + 5 + 3 = 9$ равна 9, т.е. числу, которое делится на 3 и на 9); 247 851 (сумма цифр $2 + 4 + 7 + 8 + 5 + 1 = 27$ — делится на 3 и на 9);

4) если число оканчивается на 00, то оно делится на 4 и 25; если же две последние цифры составляют число, делящееся на 4 (на 25), то и само число делится на 4 (на 25) (например, 300 делится на 4 и 25, 23 752 делится на 4, так как 52 делится на 4, 42 375 делится на 25, так как 75 делится на 25);

5) если число одновременно делится на 2 и на 3, то оно делится на 6 (например, $810 : 2 = 405$; $810 : 3 = 270$; $810 : 6 = 135$).

Обыкновенные дроби. Приведем определение.

О Дробь вида $\pm\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа ($n \neq 0$), называется ***обыкновенной дробью***. Если $m < n$ — дробь называется правильной (например, $\frac{3}{7}$), если $m \geq n$ — неправильной (например, $\frac{17}{9}$).

Неправильную дробь всегда можно представить в виде суммы целого числа и правильной дроби.

П $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$.

Основное свойство дроби: $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot a}{n \cdot a}$; $\frac{m}{n} = \frac{m : a}{n : a}$, где a — любое ненулевое действительное число.

! Деление числителя и знаменателя дроби на их общий (не равный нулю и единице) делитель называется сокращением дроби.

П 1) $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$; 2) $\frac{15}{18} = \frac{15:3}{18:3} = \frac{5}{6}$; 3) $\frac{1\,680}{2\,640} = \frac{1\,680:10}{2\,640:10} = \frac{168}{264} = \frac{168:6}{264:6} = \frac{28}{44} = \frac{28:4}{44:4} = \frac{7}{11}$.

! Переход от смешанного числа к неправильной дроби следующий: $A\frac{b}{c} = \frac{A \cdot c + b}{c}$.

П $3\frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 5}{7} = \frac{26}{7}$.

Умножение и деление обыкновенных дробей: 1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$; 2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$; 3) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$; 4) $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$; 5) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$; 6) $a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c}$.

Сравнение обыкновенных дробей: при сравнении двух обыкновенных дробей необходимо приводить каждую из них к наименьшему общему знаменателю (НОЗ).

О ***Наименьшим общим знаменателем*** двух (или нескольких) дробей называется наименьшее число, которое нацело делится на знаменатель каждой дроби.

П 1) Найти НОЗ дробей: $4\frac{17}{65}$, $3\frac{3}{10}$ и $5\frac{8}{35}$.

Решение. НОЗ (65; 10; 35) = 910, так как $65 = 5 \cdot 13$; $10 = 5 \cdot 2$; $35 = 5 \cdot 7$ и $910 = 5 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7$.

2) Что больше: а) $\frac{3}{8}$ или $\frac{5}{8}$; б) $\frac{4}{7}$ или $\frac{4}{9}$; в) $\frac{19}{28}$ или $\frac{13}{18}$.

Решение. а) $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$, так как $3 < 5$ и $8 = 8$; б) $\frac{4}{7} > \frac{4}{9}$, так как $7 < 9$ и $4 = 4$; в) $\frac{19}{28} < \frac{13}{18}$, так как $\frac{19}{28} = \frac{171}{252}$ и $\frac{13}{18} = \frac{182}{252}$.

Сложение и вычитание обыкновенных дробей: при сложении и вычитании нескольких обыкновенных дробей необходимо все их приводить к наименьшему общему знаменателю.

П 1) $\frac{6}{7} - \frac{13}{42} + \frac{5}{14} = \frac{6 \cdot 6 - 13 + 5 \cdot 3}{42} = \frac{38}{42} = \frac{19}{21}$; 2) $4\frac{2}{9} + 3\frac{5}{12} = (4 + 3) + \left(\frac{2}{9} + \frac{5}{12}\right) = 7 + \frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot 3}{36} = 7\frac{23}{36}$.

1.2. Иррациональные и действительные числа

$\boxed{\text{О}}$ Числа, представимые в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, называются ***иррациональными числами***.

Например, $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$; $\pi = 3{,}14159\ldots$; $e = 2{,}71828\ldots$

$\boxed{\text{О}}$ Совокупность всех рациональных и всех иррациональных чисел образует множество ***действительных***, или *вещественных*, ***чисел*** (обозначение **R**).

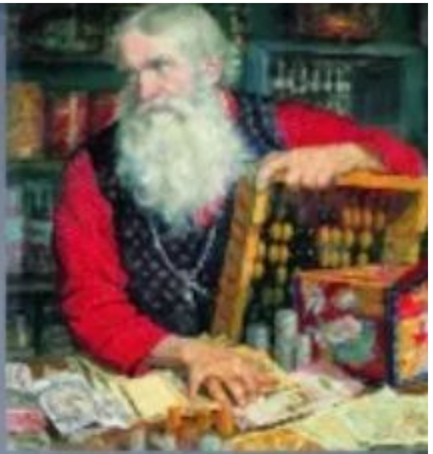
Развитие понятия о числе.

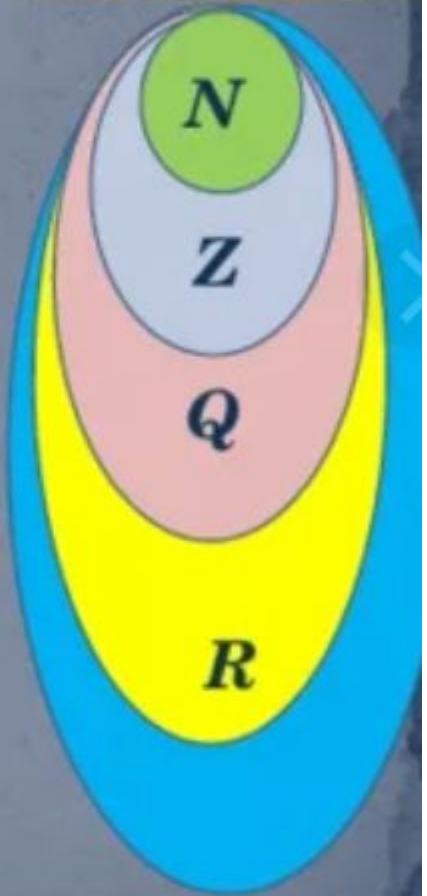
Арифметические действия над числами.

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

История развития понятия числа

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N – «natural»	Сложение, умножение	Вычитание,
Целые числа, Z-«zero»	Сложение, вычитание, умножение	Деление
Рациональные числа, Q-«quotient» - «отношение»	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, R – «real»	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из отрицательных чисел
???	Все операции	





Семь арифметических операций

Вычисления в современной науке и технике

Измерения и вычисления с давних времен играют важную роль в жизни общества . Необходимость подсчитывать урожай, измерять емкость сосудов, размеры земельных участков, производить расчеты при строительстве крупных сооружений, выполнять различные астрономические расчеты и т.д. (приведите свои примеры)

Одним из наиболее значительных событий 20 в необходимо считать освоение человечеством космоса. Полеты на Луну, Венеру, Марс, создание пилотируемых орбитальных станций. Запуск космического корабля был бы немыслим, если бы не был проведен точный расчет движения корабля, а для этого требуется выполнить колоссальную и сложную вычислительную работу.

В век научно – технической революции , роль математических методов возрастает . Математические методы применяются в физике, в химии, биологии, медицине, экономике, истории, психологии, лингвистике.
Вычислительные методы применяются в экономических расчетах , в планировании работы отдельного предприятия, научных и государственных учреждений.

Имеется много задач, в которых для получения численного результата требуются вычисления, превосходящие возможности одного человека. Расчет упругих напряжений в плотине, расчет сопротивлений, испытываемых самолетами при полете или траекторий снарядов – вот примеры таких задач. Десятки инженеров – вычислителей , используя различные вычислительные машины , выполняют эту сложную вычислительную работу.

Вычисления в современной науке и

- Появление ЭВМ вызвало революцию в технике вычислений Но для того , чтобы довести решение математических задач до этапа , после которого они могут быть переданы на вычислительную машину для получения численных результатов, необходим тоже труд многих вычислителей . Создание Эвм стимулировало развитие самой математики , особенно ее прикладных направлений.

- **Прикладная математика** — **направление**, связанное с разработкой и применением математических методов для решения практических научных, инженерных, управленческих и экономических задач на базе современных информационных технологий.

- Вычисления теперь играют не вспомогательную, а основную роль во многих научных и технических достижениях. Во всех случаях, когда нужно довести до конца решение какой- либо математической задачи практического характера , необходимо получить численный результат. Надо уметь оценивать точность исходных данных , а также определять , какая точность результата может быть достигнута и какая точность результата нужна при практическом использовании полученных численных результатов. В одних вычислениях требуется получить результат с очень большой точностью, а в других такая точность не требуется.

- Отсюда ясно , что нужно организовывать вычисления так, чтобы получать результаты с требуемой точностью при минимальной затрате труда. Для достижения этой цели необходимо: 1) изучить принципы и правила вычислений с приближенными данными; 2) овладеть навыками рациональных вычислений с помощью приемов устных вычислений, математических таблиц, конторские счеты, автоматические вычислительные машины

Арифмо́метр — настольная или портативная механическая вычислительная машина, предназначенная для точного умножения и деления, а также для сложения и вычитания.

Был первым цифровым механическим калькулятором, достаточно прочным и надежным, чтобы его можно было ежедневно использовать в офисе.

Логарифми́ческая лине́йка, счётная **линейка** — аналоговое вычислительное устройство, позволяющее выполнять несколько математических операций.

Аба́к — семейство счётных досок, применявшихся для арифметических вычислений в древних культурах — Древней Греции, Древнем Риме и Древнем Китае и ряде других.

В первоначальном виде представляли собой глиняную пластинку с желобами. Один желобок предназначался для единиц, а другой для десятков и тд.