

И.Е.Репин
Портрет 1887 г.



*Знание только тогда
знание, когда оно
добыто усилием
собственной мысли, а не
памятью.*

Л.Н.Толстой

Введение

Введение.

- 1) Развитие понятия о числе. Натуральные числа. Дробные числа. Отрицательные числа. Рациональные и иррациональные числа. Основные законы действий над рациональными числами.
 - 2) Периодические дроби.
- 3) Элементы вычислительной математики. Вычисления в современной науке и технике. Вычислительные приборы.
- 4) Абсолютная погрешность и граница абсолютной погрешности приближенных значений чисел.
 - 5) Верные и значащие цифры числа.
- 6) Относительная погрешность приближенного значения числа. Округление и погрешность округления. Действия над приближенными значениями чисел с учетом границ погрешностей. Вычисления с наперед заданной точностью.

Краткая история развития числа

- Первоначальные представления о числе формировались в эпоху каменного века-палеолита. Тогда человек нуждался лишь в **нескольких первых числах** (примерно 15 тысяч лет тому назад).
- С зарождением обмена продуктами труда возникли понятия **больше, меньше, столько же или равно** (примерно 10 тысяч лет тому назад).
- С развитием действий с числами и операций над ними возникла наука **арифметика**.

В III веке до нашей эры Архимед в трактате «Исчисление песчинок» - «Псаммит» показал, что **натуральный ряд чисел бесконечен**.

Анаксагор(ок. 500-428гг. до н.э.), Аристотель(384-322гг. до н.э.), Евклид считали **математическую прямую бесконечной** .

Дроби

- Первые дроби возникли как определённые части некоторых мер.
- Герон Александрийский (I-II вв.н.э.) употреблял дроби.
- Диофант (III вв.н.э.) обозначал дробь при помощи черты.
- Дробная черта встречается у ал-Хассара (XIII в.).
- Общеупотребимой она стала только в (XVI в.).
- В России (XVI-XVII вв.) при выговаривании дроби со знаменателем от 5 до 10 прибавляли окончание «инна», для дробей со знаменателем больше 10 к названию прибавлялось слово «жеребей».

Дроби



Обыкновенные

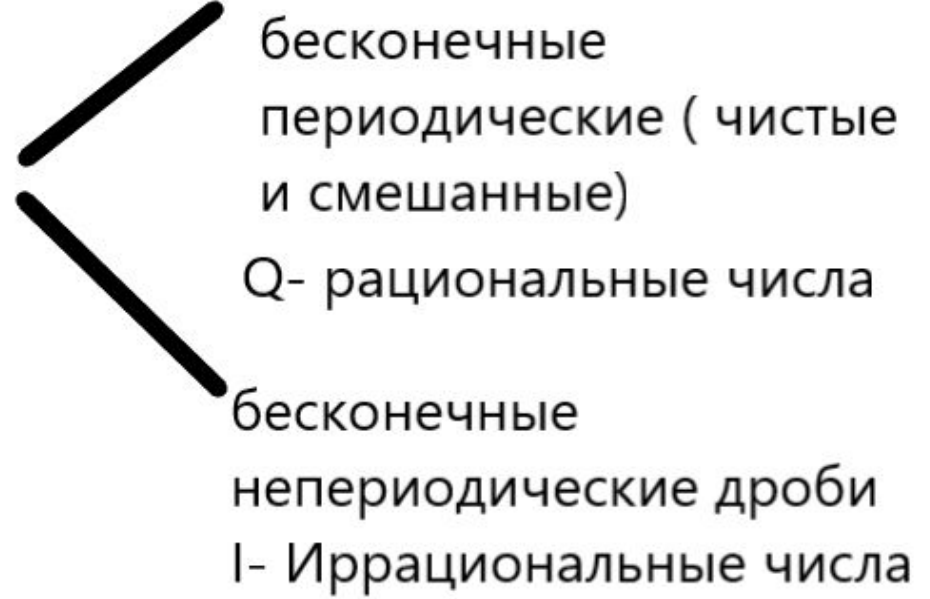


правильные

неправильные

смешанные числа

Десятичные



бесконечные
периодические (чистые
и смешанные)

Q- рациональные числа

бесконечные
непериодические дроби
I- Иррациональные числа

Иррациональные и комплексные числа

- В IV в. до н.э. Пифагор – несоизмеримые отрезки (диагональ квадрата со стороной 1 - $\sqrt{2}$).
- Иррациональные числа.
- При решении уравнений встретились с числом $\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Оно получило своё место в множестве комплексных чисел.
- С развитием цивилизации число играет всё большую и большую роль в жизни человека.

Глава 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Натуральные и рациональные числа

О *Число* — это один из основных математических объектов, абстракция, используемая для количественной характеристики и нумерации объектов.

Возникнув еще в первобытном обществе из потребностей счета, понятие числа изменялось и обогащалось на протяжении всей истории деятельности человечества и превратилось в важнейшее математическое понятие.

Письменными знаками (символами) для записи чисел служат цифры.

Перечислим основные, последовательно расширяющиеся множества (или классы) чисел.

О *Натуральные числа* получают при естественном счете; множество натуральных чисел обозначают \mathbf{N} ($\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$). Иногда к множеству натуральных чисел также относят ноль ($\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$).

Натуральные числа замкнуты относительно сложения и умножения (но не вычитания или деления). Операции сложения и умножения натуральных чисел коммутативны и ассоциативны, операция умножения натуральных чисел дистрибутивна относительно сложения и вычитания.

Важным подмножеством натуральных чисел являются простые числа \mathbf{P} .

О Простое число — это натуральное число, имеющее ровно два различных натуральных делителя: единицу и самого себя.

Все остальные натуральные числа, кроме единицы, называют составными. Ряд простых чисел начинается так: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, Любое натуральное число, большее единицы, представимо в виде произведения простых чисел, причем единственным способом с точностью до порядка следования сомножителей. Например, $121\,968 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$.

О Целыми числами (от фр. *zero* — ноль, подчеркивая тем самым исключительную роль нуля) называют объединение натуральных чисел с множеством отрицательных чисел и нулем и обозначают \mathbf{Z} ($\mathbf{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$).

Целые числа замкнуты относительно операций сложения, вычитания и умножения (но не деления).

О Рациональными числами (от лат. *ratio* — отношения) называют числа, представленные в виде дроби $\frac{m}{n}$ ($n \neq 0$), где m — целое число, а n — натуральное число, и обозначают \mathbf{Q} .

Рациональные числа замкнуты относительно всех четырех арифметических действий: сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на ноль).

Если кроме этих чисел ввести в рассмотрение отрицательные целые числа, положительные и отрицательные дроби, т.е. числа вида $\pm \frac{m}{n}$, где m и n — произвольные натуральные числа и $n \neq 0$, а также число 0, то полученная таким образом совокупность чисел образует класс *рациональных чисел* (обозначение \mathbf{Q}).

Укажем некоторые важные свойства целых и рациональных чисел.

Признаки делимости целых чисел. Приведем признаки делимости некоторых целых чисел:

1) если число оканчивается четной цифрой или нулем, то оно делится на 2 (например, 20, 126).

! Четные числа — числа вида $2n$, где n — любое натуральное число; нечетные числа — числа вида $2n \pm 1$, где n — любое натуральное число;

2) если число оканчивается цифрой 5 или 0, то оно делится на 5 (например, 35, 70);

3) если сумма цифр числа делится на 3 (на 9), то и само число делится на 3 (на 9) (например, для числа 153 сумма цифр $1 + 5 + 3 = 9$ равна 9, т.е. числу, которое делится на 3 и на 9); 247 851 (сумма цифр $2 + 4 + 7 + 8 + 5 + 1 = 27$ — делится на 3 и на 9);

4) если число оканчивается на 00, то оно делится на 4 и 25; если же две последние цифры составляют число, делящееся на 4 (на 25), то и само число делится на 4 (на 25) (например, 300 делится на 4 и 25, 23 752 делится на 4, так как 52 делится на 4, 42 375 делится на 25, так как 75 делится на 25);

5) если число одновременно делится на 2 и на 3, то оно делится на 6 (например, $810 : 2 = 405$; $810 : 3 = 270$; $810 : 6 = 135$).

Обыкновенные дроби. Приведем определение.

О Дробь вида $\pm \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа ($n \neq 0$), называется **обыкновенной дробью**. Если $m < n$ — дробь называется правильной (например, $\frac{3}{7}$), если $m \geq n$ — неправильной (например, $\frac{17}{9}$).

Неправильную дробь всегда можно представить в виде суммы целого числа и правильной дроби.

П $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$.

Основное свойство дроби: $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot a}{n \cdot a}$; $\frac{m}{n} = \frac{m : a}{n : a}$, где a — любое ненулевое действительное число.

! Деление числителя и знаменателя дроби на их общий (не равный нулю и единице) делитель называется сокращением дроби.

П 1) $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$; 2) $\frac{15}{18} = \frac{15 : 3}{18 : 3} = \frac{5}{6}$; 3) $\frac{1\ 680}{2\ 640} = \frac{1\ 680 : 10}{2\ 640 : 10} = \frac{168}{264} = \frac{168 : 6}{264 : 6} = \frac{28}{44} = \frac{28 : 4}{44 : 4} = \frac{7}{11}$.

! Переход от смешанного числа к неправильной дроби следующий:
 $A \frac{b}{c} = \frac{A \cdot c + b}{c}$.

П $3 \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 5}{7} = \frac{26}{7}$.

Умножение и деление обыкновенных дробей: 1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$; 3) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$; 4) $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$; 5) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$;

6) $a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d}$.

Сравнение обыкновенных дробей: при сравнении двух обыкновенных дробей необходимо приводить каждую из них к наименьшему общему знаменателю (НОЗ).

О *Наименьшим общим знаменателем* двух (или нескольких) дробей называется наименьшее число, которое нацело делится на знаменатель каждой дроби.

П 1) Найти НОЗ дробей: $4\frac{17}{65}$, $3\frac{3}{10}$ и $5\frac{8}{35}$.

Решение. НОЗ (65; 10; 35) = 910, так как $65 = 5 \cdot 13$; $10 = 5 \cdot 2$; $35 = 5 \cdot 7$ и $910 = 5 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7$.

2) Что больше: а) $\frac{3}{8}$ или $\frac{5}{8}$; б) $\frac{4}{7}$ или $\frac{4}{9}$; в) $\frac{19}{28}$ или $\frac{13}{18}$.

Решение. а) $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$, так как $3 < 5$ и $8 = 8$; б) $\frac{4}{7} > \frac{4}{9}$, так как $7 < 9$ и $4 = 4$; в) $\frac{19}{28} < \frac{13}{18}$, так как $\frac{19}{28} = \frac{171}{252}$ и $\frac{13}{18} = \frac{182}{252}$.

Сложение и вычитание обыкновенных дробей: при сложении и вычитании нескольких обыкновенных дробей необходимо все их приводить к наименьшему общему знаменателю.

П 1) $\frac{6}{7} - \frac{13}{42} + \frac{5}{14} = \frac{6 \cdot 6 - 13 + 5 \cdot 3}{42} = \frac{38}{42} = \frac{19}{21}$; 2) $4\frac{2}{9} + 3\frac{5}{12} = (4 + 3) + \left(\frac{2}{9} + \frac{5}{12}\right) = 7 + \frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot 3}{36} = 7\frac{23}{36}$.

1.2. Иррациональные и действительные числа

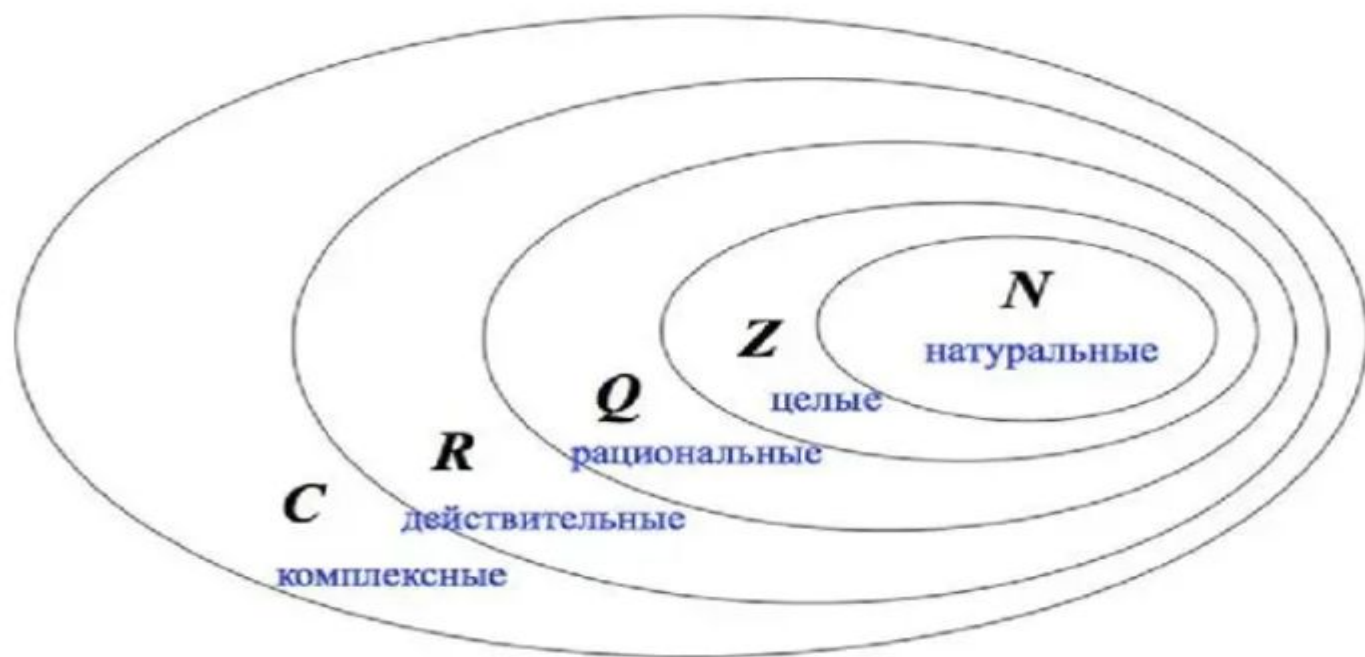
□ Числа, представимые в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, называются *иррациональными числами*.

Например, $\sqrt{2} = 1,41421\dots$; $\pi = 3,14159\dots$; $e = 2,71828\dots$

□ Совокупность всех рациональных и всех иррациональных чисел образует множество *действительных*, или *вещественных, чисел* (обозначение **R**).

Развитие понятия о числе.

Арифметические действия над числами.

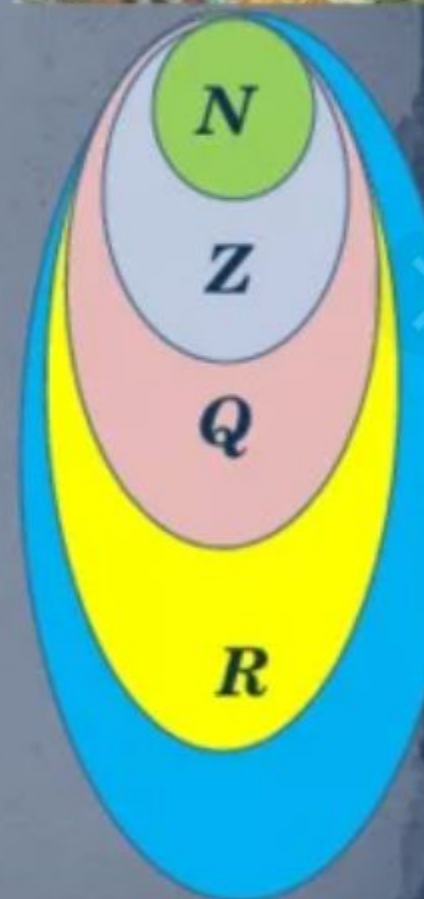


$$\mathbf{N \subset Z \subset Q \subset R \subset C.}$$

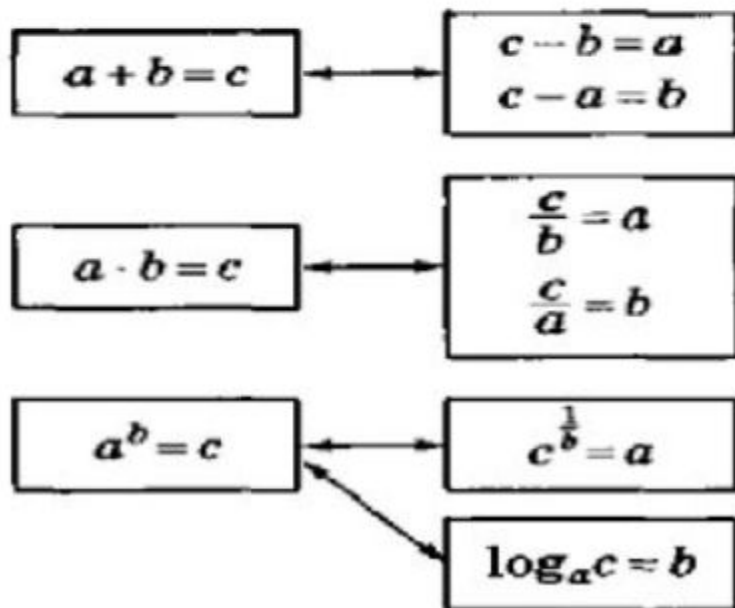
История развития понятия числа



Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N – «natural»	Сложение, умножение	Вычитание,
Целые числа, Z -«zero»	Сложение, вычитание, умножение	Деление
Рациональные числа, Q -«quotient» - «отношение»	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, R – «real»	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из отрицательных чисел
???	Все операции	



Семь арифметических операций



Вычисления в современной науке и технике

Измерения и вычисления с давних времен играют важную роль в жизни общества . Необходимость подсчитывать урожай, измерять емкость сосудов, размеры земельных участков, производить расчеты при строительстве крупных сооружений, выполнять различные астрономические расчеты и т.д. (**приведите свои примеры**)

Одним из наиболее значительных событий 20 в необходимо считать освоение человечеством космоса. Полеты на Луну, Венеру, Марс, создание пилотируемых орбитальных станций. Запуск космического корабля был бы немыслим, если бы не был проведен точный расчет движения корабля, а для этого требуется выполнить колоссальную и сложную вычислительную работу.

В век научно – технической революции , роль математических методов возрастает . Математические методы применяются в физике, в химии, биологии, медицине, экономике, истории, психологии, лингвистике.

Вычислительные методы применяются в экономических расчетах , в планировании работы отдельного предприятия, научных и государственных учреждений.

Имеется много задач, в которых для получения численного результата требуются вычисления, превосходящие возможности одного человека. Расчет упругих напряжений в плотине, расчет сопротивлений, испытываемых самолетами при полете или траекторий снарядов – вот примеры таких задач. Десятки инженеров – вычислителей , используя различные вычислительные машины , выполняют эту сложную вычислительную работу.

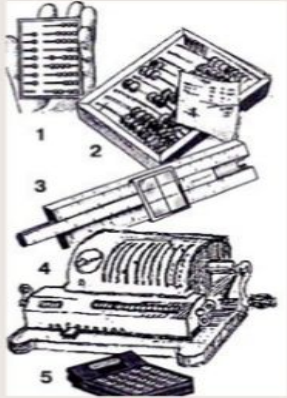
Вычисления в современной науке и

- Появление **ЭВМ** вызвало революцию в технике вычисления по тому, чтобы довести решение математических задач до этапа, после которого они могут быть переданы на вычислительную машину для получения численных результатов, необходим тоже труд многих вычислителей. Создание Эвм стимулировало развитие самой математики, особенно ее прикладных направлений.
- **Прикладная математика** — направление, связанное с разработкой и применением математических методов для решения практических научных, инженерных, управленческих и экономических задач на базе современных информационных технологий.
- **Вычисления** теперь играют не вспомогательную, а основную роль во многих научных и технических достижениях. Во всех случаях, когда нужно довести до конца решение какой-либо математической задачи практического характера, необходимо **получить численный результат**. Надо уметь оценивать точность исходных данных, а также определять, какая точность результата может быть достигнута и какая точность результата нужна при практическом использовании полученных численных результатов. В одних вычислениях требуется получить результат с очень большой точностью, а в других такая точность не требуется.
- Отсюда ясно, что нужно организовывать вычисления так, чтобы получать результаты с требуемой точностью при минимальной затрате труда. Для достижения этой цели необходимо: 1) изучить принципы и правила вычислений **с приближенными данными**; 2) овладеть **навыками рациональных вычислений** с помощью приемов устных вычислений, математических таблиц, конторские счета, автоматические вычислительные машины.

Вычислительные приборы



Пальцы



1. Греческий абак V
2. Русские счёты XVI-XVII
3. Логарифмическая линейка XVII Джон Непер
4. Арифмометр
5. Калькулятор XX

Арифмометр — настольная или портативная механическая вычислительная машина, предназначенная для точного умножения и деления, а также для сложения и вычитания. Был первым цифровым механическим калькулятором, достаточно прочным и надежным, чтобы его можно было ежедневно использовать в офисе.

Логарифмическая линейка, **счётная линейка** — аналоговое вычислительное устройство, позволяющее выполнять несколько математических операций.

Абак — семейство счётных досок, применявшихся для арифметических вычислений в древних культурах — Древней Греции, Древнем Риме и Древнем Китае и ряде других.

В первоначальном виде представляли собой глиняную пластинку с желобами. Один желобок предназначался для единиц, а другой для десятков и тд.



