Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ. Лекция 21-ого октября 2020 года

§ Общее решение неоднородного уравнения.

Теорема (об общем решении неоднородного уравнения)

Пусть $\mathcal{L}(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f$ ①

1) Общее решение уравнения ① имеет вид:

$$y_{он} = y_{oo} + y_{чн}$$

2) Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — ФСР уравнения (1_0), а $y_{чн}(x)$ — некоторое частное решение уравнения ①. Тогда общее решение уравнения ① имеет вид: $y_{он} = y_{чн} + \sum_{k=1}^{n} C_k y_k$, где C_k, $k = \overline{1,n}$ произвольные постоянные.

Док-во) 1) При любых постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ функция $y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k + y_{чн}$ является решением уравнения ①

$(y = y_{oo} + y_{чн})$ Действительно,

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(y_{oo} + y_{чн}) = \mathcal{L}y_{oo} + \mathcal{L}y_{чн} = 0 + f = f$$

2) Докажем, что для любого $y(x)$ — решения уравнения ① и $y_{чн}(x)$ — частного решения уравнения ① найдутся числа $C_1, C_2, \dots, C_n$ такие что:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_{чн}$$

Рассмотрим функцию $z = y - y_{чн}$

Тогда, очевидно, z является решением уравнения (1₀). Действительно,

$$\mathcal{L}z = \mathcal{L}(y - y_{чн}) = \mathcal{L}y - \mathcal{L}y_{чн} = f - f = 0$$

Тогда $y - y_{чн}$ можно разложить по базису $y_1, y_2, \dots, y_n$ (ФСР) пространства H, то есть существуют числа $C_1, C_2, \dots, C_n$ такие, что $y - y_{чн} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k$. Следовательно, существуют числа $C_1, C_2, \dots, C_n$ такие что

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k + y_{чн} \qquad \#$$

§ Решение неоднородного уравнения методом вариации постоянных

$$\mathcal{L}y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f \qquad (1)$$

и пусть $y_1, y_2, \dots, y_n(x)$ — ФСР уравнения

$$\mathcal{L}y = 0 \qquad (1_0)$$

1) Тогда $y_{оо} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$, где $C_k = const$, $k = \overline{1,n}$

2) Будем искать решение уравнения (1) в виде:

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x) \qquad (*)$$

где функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ подберём так, чтобы при подстановке $(*)$ в (1) получилось верное равенство.

Для этого уравнение (1) сведём к эквивалентной системе (I)

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{f} \qquad (\mathrm{I})$$

где $\vec{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$, $\vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$

Тогда $(*)$ запишется в виде:

$$\vec{y} = Y(x)\vec{C}(x) \qquad (*')$$

где $Y(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$ — фундаментальная матрица системы (I_0)

Подставляя $(*')$ в (I) получим:

$$Y'(x)\cdot\vec{C}(x) + Y(x)\vec{C}'(x) = AY\vec{C}(x) + \vec{f},$$

Так как $Y' = AY$, то получим

$$Y\cdot\vec{C}'(x) = \vec{f} \qquad (**)$$

или расписывая $(**)$ по координатам,

получим:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f \end{cases}$$

Из этой системы по теореме Крамера получим: $C_k'(x) = \dfrac{W_k(x)}{W(x)}$, $k=\overline{1,n}$,

где $W(x)$ – определитель Вронского от ФСР $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, который всегда отличен от нуля (то есть $W(x) \neq 0$ для $\forall x \in [a;b]$),

а $W_k(x) = \det[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{k-1}, \vec{f}, \vec{y}_{k+1}, \dots, \vec{y}_n]$

Тогда $C_k(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{W_k(\tau)}{W(\tau)}d\tau + C_k^0$, $k=\overline{1,n}$

Подставляя найденные значения $C_k(x)$ в ⊛ получим

$$y_{он}(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{x_0}^{x}\frac{W_k(\tau)}{W(\tau)}d\tau + C_k^0\right)y_k(x)$$

§ Линейные уравнения n-ого порядка с комплексными коэффициентами

$$\mathcal{L}z = z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = f \qquad (1)$$

где $z = u(x) + i\,v(x)$, $a_k = \alpha_k(x) + i\beta_k(x)$, $k = \overline{1, n}$

$f = F(x) + i\,G(x)$. Здесь $u(x)$ и $v(x)$ неизвестные вещественные функции, а $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$ $F(x)$ и $G(x)$ – заданные вещественные функции.

Тогда:

$$u^{(n)} + i v^{(n)} + (\alpha_1 + i\beta_1)(u^{(n-1)} + i v^{(n-1)}) + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)(u + iv) = F + iG$$

Приравнивая в этом равенстве вещественные и мнимые части, получим:

$$\begin{cases} u^{(n)} + (\alpha_1 u^{(n-1)} - \beta_1 v^{(n-1)}) + \dots + (\alpha_n u - \beta_n v) = F \\ v^{(n)} + (\alpha_1 v^{(n-1)} + \beta_1 u^{(n-1)}) + \dots + (\alpha_n v + \beta_n u) = G \end{cases} \qquad (A)$$

<u>Вывод</u>: Уравнение (1) с комплексными коэффициентами эквивалентно системе (A) 2-х уравнений n-ого порядка с вещественными коэффициентами относительно двух неизвестных вещественных функций.

<u>Фундаментальное замечание</u> Если в уравне-

ним (1) $f\equiv 0$ и $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ — вещественные функции. Тогда если $z=u(x)+iv(x)$ решение уравнения (1_0) ($\mathcal{L}z=0$), то $u(x)=\operatorname{Re} z(x)$ и $v(x)=\operatorname{Im} z(x)$ также являются решениями уравнения (1_0)

Док-во Непосредственно следует из (A) #

§ Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}y=a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_n y=f \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные числа

Рассмотрим однородное уравнение

$$\mathcal{L}y=a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_n y=0 \qquad (1_0)$$

Задача Как найти ФСР уравнения (1_0)

Будем искать решения уравнения (1_0) в виде $y=e^{\lambda x}$. Выясним когда функция $y=e^{\lambda x}$ будет решением уравнения (1_0)?

Для этого подставим функцию $y=e^{\lambda x}$ в уравнение (1_0). В результате получим: $\mathcal{L}(e^{\lambda x}) = (a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n)e^{\lambda x} = 0$

или разделив это равенство на $e^{\lambda x} \neq 0$,

получим: $F(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$ (*)

Это уравнение называется характеристическим уравнением уравнения (1_0)

$F = F(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ называется характеристическим многочленом уравнения (1_0)

<u>Вывод.</u> Функция $y = e^{\lambda x}$ является решением уравнения (1_0) тогда и только тогда, когда λ является корнем характеристического уравнения $F(\lambda) = 0$.

<u>Построение ФСР уравнения (1_0)</u>

<u>1-ый случай</u> <u>Теорема</u> Пусть характеристическое уравнение $F(\lambda) = 0$ имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то есть $\lambda_i \neq \lambda_j$ для $\forall\, i \neq j$. Тогда функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ образуют ФСР уравнения (1_0).

<u>Док-во!</u> Для доказательства этого утверждения рассмотрим значение

определителя Вронского этих решений в точке $x=0$. Очевидно, что

$$W[y_1,y_2,\dots,y_n]\Big|_{x=0}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0$$

Тогда согласно теореме об определителе Вронского решения $y_1=e^{\lambda_1 x}, y_2=e^{\lambda_2 x},\dots, y_n=e^{\lambda_n x}$ линейно независимы и следовательно образуют ФСР решения (1o) #

<u>2-ой случай</u>

<u>Утверждение</u> Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_s$ — различные корни характеристического уравнения $F(\lambda)=0$ кратностей $r_1, r_2, \dots, r_s$ соответственно $(r_1+r_2+\dots+r_s=n)$. Тогда функции

$$\begin{cases} y_1=e^{\lambda_1 x},\ y_2=xe^{\lambda_1 x},\dots,\ y_{r_1}=x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x},\\ y_{r_1+1}=e^{\lambda_2 x},\ y_{r_1+2}=xe^{\lambda_2 x},\dots,\ y_{r_1+r_2}=x^{r_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{r_1+r_2+\dots+r_{s-1}+1}=e^{\lambda_s x},\dots\dots\ y_n=x^{r_s-1}e^{\lambda_s x} \end{cases} \quad (*)$$

образуют ФСР уравнения (1o)

Док-во. Пусть μ – один из корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ кратности p. Напомним определение кратности корня μ (кратность p) характеристического уравнения $F(\lambda)=0$

Опр. μ – корень характеристического уравнения кратности p, если

$$F(\mu)=F'(\mu)=F''(\mu)=\dots=F^{(p-1)}(\mu)=0, \text{ а } F^{(p)}(\mu)\neq 0 \quad (**)$$

1) Докажем, что функции $y=x^k e^{\mu x}$, при $0\le k<p$ является решением уравнения (1о). Действительно,

$$\mathcal{L}(x^k e^{\mu x})=\mathcal{L}\left(\frac{d^k(e^{\mu x})}{d\mu^k}\right)=\frac{d^k}{d\mu^k}\left[\mathcal{L}(e^{\mu x})\right]=$$

$$=\frac{d^k}{d\mu^k}\left[F(\mu)e^{\mu x}\right]\xlongequal[\text{формула}]{\text{Лейбница}}\sum_{i=0}^{k}C_k^i F^{(i)}(\mu)(e^{\mu x})^{(k-i)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_k^i \mu^{k-i} F^{(i)}(\mu)e^{\mu x}=0 \text{ в силу } (**)$$

Таким образом, любая функция системы (*) является решением уравнения (1о)

2) Докажем, что система функций (*) линейно независима.

Докажем сначала лемму.

Лемма. Для любого $\lambda_0 \neq 0$ и любого k

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[P_\ell(x)e^{\lambda_0 x}\right] = Q_\ell(x)\cdot e^{\lambda_0 x},$$

где $P_\ell(x)$ – многочлен степени ℓ, $Q_\ell(x)$ – многочлен той же степени ℓ.

Док-во. Рассмотрим некоторые частные случаи

а) $P_\ell(x) = P_0 = const$, то есть $\ell = 0$. Тогда

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[P_0 e^{\lambda_0 x}\right] = \lambda_0^k \cdot P_0 e^{\lambda_0 x} = Q_0 \cdot e^{\lambda_0 x}$$

б) Пусть $k=1$, тогда

$$\frac{d}{dx}\left[P_\ell(x)e^{\lambda_0 x}\right] = \left[P_\ell(x)\cdot\lambda_0 + P_\ell'(x)\right]e^{\lambda_0 x}$$

то есть, если $P_\ell(x) = a_0 x^\ell + a_1 x^{\ell-1} + \dots + a_\ell$, $a_0 \neq 0$, то

$$\frac{d}{dx}\left[P_\ell(x)e^{\lambda_0 x}\right] = \left[\underbrace{\lambda_0 a_0}_{b_0} x^\ell + Q_{\ell-1}(x)\right]e^{\lambda_0 x} = Q_\ell(x)e^{\lambda_0 x}$$

в) В общем случае

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[P_\ell(x)e^{\lambda_0 x}\right] \underset{\text{формула}}{\overset{\text{Лейбница}}{=}} \sum_{s=0}^{k} C_k^s P_\ell^{(s)}(x)\left(e^{\lambda_0 x}\right)^{(k-s)} =$$

$$= \left[P_\ell(x)\lambda_0^k + \sum_{s=1}^{k} P_\ell^{(s)}(x)\cdot(\lambda_0)^{k-s}\right]e^{\lambda_0 x} =$$

$$= \left[a_0\lambda_0^k x^\ell + P_{\ell-1}^*(x)\right]e^{\lambda_0 x} = Q_\ell(x)e^{\lambda_0 x} \quad \#$$

Вернемся к доказательству линейной независимости системы функций (*)