Вычислительная теплофизика

Меринов Игорь Геннадьевич

Баясхаланов Михаил Валерьевич

Задачи курса

Знакомство с методами вычислительной математики, алгоритмами расчета и принципами их программной реализации применительно к распространенным задачам теплообмена

Программа курса

1. Реализация на ЭВМ точных аналитических решений задач теплообмена
2. Численное моделирование процессов теплопереноса в приближении сосредоточенных параметров

---

3. Конечно-разностные методы решения задач теплопроводности
4. Конечно-разностные методы решения задач конвективного теплообмена

Используемая литература

1. Моделирование теплогидравлических процессов в реакторных установках и элементах теплообменного оборудования. Лабораторный практикум / Ю.А. Маслов, И.Г. Меринов, Рябов. М.: МИФИ, 2008.
2. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена:
   Учеб. Пособие / Г.Н. Дульнев, В.Г. Парфенов, А.В. Сигалов.
   М.: Высш. Шк., 1990. – 207 с.
   ISBN 5-06-000116-4
3. Численные методы и программное обеспечение: Пер. с англ. /
   Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. М.: Мир, 2001. – 575 с.
   ISBN 5-03-003392-0 (рус.)
   ISBN 0-13-626672-X (англ.)

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Применение:

1. В качестве тестовых для анализа численных решений.
2. Анализ асимптотического поведения решения.
3. Сокращение затрат ресурсов ЭВМ, т.к. рассчитываются только необходимые значения.

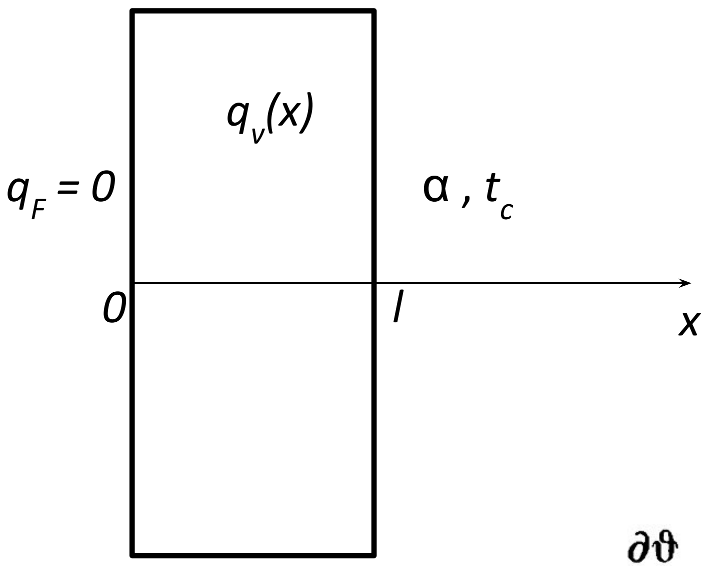
Особенности:

1. Как правило, представляются в виде рядов, интегралов, часто содержат специальные функции.
2. Часто содержат параметры, являющиеся корнями трансцендентных уравнений или их систем.

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Пример.

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения



$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{q_v(x)}{c\rho}, \qquad (2.1)$$

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left[\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \alpha\vartheta\right]_{x=l} = 0, \qquad (2.2)$$

$$\vartheta\,|_{\tau=0} = \vartheta_0; \qquad (2.3)$$

здесь $\vartheta = t - t_c$ — перегрев над температурой среды.

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Пример.

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения

Решение $\vartheta(x, \tau)$ задачи (2.1)—(2.3), исходя из принципа суперпозиции, представим в виде суммы решения $\vartheta_1(x, \tau)$ однородного уравнения при $q_v = 0$ с начальным условием (2.3) и решения $\vartheta_2(x, \tau)$ неоднородного уравнения (2.1) с нулевым начальным условием.

Решение $\vartheta_1(x, \tau)$, описывающее охлаждение неограниченной пластины без источников теплоты имеет вид

$$\vartheta_1(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta_0 \, l \sin \mu_n}{\mu_n \| f_n \|^2} \cos\left(\mu_n \frac{x}{l}\right) \exp\left(-\frac{a\mu_n^2 \tau}{l^2}\right), \qquad (2.4)$$

где μ_n — собственные числа краевой задачи, являющиеся положительными корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = \mu / \mathrm{Bi}, \qquad (2.5)$$

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Пример.

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения

$\mathrm{Bi} = \alpha l/\lambda$ — критерий Био; $\|f_n\|$ — нормы собственных функций $f_n(x) = \cos(\mu_n x/l)$:

$$\|f_n\|^2 = \int_0^l f_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\left[1 + \frac{\mathrm{Bi}}{\mathrm{Bi}^2 + \mu_n^2}\right]. \quad (2.6)$$

Второе слагаемое в решении — $\vartheta_2(x, \tau)$, описывающее нагрев пластины внутренним источником $q_v(x)$, получим методом конечных интегральных преобразований. Применим к уравнению (2.1) интегральное преобразование

$$\theta_n(\tau) = \int_0^l \vartheta(x, \tau) f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad (2.7)$$

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Пример.

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения

Тогда для изображения $\theta_n(\tau)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\theta_n}{d\tau} + \frac{a\mu_n^2}{l^2}\theta_n(\tau) = \frac{W_n}{c\rho} \tag{2.8}$$

с начальным условием

$$\theta_n(0) = 0; \tag{2.9}$$

здесь W_n — изображение функции $q_v(x)$:

$$W_n = \int_0^l q_v(x) f_n(x)\,dx. \tag{2.10}$$

Решение задачи (2.8), (2.9) записывается в виде

$$\theta_n(\tau) = \frac{W_n l^2}{\lambda\mu_n^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{a\mu_n^2\tau}{l^2}\right)\right]. \tag{2.11}$$

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Пример.

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником

Переходя к оригиналу $\vartheta_2(x, \tau)$ по формуле обращения, получим

$$\vartheta_2(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(\tau) f_n(x)/\|f_n\|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n l^2}{\lambda \mu_n^2 \|f_n\|^2} \cos\left(\mu_n \frac{x}{l}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{a\mu_n^2 \tau}{l^2}\right)\right]. \quad (2.12)$$

Окончательное выражение для решения задачи (2.1)—(2.3) имеет вид

$$\vartheta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{\vartheta_0 l \sin \mu_n}{\mu_n} \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) + \right.$$

$$\left. + \frac{W_n l^2}{\lambda \mu_n^2} [1 - \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo})]\right\} \frac{2(\mathrm{Bi}^2 + \mu_n^2)}{l(\mathrm{Bi}^2 + \mu_n^2 + \mathrm{Bi})} \cos(\mu_n x/l), \quad (2.13)$$

здесь $\mathrm{Fo} = a\tau/l^2$ — число Фурье.

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Пример.

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения

Таким образом, для проведения расчетов по точному решению (2.13) необходимо:

1. Найти N значений собственных чисел μ_n
2. Вычислить интегралы (2.10) для изображений W_n
3. Провести суммирование членов ряда.

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Решение нелинейных уравнений

Нелинейные уравнения, содержащие тригонометрические, экспоненциальные, показательные и другие функции, называются *трансцендентными*. Собственные числа краевых задач определяются путем решения трансцендентных уравнений

$$f(\mu) = 0, \tag{2.14}$$

где $f(\mu)$ содержит тригонометрические или некоторые специальные функции, например функции Бесселя, полиномы Лежандра и т. д.

Для рассматриваемого примера

$$f(\mu) = \mu/\mathrm{Bi} - \mathrm{ctg}\,\mu = 0, \tag{2.15}$$

и уравнение (2.15) имеет бесчисленное множество корней μ_1, μ_2, ..., которые графически определяются как точки пересечения прямой $y = \mu/\mathrm{Bi}$ с графиками периодической функции $\mathrm{ctg}\mu$ (рис. 2.1).

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Решение нелинейных уравнений

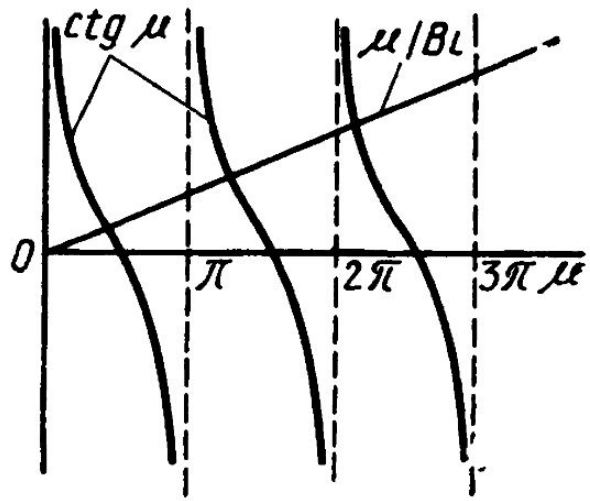


Рис. 2.1

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

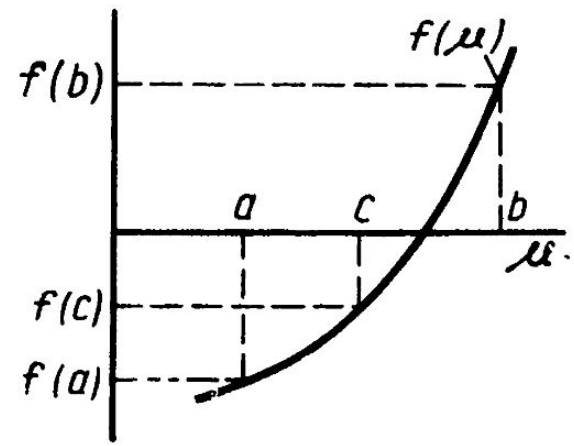
Решение нелинейных уравнений

Метод половинного деления (МПД)

Уравнение:

f(x) = 0

Алгоритм поиска:



Выбираем отрезок [a,b], так, чтобы f(a) и f(b) имели разные знаки. Тогда для непрерывной функц есть корень внутри.

Задаем c = (a + b)/2.

Если f(c) = 0, то корень = c и конец расчета.

Если f(c) и f(a) одного знака, то a = c, иначе b = c.

Если |b – a| < заданной погрешности, то корень = (a + b)/2 и конец расчета.

Переход на пункт 1.

Преимущество:

всегда гарантирует получение решения.

Недостаток:

низкая скорость сходимости (за к итераций отрезок [a,b] уменьшается в $2^к$ раз).

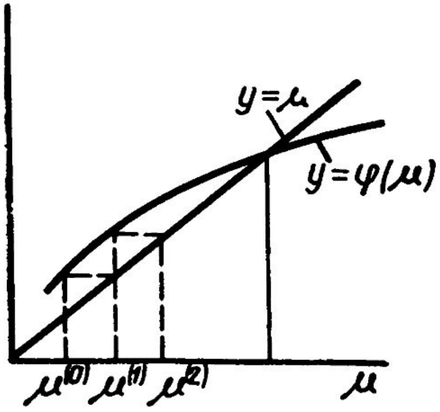
Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

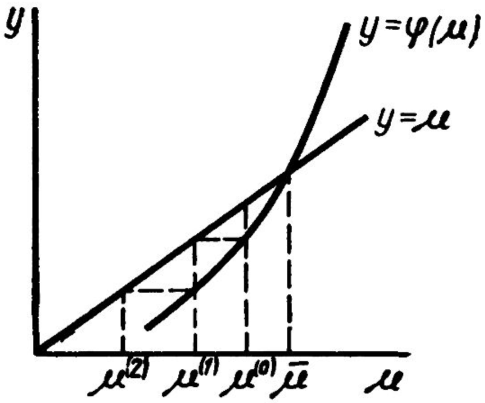
Решение нелинейных уравнений

Метод простой итерации (последовательных приближений) (МПИ)

Уравнение:

$x = \psi(x)$





Алгоритм поиска:

Задаем начальное приближение для корня x_0.

Организуем итерационный процесс $\boxed{x_n = \psi(x_{n-1})}$

Условие завершения итераций $|x_n - x_{n-1}|$ < заданной погрешности.

Преимущество:

более высокая скорость сходимости.

Недостаток:

сходимость наблюдается только при условии $|\psi'(x)| < 1$.

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Решение нелинейных уравнений

Метод простой итерации (последовательных приближений) (МПИ)

Доказательство

$$x_n = \psi(x_{n-1}), \quad a = \psi(a) \Rightarrow (x_n - a) = (\psi(x_{n-1}) - \psi(a)) \cdot \frac{x_{n-1} - a}{x_{n-1} - a} \Rightarrow (x_n - a) = \frac{\psi(x_{n-1}) - \psi(a)}{x_{n-1} - a}(x_{n-1} - a)$$

$$\frac{\psi(x_{n-1}) - \psi(a)}{x_{n-1} - a} = \psi'(\xi), \quad \text{где } \xi \in [x_{n-1}, a]$$

$m = \max|\psi'(\xi)|$ на отрезке, вкл. все x_n.

$$|x_n - a| \le m^n |x_0 - a| \Rightarrow \begin{array}{l} m < 1 \quad m^n \to 0 \\ m > 1 \text{ тогда берем:} \end{array}$$

$m = \min|\psi'(\xi)|$ на отрезке, вкл. все x_n.

при $|x_n - a| \ge m^n |x_0 - a| \Rightarrow \quad m > 1 \quad m^n \to \infty$

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

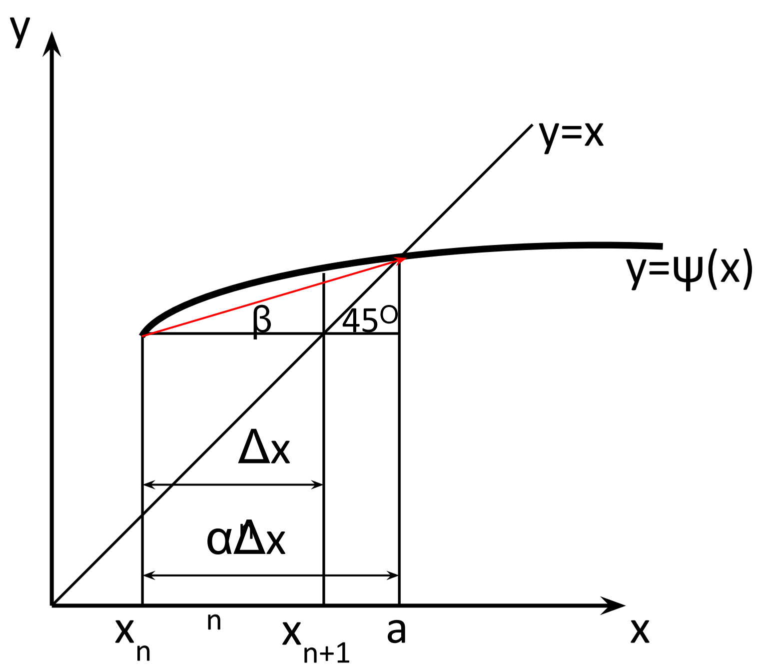
Решение нелинейных уравнений

Усовершенствованный метод последовательных приближений

$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$, где для МПИ $\Delta x_n = \psi(x_n) - x_n$

Возьмем

$x_{n+1} = x_n + \alpha \Delta x_n$, где α – подгоночный коэффициент.



$$tg\beta = \frac{(\alpha-1)\Delta x_n}{\alpha \Delta x_n} = \frac{(\alpha-1)}{\alpha} = \psi'(\xi), \quad \xi \in [x_n, a]$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{1-\psi'(\xi)}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n+1} = x_n + \alpha(\psi(x_n) - x_n)$$

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Решение нелинейных уравнений

Метод Ньютона-Рафсона (МНР)

$x_{n+1} = x_n + \alpha(\psi(x_n) - x_n)$, где

$$\alpha = \frac{1}{1-\psi'(x_n)} \Rightarrow \boxed{x_{n+1} = \frac{\psi(x_n) - x_n\psi'(x_n)}{1-\psi'(x_n)}} = g(x_n)$$

Метод сходится, если

$$|g'(x)| < 1, \quad g'(x) = \frac{\psi''(x)(\psi(x) - x)}{(1-\psi'(x))^2}$$

Условия сходимости:

1. x_0 близко к решению;
2. Ψ”(x) не слишком велика;
3. Ψ’(x) далека от 1.

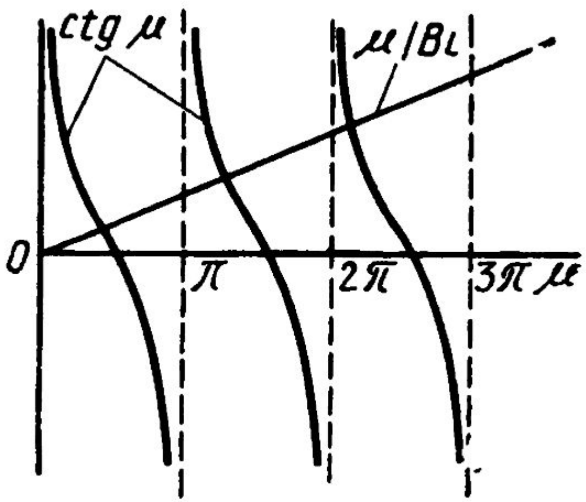
Для уравнения F(x) = 0

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}}$$

Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Решение нелинейных уравнений

Выбор вида уравнения для решения



Решение МПИ

а) $\mu = Bi\, ctg\,\mu \quad \Rightarrow \quad \psi'(\mu) = -\dfrac{Bi}{\sin^2\mu}$

б) $\mu = \mu - \dfrac{\mu}{Bi} + ctg\,\mu \quad \Rightarrow \quad \psi'(\mu) = 1 - \dfrac{1}{Bi} - \dfrac{1}{\sin^2\mu}$

в) $\mu = \mu + \dfrac{\mu}{Bi} - ctg\,\mu \quad \Rightarrow \quad \psi'(\mu) = 1 + \dfrac{1}{Bi} + \dfrac{1}{\sin^2\mu}$

а) $Bi \to \infty \Rightarrow \mu_n \to \pi/2 + \pi n \Rightarrow$)

б) $Bi \to 0 \Rightarrow \mu_n \to \pi n \Rightarrow$)

в) МПИ расходится при любом Bi

Спасибо за внимание !