



# Вычислительная теплофизика

Меринов Игорь Геннадьевич

Баясхаланов Михаил

Валерьевич



# Задачи курса

Знакомство с методами вычислительной математики, алгоритмами расчета и принципами их программной реализации применительно к распространенным задачам теплообмена



# Программа курса

1. Реализация на ЭВМ точных аналитических решений задач теплообмена
  2. Численное моделирование процессов теплопереноса в приближении сосредоточенных параметров
- 
3. Конечно-разностные методы решения задач теплопроводности
  4. Конечно-разностные методы решения задач конвективного теплообмена



# Используемая литература

1. Моделирование теплогидравлических процессов в реакторных установках и элементах теплообменного оборудования. Лабораторный практикум / Ю.А. Маслов, И.Г. Меринов, Рябов. М.: МФИ, 2008.
2. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена:  
Учеб. Пособие / Г.Н. Дульнев, В.Г. Парфенов, А.В. Сигалов.  
М.: Высш. Шк., 1990. – 207 с.  
ISBN 5-06-000116-4
3. Численные методы и программное обеспечение: Пер. с англ. /  
Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. М.: Мир, 2001. – 575 с.  
ISBN 5-03-003392-0 (рус.)  
ISBN 0-13-626672-X (англ.)



# Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Применение:

1. В качестве тестовых для анализа численных решений.
2. Анализ асимптотического поведения решения.
3. Сокращение затрат ресурсов ЭВМ, т.к. рассчитываются только необходимые значения.

Особенности:

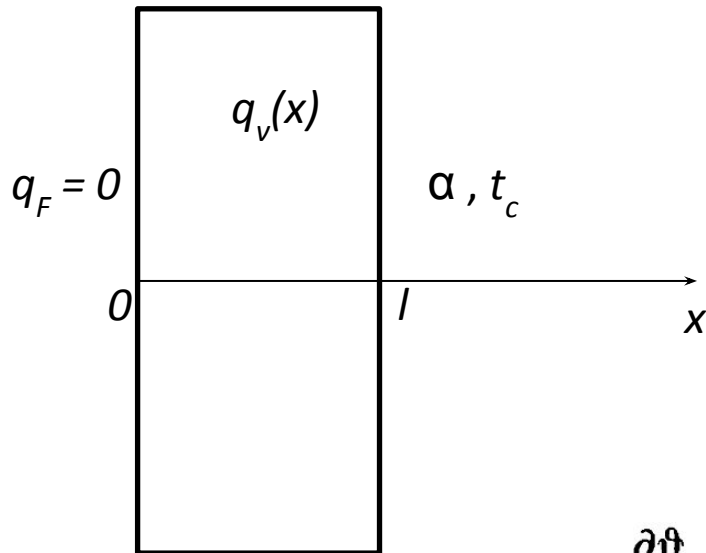
1. Как правило, представляются в виде рядов, интегралов, часто содержат специальные функции.
2. Часто содержат параметры, являющиеся корнями трансцендентных уравнений или их систем.



## Реализация на ЭВМ точных аналитических

Пример. **решений**

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения



$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{q_v(x)}{c\rho}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \left[ \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \alpha \vartheta \right]_{x=l} = 0, \quad (2.2)$$

$$\vartheta \Big|_{\tau=0} = \vartheta_0; \quad (2.3)$$

здесь  $\vartheta = t - t_c$  — перегрев над температурой среды.



# Реализация на ЭВМ точных аналитических Пример. решений Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения

Решение  $\vartheta(x, \tau)$  задачи (2.1)—(2.3), исходя из принципа суперпозиции, представим в виде суммы решения  $\vartheta_1(x, \tau)$  однородного уравнения при  $q_v = 0$  с начальным условием (2.3) и решения  $\vartheta_2(x, \tau)$  неоднородного уравнения (2.1) с нулевым начальным условием.

Решение  $\vartheta_1(x, \tau)$ , описывающее охлаждение неограниченной пластины без источников теплоты имеет вид

$$\vartheta_1(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta_0 l \sin \mu_n}{\mu_n \|f_n\|^2} \cos\left(\mu_n \frac{x}{l}\right) \exp\left(-\frac{a\mu_n^2 \tau}{l^2}\right), \quad (2.4)$$

где  $\mu_n$  — собственные числа краевой задачи, являющиеся положительными корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = \mu / \text{Bi}, \quad (2.5)$$



# Реализация на ЭВМ точных аналитических Пример. решений Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения

$Bi = \alpha l / \lambda$  — критерий Био;  $\|f_n\|$  — нормы собственных функций  
 $f_n(x) = \cos(\mu_n x / l)$ :

$$\|f_n\|^2 = \int_0^l f_n^2(x) dx = \frac{l}{2} \left[ 1 + \frac{Bi}{Bi^2 + \mu_n^2} \right]. \quad (2.6)$$

Второе слагаемое в решении —  $\vartheta_2(x, \tau)$ , описывающее нагрев пластины внутренним источником  $q_v(x)$ , получим методом конечных интегральных преобразований. Применим к уравнению (2.1) интегральное преобразование

$$\theta_n(\tau) = \int_0^l \vartheta(x, \tau) f_n(x) dx. \quad (2.7)$$





## Реализация на ЭВМ точных аналитических

Пример. **решений**

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником

тепловой мощности

Тогда для изображения  $\theta_n(\tau)$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\theta_n}{d\tau} + \frac{a\mu_n^2}{l^2} \theta_n(\tau) = \frac{W_n}{c\rho} \quad (2.8)$$

с начальным условием

$$\theta_n(0) = 0; \quad (2.9)$$

здесь  $W_n$  — изображение функции  $q_v(x)$ :

$$W_n = \int_0^l q_v(x) f_n(x) dx. \quad (2.10)$$

Решение задачи (2.8), (2.9) записывается в виде

$$\theta_n(\tau) = \frac{W_n l^2}{\lambda\mu_n^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{a\mu_n^2 \tau}{l^2}\right) \right]. \quad (2.11)$$



## Реализация на ЭВМ точных аналитических

### Пример. решений

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником

Переходя к оригиналу  $\vartheta_2(x, \tau)$  по формуле обращения, получим

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(\tau) f_n(x) / \|f_n\|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n l^2}{\lambda \mu_n^2 \|f_n\|^2} \cos\left(\mu_n \frac{x}{l}\right) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{a \mu_n^2 \tau}{l^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Окончательное выражение для решения задачи (2.1)—(2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\vartheta_0 l \sin \mu_n}{\mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) + \right. \\ &\left. + \frac{W_n l^2}{\lambda \mu_n^2} [1 - \exp(-\mu_n^2 Fo)] \right\} \frac{2(Bi^2 + \mu_n^2)}{l(Bi^2 + \mu_n^2 + Bi)} \cos(\mu_n x/l), \end{aligned} \quad (2.13)$$

здесь  $Fo = a\tau/l^2$  — число Фурье.



## Реализация на ЭВМ точных аналитических

Пример. **решений**

**Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения**

Таким образом, для проведения расчетов по точному решению (2.13) необходимо:

1. Найти  $N$  значений собственных чисел  $\mu_n$
2. Вычислить интегралы (2.10) для изображений  $W_n$
3. Провести суммирование членов ряда.



# Реализация на ЭВМ точных аналитических решений Решение нелинейных уравнений

Нелинейные уравнения, содержащие тригонометрические, экспоненциальные, показательные и другие функции, называются *трансцендентными*. Собственные числа краевых задач определяются путем решения трансцендентных уравнений

$$f(\mu) = 0, \quad (2.14)$$

где  $f(\mu)$  содержит тригонометрические или некоторые специальные функции, например функции Бесселя, полиномы Лежандра и т. д.

Для рассматриваемого примера

$$f(\mu) = \mu/Vi - \operatorname{ctg} \mu = 0, \quad (2.15)$$

и уравнение (2.15) имеет бесчисленное множество корней  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , которые графически определяются как точки пересечения прямой  $y = \mu/Vi$  с графиками периодической функции  $\operatorname{ctg} \mu$  (рис. 2.1).



# Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

## Решение нелинейных уравнений

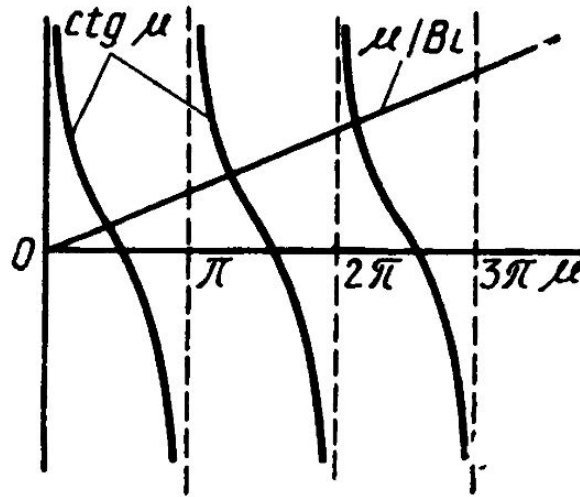


Рис. 2.1



# Реализация на ЭВМ точных аналитических

## Решение нелинейных уравнений

**Метод половинного деления (МПД)**

Уравнение:

$$f(x) = 0$$

Алгоритм поиска:

Выбираем отрезок  $[a, b]$ , так, чтобы  $f(a)$  и  $f(b)$  имели разные знаки. Тогда для непрерывной функции есть корень внутри.

Задаем  $c = (a + b)/2$ .

Если  $f(c) = 0$ , то корень =  $c$  и конец расчета.

Если  $f(c)$  и  $f(a)$  одного знака, то  $a = c$ , иначе  $b = c$ .

Если  $|b - a| <$  заданной погрешности, то корень =  $(a + b)/2$  и конец расчета.

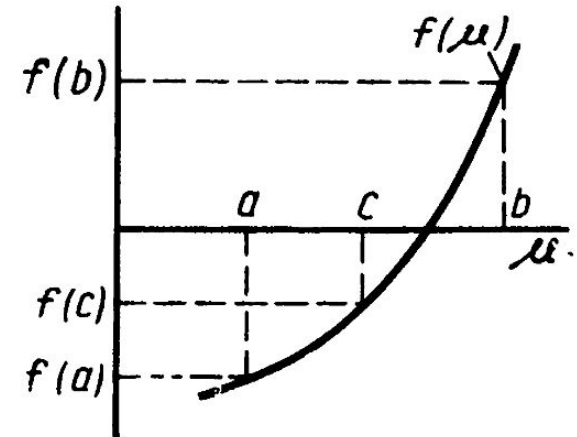
Переход на пункт 1.

**Преимущество:**

всегда гарантирует получение решения.

**Недостаток:**

низкая скорость сходимости (за  $k$  итераций отрезок  $[a, b]$  уменьшается в  $2^k$  раз).



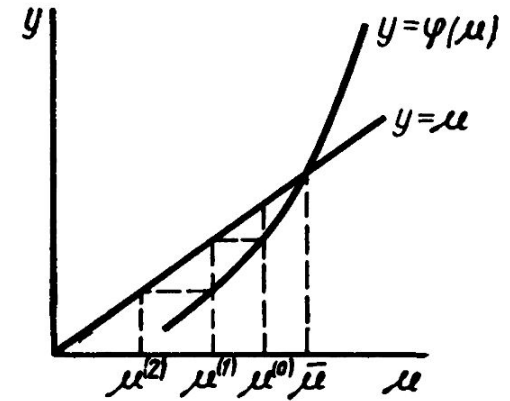
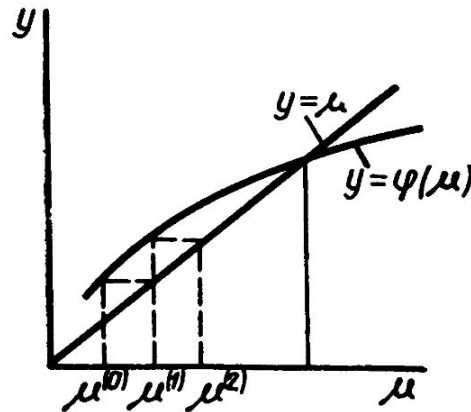


# Реализация на ЭВМ точных аналитических

## решений Решение нелинейных уравнений

Метод простой итерации (последовательных приближений) (МПИ)

Уравнение:  
 $x = \psi(x)$



Алгоритм поиска:

Задаем начальное приближение для корня  $x_0$ .

Организуем итерационный процесс  $x_n = \psi(x_{n-1})$

Условие завершения итераций  $|x_n - x_{n-1}| <$  заданной погрешности.

Преимущество:

более высокая скорость сходимости.

Недостаток:

сходимость наблюдается только при условии  $|\psi'(x)| < 1$ .



# Реализация на ЭВМ точных аналитических

## решений Решение нелинейных уравнений

Метод простой итерации (последовательных приближений)

(МПИ)

Доказательств

во

$$\psi_n \neq \left( \begin{matrix} n-1 \\ \end{matrix} \right) \Rightarrow (\psi_n \neq a) = (\psi(a_{n-1}) - \left( \begin{matrix} \end{matrix} \right)) \cdot \frac{\psi_n x - a}{x - a_{n-1}} \Rightarrow \left( \begin{matrix} n-1 \\ \end{matrix} \right) = \frac{\left( \begin{matrix} n-1 \\ \end{matrix} \right) - \left( \begin{matrix} \end{matrix} \right)}{x - a_{n-1}} \left( \begin{matrix} n-1 \\ \end{matrix} \right)$$

$\psi(x) \in [x \xi a]_{n-1}$

$m = \xi$  на отрезке, вкл. все  $x$  .  $n$

$$|x_n - a| \leq m^n |x_0 - a| \Rightarrow \begin{matrix} m < 1 & m^n \rightarrow 0 \\ m > 1 & \text{тогда берем:} \end{matrix}$$

$m = \xi$  на отрезке, вкл. все  $x$  .  $n$

$$|x_n - a| \geq m^n |x_0 - a| \Rightarrow m > m^n \rightarrow \infty$$





# Реализация на ЭВМ точных аналитических

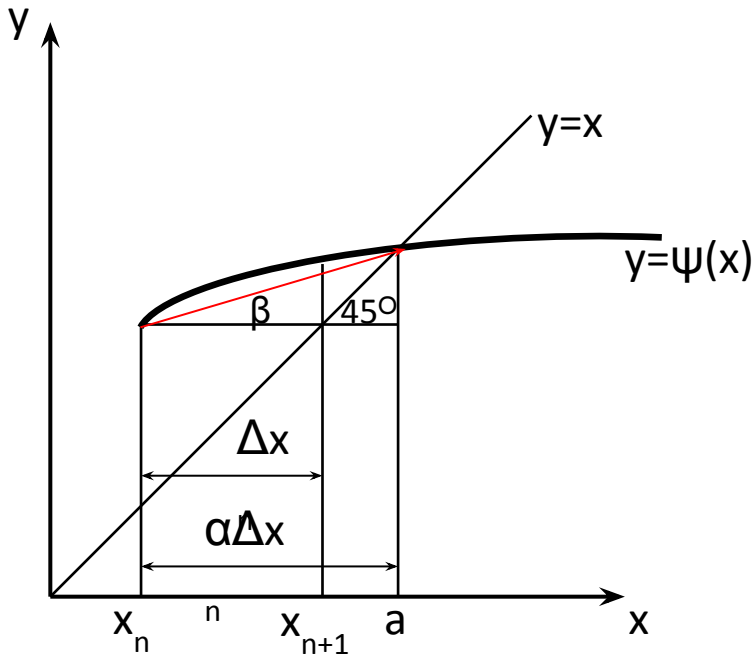
## решений Решение нелинейных уравнений

Усовершенствованный метод последовательных приближений

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \text{ где } \Delta x_n = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} (x_n - a)$$

Возьмем

$$x_{n+1} = x_n + \alpha \Delta x_n, \text{ где } \alpha \text{ — подгоночный коэффициент.}$$



$$\alpha = \frac{(\alpha - 1) x_n}{\alpha \Delta x_n} = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} \psi'(\xi), \xi \in [x_n, a]$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - \psi'(\xi)}$$

$$x_{n+1} = x_n + \alpha \Delta x_n = x_n + \alpha (x_n - a)$$



# Реализация на ЭВМ точных аналитических

## решений Решение нелинейных уравнений

### Метод Ньютона-Рафсона (МНР)

$$\psi(x_{n+1}) = \psi(x_n) + \alpha (\psi'(x_n) - \psi(x_n)),$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - \psi'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{\psi(x_n) - x_n \psi'(x_n)}{1 - \psi'(x_n)} = g(x_n)$$

Метод сходится,  
если

$$|g'(x)| < 1, \quad g'(x) = \frac{\psi''(x)(\psi(x) - x)}{(1 - \psi'(x))^2}$$

Условия сходимости:

1.  $x_0$  близко к решению;
  2.  $\psi''(x)$  не слишком велика;
  3.  $\psi'(x)$  далека от 1.
- Для уравнения  $F(x) = 0$

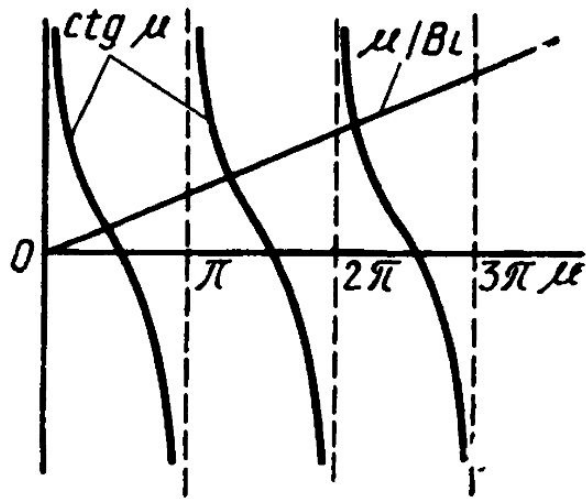
$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$



# Реализация на ЭВМ точных аналитических

## решений Решение нелинейных уравнений

Выбор вида уравнения для решения



Решение  
МПИ

- |                                    |              |   |
|------------------------------------|--------------|---|
| а) $Bi = ctg \mu$                  | $\psi = \mu$ | $'(\ ) = -Bi / \sin^2 \mu$                        |
| б) $\mu = -\frac{\mu}{Bi} ctg \mu$ | $\psi = \mu$ | $'(\ ) = 1 - \frac{1}{Bi} - \frac{1}{\sin^2 \mu}$ |
| в) $\mu = +\frac{\mu}{Bi} ctg \mu$ | $\psi = \mu$ | $'(\ ) = 1 + \frac{1}{Bi} + \frac{1}{\sin^2 \mu}$ |

$$Bi \rightarrow \infty \Rightarrow \pi n \rightarrow \dots / 2 + \dots \Rightarrow )$$

$$Bi \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \dots \Rightarrow )$$

в МПИ расходится при любом  $Bi$



*Спасибо за  
внимание !*