



Вычислительная теплофизика

Меринов Игорь Геннадьевич

Баясхаланов Михаил

Валерьевич



Задачи курса

Знакомство с методами вычислительной математики, алгоритмами расчета и принципами их программной реализации применительно к распространенным задачам теплообмена



Программа курса

1. Реализация на ЭВМ точных аналитических решений задач теплообмена
 2. Численное моделирование процессов теплопереноса в приближении сосредоточенных параметров
-
3. Конечно-разностные методы решения задач теплопроводности
 4. Конечно-разностные методы решения задач конвективного теплообмена



Используемая литература

1. Моделирование теплогидравлических процессов в реакторных установках и элементах теплообменного оборудования. Лабораторный практикум / Ю.А. Маслов, И.Г. Меринов, Рябов. М.: МИФИ, 2008.
2. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена:
Учеб. Пособие / Г.Н. Дульнев, В.Г. Парфенов, А.В. Сигалов.
М.: Высш. Шк., 1990. – 207 с.
ISBN 5-06-000116-4
3. Численные методы и программное обеспечение: Пер. с англ. /
Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. М.: Мир, 2001. – 575 с.
ISBN 5-03-003392-0 (рус.)
ISBN 0-13-626672-X (англ.)



Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Применение:

1. В качестве тестовых для анализа численных решений.
2. Анализ асимптотического поведения решения.
3. Сокращение затрат ресурсов ЭВМ, т.к. рассчитываются только необходимые значения.

Особенности:

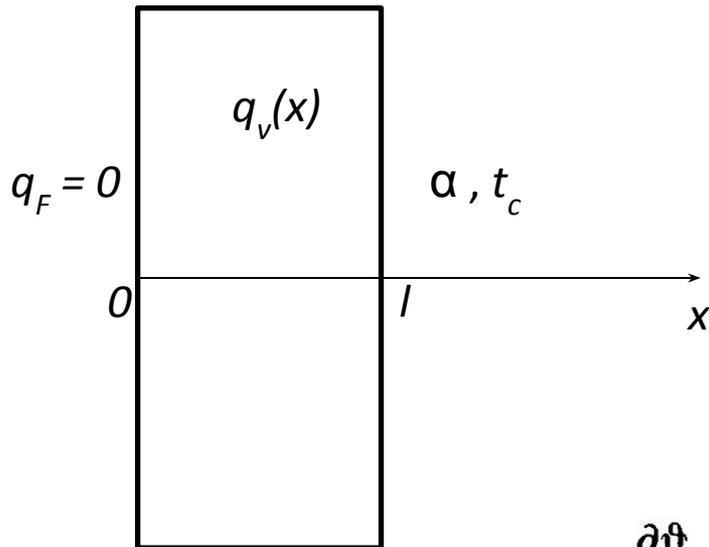
1. Как правило, представляются в виде рядов, интегралов, часто содержат специальные функции.
2. Часто содержат параметры, являющиеся корнями трансцендентных уравнений или их систем.



Реализация на ЭВМ точных аналитических

Пример. **решений**

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения



$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{q_v(x)}{c\rho}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \left[\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \alpha \vartheta \right]_{x=l} = 0, \quad (2.2)$$

$$\vartheta \Big|_{\tau=0} = \vartheta_0; \quad (2.3)$$

здесь $\vartheta = t - t_c$ — перегрев над температурой среды.



Реализация на ЭВМ точных аналитических Пример. решений Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения

Решение $\vartheta(x, \tau)$ задачи (2.1)—(2.3), исходя из принципа суперпозиции, представим в виде суммы решения $\vartheta_1(x, \tau)$ однородного уравнения при $q_v = 0$ с начальным условием (2.3) и решения $\vartheta_2(x, \tau)$ неоднородного уравнения (2.1) с нулевым начальным условием.

Решение $\vartheta_1(x, \tau)$, описывающее охлаждение неограниченной пластины без источников теплоты имеет вид

$$\vartheta_1(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta_0 l \sin \mu_n}{\mu_n \|f_n\|^2} \cos\left(\mu_n \frac{x}{l}\right) \exp\left(-\frac{a\mu_n^2 \tau}{l^2}\right), \quad (2.4)$$

где μ_n — собственные числа краевой задачи, являющиеся положительными корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = \mu / \operatorname{Bi}, \quad (2.5)$$



Реализация на ЭВМ точных аналитических Пример. решений Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения

$Bi = \alpha l / \lambda$ — критерий Био; $\|f_n\|$ — нормы собственных функций
 $f_n(x) = \cos(\mu_n x / l)$:

$$\|f_n\|^2 = \int_0^l f_n^2(x) dx = \frac{l}{2} \left[1 + \frac{Bi}{Bi^2 + \mu_n^2} \right]. \quad (2.6)$$

Второе слагаемое в решении — $\vartheta_2(x, \tau)$, описывающее нагрев пластины внутренним источником $q_v(x)$, получим методом конечных интегральных преобразований. Применим к уравнению (2.1) интегральное преобразование

$$\theta_n(\tau) = \int_0^l \vartheta(x, \tau) f_n(x) dx. \quad (2.7)$$



Реализация на ЭВМ точных аналитических

Пример. **решений**

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником

тепловой мощности

Тогда для изображения $\theta_n(\tau)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\theta_n}{d\tau} + \frac{a\mu_n^2}{l^2} \theta_n(\tau) = \frac{W_n}{c\rho} \quad (2.8)$$

с начальным условием

$$\theta_n(0) = 0; \quad (2.9)$$

здесь W_n — изображение функции $q_v(x)$:

$$W_n = \int_0^l q_v(x) f_n(x) dx. \quad (2.10)$$

Решение задачи (2.8), (2.9) записывается в виде

$$\theta_n(\tau) = \frac{W_n l^2}{\lambda\mu_n^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{a\mu_n^2 \tau}{l^2}\right) \right]. \quad (2.11)$$



Реализация на ЭВМ точных аналитических

Пример. решений

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником

Переходя к оригиналу $\vartheta_2(x, \tau)$ по формуле обращения, получим

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(\tau) f_n(x) / \|f_n\|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n l^2}{\lambda \mu_n^2 \|f_n\|^2} \cos\left(\mu_n \frac{x}{l}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{a \mu_n^2 \tau}{l^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Окончательное выражение для решения задачи (2.1)—(2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\vartheta_0 l \sin \mu_n}{\mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) + \right. \\ &\left. + \frac{W_n l^2}{\lambda \mu_n^2} [1 - \exp(-\mu_n^2 Fo)] \right\} \frac{2(Bi^2 + \mu_n^2)}{l(Bi^2 + \mu_n^2 + Bi)} \cos(\mu_n x/l), \end{aligned} \quad (2.13)$$

здесь $Fo = a\tau/l^2$ — число Фурье.



Реализация на ЭВМ точных аналитических

Пример. **решений**

Одномерное нестационарное поле температур в неограниченной пластине с внутренним источником тепловыделения

Таким образом, для проведения расчетов по точному решению (2.13) необходимо:

1. Найти N значений собственных чисел μ_n
2. Вычислить интегралы (2.10) для изображений W_n
3. Провести суммирование членов ряда.



Реализация на ЭВМ точных аналитических решений Решение нелинейных уравнений

Нелинейные уравнения, содержащие тригонометрические, экспоненциальные, показательные и другие функции, называются *трансцендентными*. Собственные числа краевых задач определяются путем решения трансцендентных уравнений

$$f(\mu) = 0, \quad (2.14)$$

где $f(\mu)$ содержит тригонометрические или некоторые специальные функции, например функции Бесселя, полиномы Лежандра и т. д.

Для рассматриваемого примера

$$f(\mu) = \mu/Vi - \operatorname{ctg} \mu = 0, \quad (2.15)$$

и уравнение (2.15) имеет бесчисленное множество корней μ_1, μ_2, \dots , которые графически определяются как точки пересечения прямой $y = \mu/Vi$ с графиками периодической функции $\operatorname{ctg} \mu$ (рис. 2.1).



Реализация на ЭВМ точных аналитических решений

Решение нелинейных уравнений

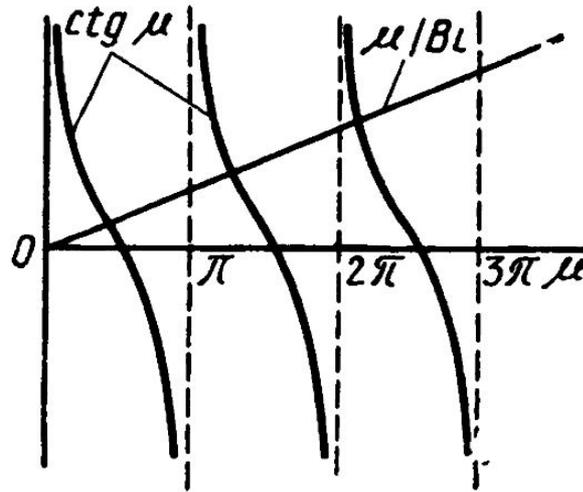


Рис. 2.1



Реализация на ЭВМ точных аналитических

решений Решение нелинейных уравнений

Метод половинного деления (МПД)

Уравнение:

$$f(x) = 0$$

Алгоритм поиска:

Выбираем отрезок $[a, b]$, так, чтобы $f(a)$ и $f(b)$ имели разные знаки. Тогда для непрерывной функции есть корень внутри.

Задаем $c = (a + b)/2$.

Если $f(c) = 0$, то корень = c и конец расчета.

Если $f(c)$ и $f(a)$ одного знака, то $a = c$, иначе $b = c$.

Если $|b - a| <$ заданной погрешности, то корень = $(a + b)/2$ и конец расчета.

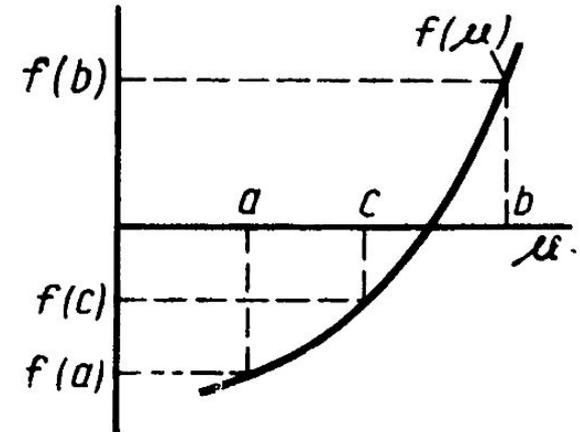
Переход на пункт 1.

Преимущество:

всегда гарантирует получение решения.

Недостаток:

низкая скорость сходимости (за k итераций отрезок $[a, b]$ уменьшается в 2^k раз).



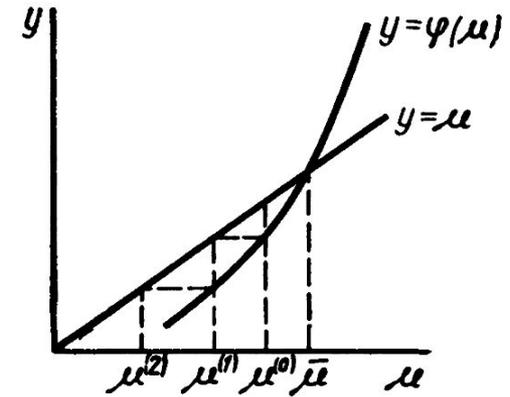
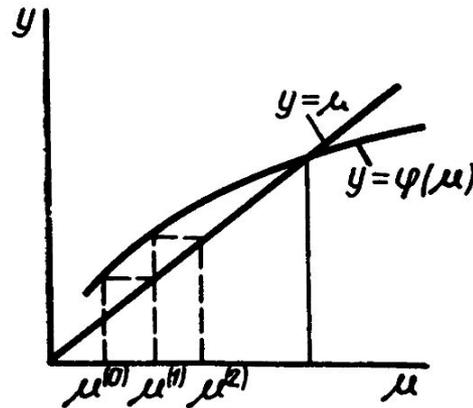


Реализация на ЭВМ точных аналитических

решений Решение нелинейных уравнений

Метод простой итерации (последовательных приближений) (МПИ)

Уравнение:
 $x = \psi(x)$



Алгоритм поиска:

Задаем начальное приближение для корня x_0 .

Организуем итерационный процесс $x_n = \psi(x_{n-1})$

Условие завершения итераций $|x_n - x_{n-1}| <$ заданной погрешности.

Преимущество:

более высокая скорость сходимости.

Недостаток:

сходимость наблюдается только при условии $|\psi'(x)| < 1$.



Реализация на ЭВМ точных аналитических

решений Решение нелинейных уравнений

Метод простой итерации (последовательных приближений)

(МПИ)

Доказательств

во

$$\psi_n \neq \left(\begin{matrix} n-1 \\ \psi = a \end{matrix} \right) \Rightarrow (\psi_n \neq a) = (\psi(a_{n-1}) - \left(\begin{matrix} \psi_n x - a \\ a \end{matrix} \right)) \cdot \frac{\psi_n x - a}{a} \Rightarrow \left(\begin{matrix} \psi_n - \\ \psi(a_{n-1}) - \end{matrix} \right) = \frac{\left(\begin{matrix} n-1 \\ \psi_n x - a \\ a \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \psi_n - \\ \psi(a_{n-1}) - \end{matrix} \right)}{x} \left(\begin{matrix} n-1 \\ \psi(a_{n-1}) - \end{matrix} \right)$$

$\psi(x), [x \xi a]_{n-1}$

$m = \xi$ на отрезке, вкл. все x . n

$$|x_n - a| \leq m^n |x_0 - a| \Rightarrow \begin{matrix} m < 1 & m^n \rightarrow 0 \\ m > 1 & \text{тогда берем:} \end{matrix}$$

$m = \xi$ на отрезке, вкл. все x . n

$$|x_n - a| \geq m^n |x_0 - a| \Rightarrow m > m^n \rightarrow \infty$$



Реализация на ЭВМ точных аналитических

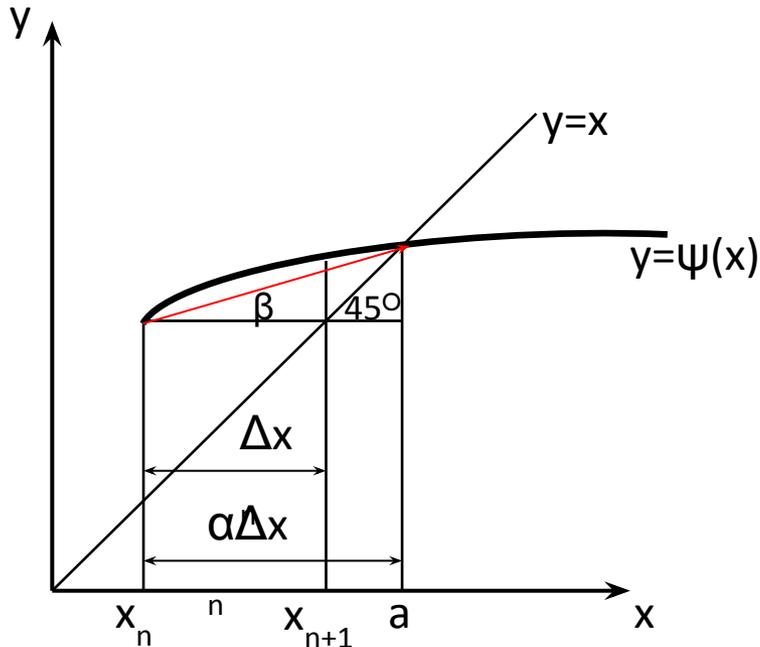
решений Решение нелинейных уравнений

Усовершенствованный метод последовательных приближений

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \text{ где } \Delta x_n = \frac{(\alpha - 1) \psi(x_n)}{\alpha \psi'(x_n)}, \alpha \in [a, b]$$

Возьмем

$$x_{n+1} = x_n + \alpha \Delta x_n, \text{ где } \alpha \text{ — подгоночный коэффициент.}$$



$$\alpha = \frac{(\alpha - 1) \psi(x_n)}{\alpha \Delta x_n} = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} \psi'(\xi), \xi \in [a, b]$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - \psi'(\xi)}$$

$$x_{n+1} = x_n + \alpha \Delta x_n = x_n + \alpha (\psi(x_n) - x_n)$$



Реализация на ЭВМ точных аналитических

решений Решение нелинейных уравнений

Метод Ньютона-Рафсона (МНР)

$$\psi(x_{n+1}) = \psi(x_n) + \alpha (\psi'(x_n) - \psi(x_n)),$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - \psi'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{\psi(x_n) - x_n \psi'(x_n)}{1 - \psi'(x_n)} = g(x_n)$$

Метод сходится,
если

$$|g'(x)| < 1, \quad g'(x) = \frac{\psi''(x)(\psi(x) - x)}{(1 - \psi'(x))^2}$$

Условия сходимости:

1. x_0 близко к решению;
2. $\psi''(x)$ не слишком велика;
3. $\psi'(x)$ далека от 1.

Для уравнения $F(x) = 0$

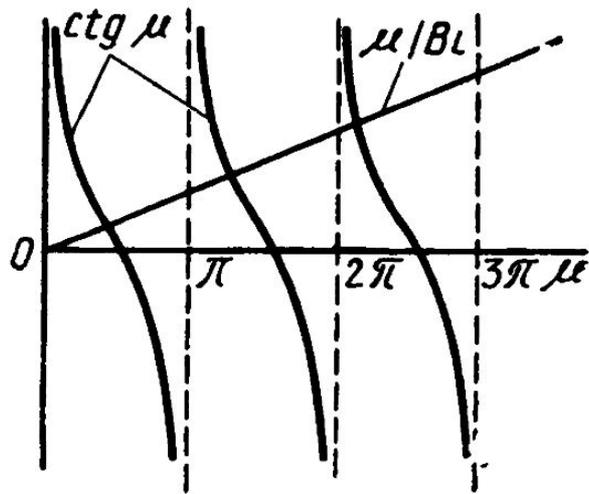
$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$



Реализация на ЭВМ точных аналитических

решений Решение нелинейных уравнений

Выбор вида уравнения для решения



Решение
МПИ

а) $Bi = ctg \mu$

$\psi = \mu \quad \psi'(\mu) = -Bi / \sin^2 \mu$

б) $\mu = -\frac{Bi}{ctg \mu}$

$\psi = \mu \quad \psi'(\mu) = 1 - \frac{1}{Bi} - \frac{1}{\sin^2 \mu}$

в) $\mu = +\frac{Bi}{ctg \mu}$

$\psi = \mu \quad \psi'(\mu) = 1 + \frac{1}{Bi} + \frac{1}{\sin^2 \mu}$

$Bi \rightarrow \infty \Rightarrow \pi n \rightarrow \dots / 2 + \dots \Rightarrow)$

$Bi \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \dots \Rightarrow)$

в МПИ расходится при любом Bi



*Спасибо за
внимание !*