

**Скалярное  
произведение векторов.  
Угол между векторами.**

## Определение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Формула для нахождения  
скалярного произведения  
через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

## Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{-6; 9; 5\}$$

$$\vec{b} \{-1; 0; 7\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot (-1) + 9 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 41$$

## Пример №2

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{0; 0; 4\}$$

$$\vec{b} \{22; 1; 8\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 22 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 8 = 32$$

## Пример №3

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{1; 7; 9\} \qquad \vec{b} \{-2; 4; 0\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 0 = 26$$

## Косинус угла между векторами

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

**№ 4**

$$\vec{a} \{2; -2; 0\}$$

$$\vec{c} \{3; 0; -3\}$$



$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{6 + 0 + 0}{\sqrt{4 + 4 + 0} \cdot \sqrt{9 + 0 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}} = \\ &= \frac{6}{\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9}} = \frac{6}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

Ответ :  $\varphi = 60^\circ$

## № 5

Дано :  $A(1;3;0)$

$B(2;3;-1), C(1;2;-1)$

Найти :  $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$

$$\overrightarrow{CA} = \{x_A - x_C; y_A - y_C; z_A - z_C\}$$

$$\overrightarrow{CA} = \{1 - 1; 3 - 2; 0 - (-1)\} = \{0; 1; 1\}$$

$$\overrightarrow{CB} = \{x_B - x_C; y_B - y_C; z_B - z_C\}$$

$$\overrightarrow{CB} = \{2 - 1; 3 - 2; -1 - (-1)\} = \{1; 1; 0\}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

$$\cos(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = 60^\circ$$

Ответ :  $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = 60^\circ$



**Дано:**  $A(3;-2;4)$   $B(4;-1;2)$   
 $C(6;-3;2)$   $D(7;-3;1)$

**Найти:** угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ .

**Ваши предложения...**

**1. Найдем координаты векторов  $\overrightarrow{AB}$   $\{1;1;-2\}$  и  $\overrightarrow{CD}$   $\{1;0;-1\}$**

**2. Воспользуемся формулой:**

$$\cos \varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\varphi = 30^\circ$$



## Проверочная работа

1. Найти скалярное произведение векторов:

А)  $\vec{a} \{1; 10; 7\}$      $\vec{b} \{0; 7; 0\}$

Б)  $\vec{a} \{7; 25; 0\}$      $\vec{b} \{11; 0; 54\}$

В)  $\vec{a} \{-1; 2; 8\}$      $\vec{b} \{5; 5; 0\}$

2. Вычислите угол между векторами: а)  $a \{2; -2; 0\}$  и  $\vec{b} \{3; 0; -3\}$ ; б)  $\vec{a} \{\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$  и  $\vec{b} \{-3; -3; 0\}$ ; в)  $\vec{a} \{0; 5; 0\}$  и  $\vec{b} \{0; -\sqrt{3}; 1\}$ ; г)  $\vec{a} \{-2,5; 2,5; 0\}$  и  $\vec{b} \{-5; 5; 5\sqrt{2}\}$ ;