Скалярное произведение векторов. Угол между векторами.

Определение

<u>Скалярным произведением</u> двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Формула для нахождения скалярного произведения через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ?$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{-6;\ 9;\ 5\}$ $\vec{b}\ \{-1;\ 0;\ 7\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot (-1) + 9 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 41$$

Пример №2

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{0;\ 0;\ 4\}$ $\vec{b}\ \{22;\ 1;\ 8\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot 22 + 0\cdot 1 + 4\cdot 8 = 32$$

Пример №3

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{1; 7; 9\}$ $\vec{b}\ \{-2; 4; 0\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 0 = 26$$

Косинус угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

№ 4

$\vec{a}\{2;-2;0\}$

$\vec{c}\{3;0;-3\}$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{c}}$

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 3 + (-2)\cdot 0 + 0\cdot(-3)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2}\cdot\sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{6+0+0}{\sqrt{4+4+0}\cdot\sqrt{9+0+9}} = \frac{6}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{4\cdot 2\cdot 2\cdot 9}} = \frac{6}{4\cdot 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

Ответ: $\varphi = 60^\circ$

№ 5

$Дано: A(1;3;0)$

$B(2;3;-1), C(1;2;-1)$

$Найти: \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$

$$\overrightarrow{CA}=\{x_A-x_C;y_A-y_C;Z_A-Z_C\}$$

$$\overrightarrow{CA}=\{1-1;3-2;0-(-1)\}=\{0;1;1\}$$

$$\overrightarrow{CB}=\{x_B-x_C;y_B-y_C;Z_B-Z_C\}$$

$$\overrightarrow{CB}=\{2-1;3-2;-1-(-1)\}=\{1;1;0\}$$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{0\cdot1+1\cdot1+1\cdot0}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=60^\circ$$

$Ответ: \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=60^\circ$

Дано: $A(3;-2;4)$ $B(4;-1;2)$

$C(6;-3;2)$ $D(7;-3;1)$

Найти: угол между прямыми AB и CD.

Ваши предложения…

1. **Найдем координаты векторов** $\overrightarrow{AB}\ \{1;1;-2\}$ **и** $\overrightarrow{CD}\ \{1;0;-1\}$

2. **Воспользуемся формулой:**

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot1+1\cdot0+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$\varphi = 30^0$

Проверочная работа

1.Найти скалярное произведение векторов:

А) $\vec{a}\ \{1;\ 10;\ 7\}$ $\vec{b}\ \{0;\ 7;\ 0\}$

Б) $\vec{a}\ \{7;\ 25;\ 0\}$ $\vec{b}\ \{11;\ 0;\ 54\}$

В) $\vec{a}\ \{-1;\ 2;\ 8\}$ $\vec{b}\ \{5;\ 5;\ 0\}$

2. Вычислите угол между векторами: а) $a\{2;\ -2;\ 0\}$ и $\vec{b}\{3;\ 0;\ -3\}$; б) $\vec{a}\{\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 2\}$ и $\vec{b}\{-3;\ -3;\ 0\}$; в) $\vec{a}\{0;\ 5;\ 0\}$ и $\vec{b}\{0;\ -\sqrt{3};\ 1\}$; г) $\vec{a}\{-2{,}5;\ 2{,}5;\ 0\}$ и $\vec{b}\{-5;\ 5;\ 5\sqrt{2}\}$;