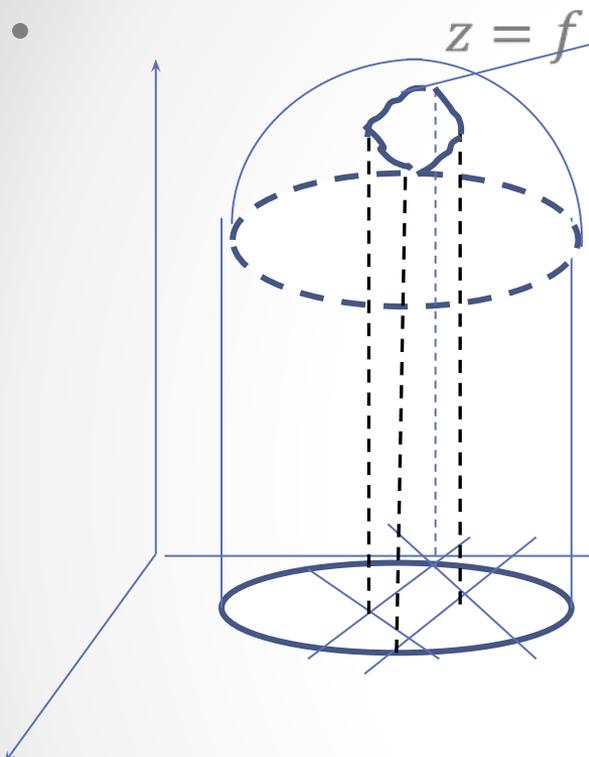


Кратные интегралы

Лекция 3

Двойной интеграл. Задача о вычислении объема



$z = f(x_k, y_k) \geq 0$ Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k =$$

$$\max \Delta S_k \rightarrow 0$$

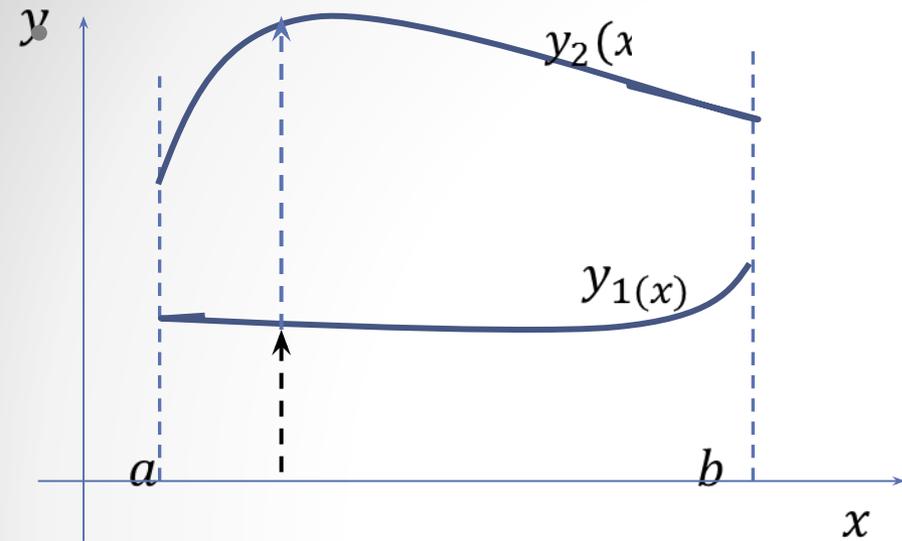
$$= \iint f(x, y) dS - \text{двойной интеграл}$$

D – область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

$\iint dS = S$ - площадь области D

Вычисление двойного интеграла



$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Внутренний интеграл по y при условии $x = const$. Пределы во внутреннем интеграле зависят от x

- A Cartesian coordinate system with x and y axes. A region is shown bounded by horizontal dashed lines at y=c and y=d. The left boundary is a curve labeled x₁(y) and the right boundary is a curve labeled x₂(y). A horizontal dashed line with arrows is drawn at an arbitrary y between c and d, indicating the horizontal extent from x₁(y) to x₂(y).

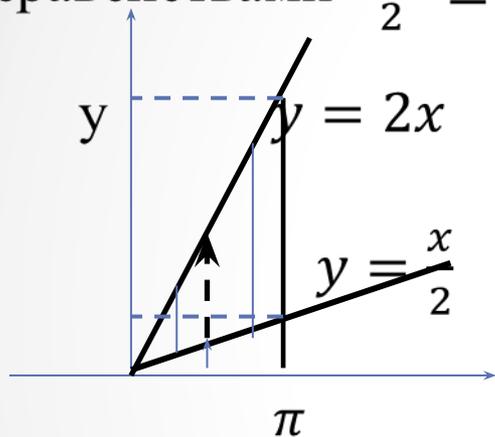
$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx =$$

$$= \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

- Внутренний интеграл по x при условии $y = const$. Пределы во внутреннем интеграле зависят от y

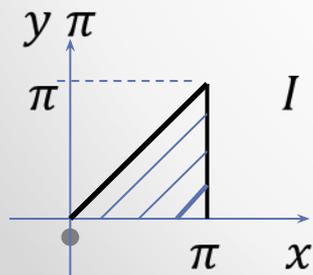
Примеры вычислений двойного интеграла в декартовых координатах

Пример 1. Вычисляем двойной интеграл по области, заданной неравенствами $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$; $0 \leq x \leq \pi$



$$\begin{aligned} \iint_D \sin y \, dx \, dy &= \int_0^\pi dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \sin y \, dy = \\ &= \int_0^\pi \left(\int_{\frac{x}{2}}^{2x} \sin y \, dy \right) dx = \int_0^\pi \left(-\cos 2x + \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2\pi + \frac{1}{2} \sin 0 + 2 \sin \frac{\pi}{2} - 2 \sin 0 = 2. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислим $I = \int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx$. Внутренний интеграл по x «неберущийся». Но интеграл можно вычислить, изменив порядок интегрирования. Область интегрирования – треугольник:



$$I = \int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \int_0^x dy = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} x dx = -\cos \pi + \cos 0 = 2$$

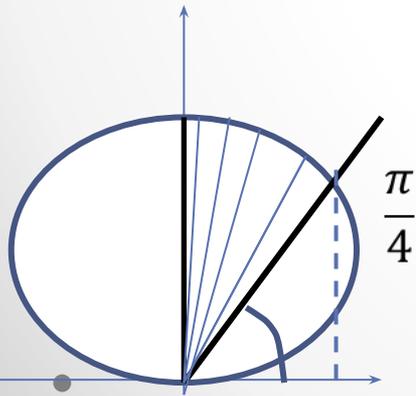
Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат

Применяется в случае, если область интегрирования – круг или его часть: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$, $dS = r d\varphi dr$;

$$\iint f(x, y) dS = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

Пример 3. Вычислить $I = \int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy$.

Область интегрирования – часть смещенного круга, ограниченная кривыми $x = 0$, $x = 1$, $y = x$, $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$, $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2y \rightarrow r = 2 \sin \varphi$



$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} r^2 dr = \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi =$$

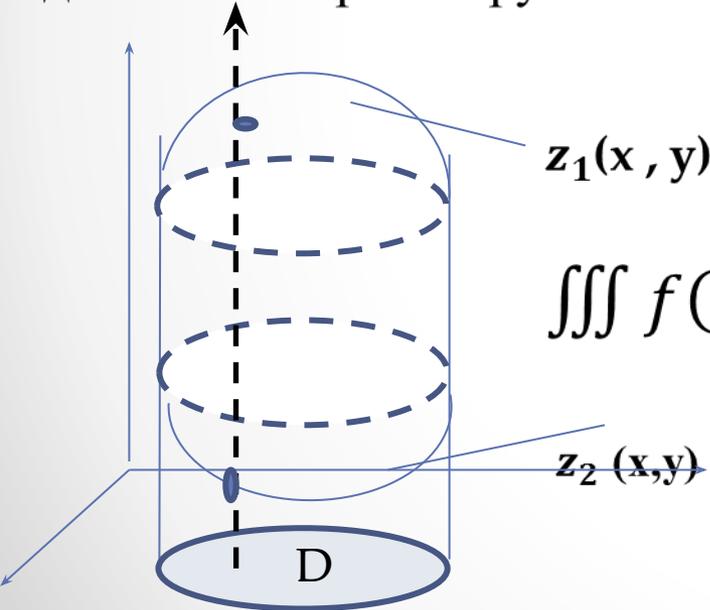
$$= -\frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d \cos \varphi = \frac{20}{9\sqrt{2}}$$

Тройной интеграл

Функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной пространственной области V . Тогда тройным интегралом по этой области называют $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint f(x, y, z) dv$.

dv – элемент объема. $\iiint dv = V$ – объем области интегрирования

Вычисление в декартовой системе координат сводится к вычислению однократного интеграла по одной из координат и двойного интеграла по проекции на одну из координатных плоскостей. Пусть область интегрирования ограничена сверху и снизу гладкими поверхностями $z_2(x, y)$, $z_1(x, y)$ и **однозначно** проецируется на плоскость XOY в область D .

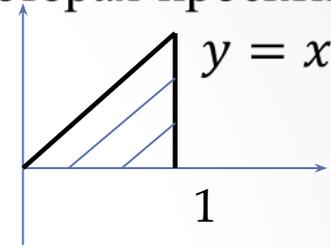
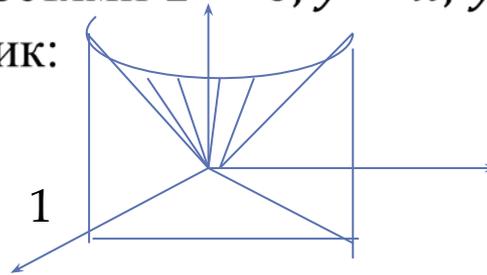


$$\iiint f(x, y, z) dv = \iint dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Двойной интеграл берется по проекции D

Примеры

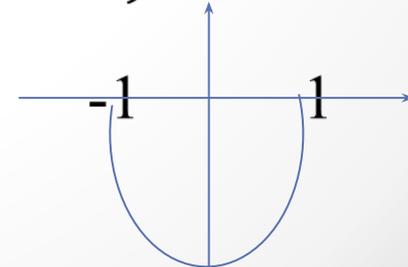
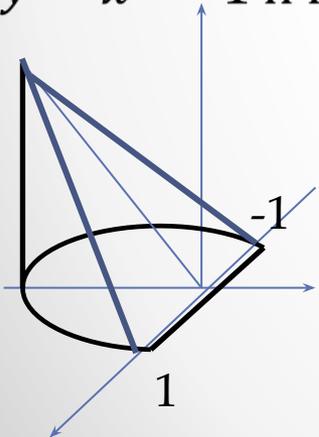
Пример 1. Вычислить $I = \iiint z dv$ по области, ограниченной поверхностью конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостями $z = 0, y = x, y = 0$, которая проецируется на плоскость XOY в треугольник:



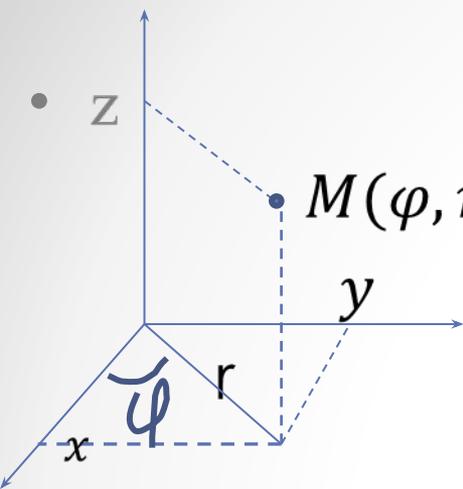
$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{6}$$

Пример 2. Найти объем тела, ограниченного параболическим цилиндром $y = x^2 - 1$ и плоскостями $z = -y, z = 0$.

$$\begin{aligned} V &= \iiint dv = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^0 dy \int_0^{-y} dz = \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^0 (-y) dy = \int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx = \\ &= \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \frac{8}{15} \end{aligned}$$



Тройной интеграл в цилиндрической системе координат



Элемент объема $dv = r d\varphi dr dz$

$$M(\varphi, r, z) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

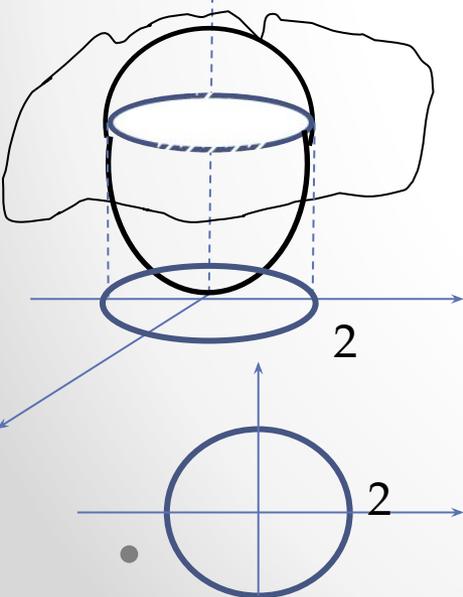
Пример: Найти объем тела, ограниченного параболоидами $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$

Параболоиды пересекаются в плоскости $z = 4$ по окружности $x^2 + y^2 = 4$.

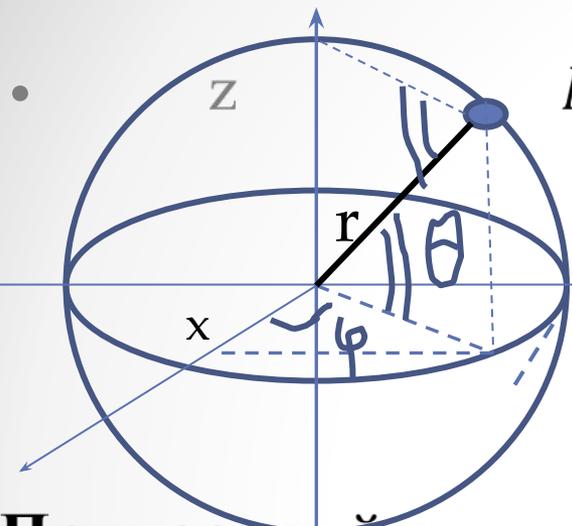
Пространственная область проектируется на плоскость XOY в круг $x^2 + y^2 \leq 4$.

Записываем уравнения поверхностей в цилиндрической системе координат $z_1 = r^2$, $z_2 = 8 - r^2$:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{r^2}^{8-r^2} dz = 2\pi \int_0^2 (8r - r^3) dr = 16\pi$$



Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат



$M(\varphi, \theta, r)$ φ – полярный угол, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

θ – азимутальный угол $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq r \leq R; \quad dv = r^2 \cos\theta d\varphi d\theta dr$

$x = r \cos\varphi \cos\theta, \quad y = r \sin\varphi \cos\theta, \quad z = r \sin\theta$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Пример: найти массу, распределенную внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = z$

с плотностью $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$M = \iiint \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} r r^2 \cos\theta dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \frac{(\sin\theta)^4}{4} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos\theta d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{\sin^5\frac{\pi}{2}}{5} = \frac{\pi}{10}$$

