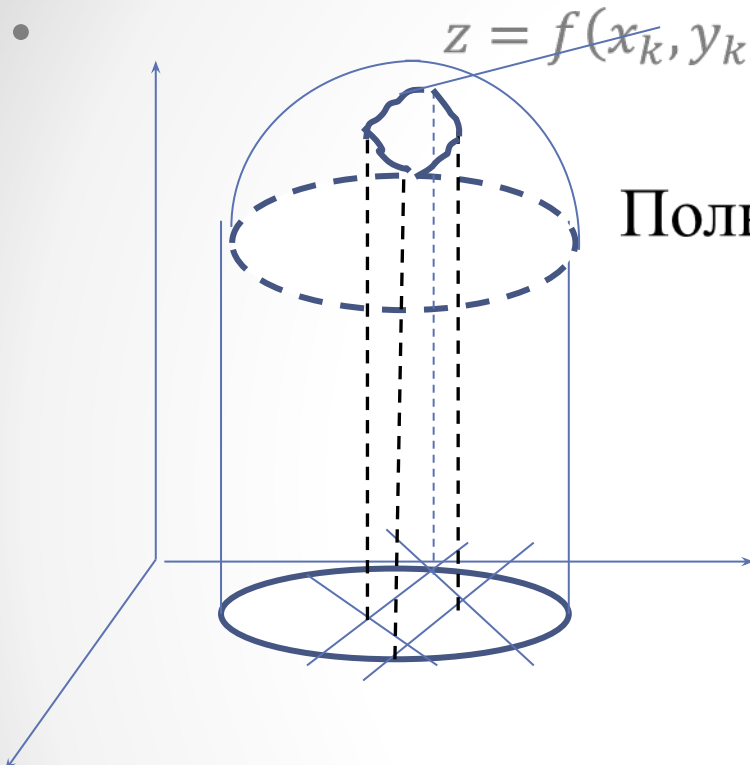


# Кратные интегралы

Лекция 3

# Двойной интеграл. Задача о вычислении объема

•



$z = f(x_k, y_k) \geq 0$  Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k =$$

$$\max \Delta S_k \rightarrow 0$$

$$= \iint f(x, y) dS - \text{двойной интеграл}$$

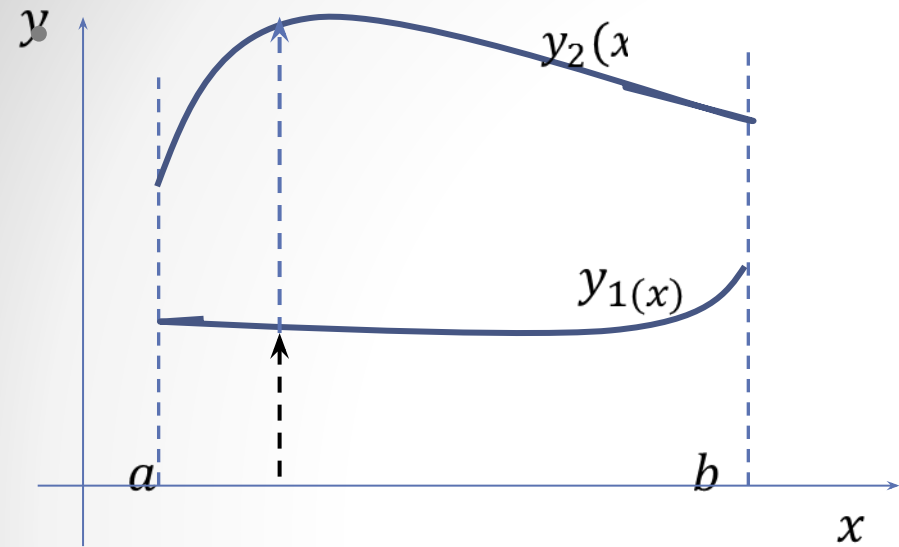
$D$  – область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$  - элемент площади

•  $\iint dS = S$  - площадь области  $D$

•

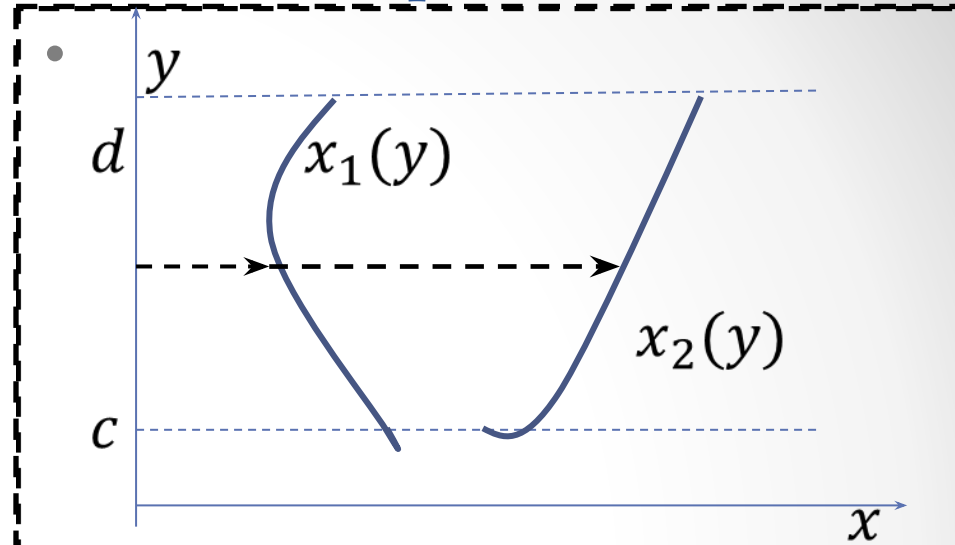
# Вычисление двойного интеграла



$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy =$$

$$= \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Внутренний интеграл по  $y$  при условии  $x = const$ . Пределы во внутреннем интеграле зависят от  $x$



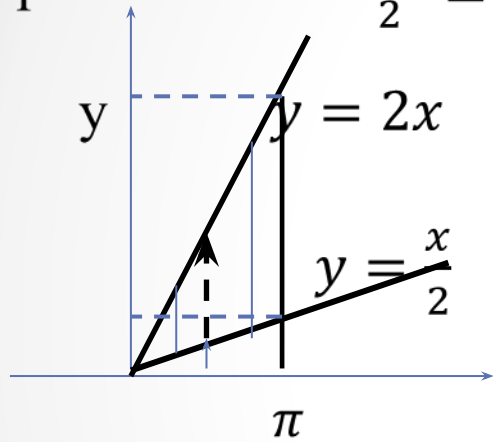
$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx =$$

$$= \int_c^d \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

• Внутренний интеграл по  $x$  при условии  $y = const$ . Пределы во внутреннем интеграле зависят от  $y$

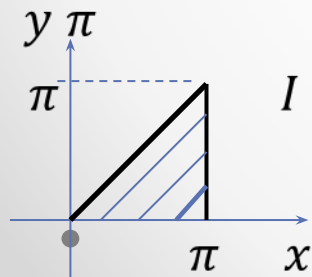
# Примеры вычислений двойного интеграла в декартовых координатах

**Пример 1.** Вычисляем двойной интеграл по области, заданной неравенствами  $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$ ;  $0 \leq x \leq \pi$



$$\begin{aligned} \iint_D \sin y \, dx \, dy &= \int_0^\pi dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \sin y \, dy = \\ &= \int_0^\pi \left( \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \sin y \, dy \right) dx = \int_0^\pi \left( -\cos 2x + \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2\pi + \frac{1}{2} \sin 0 + 2 \sin \frac{\pi}{2} - 2 \sin 0 = 2. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислим  $I = \int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ . Внутренний интеграл по  $x$  «неберущийся». Но интеграл можно вычислить, изменив порядок интегрирования. Область интегрирования – треугольник:



$$I = \int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \int_0^x dy = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} x dx = -\cos \pi + \cos 0 = 2$$

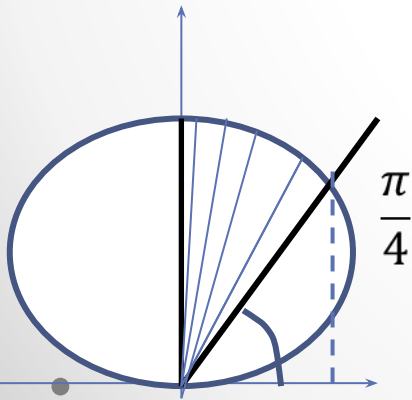
# Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат

Применяется в случае, если область интегрирования – круг или его часть:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $dS = r d\varphi dr$ ;

$$\iint f(x, y) dS = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

**Пример 3.** Вычислить  $I = \int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy$ .

Область интегрирования – часть смещенного круга, ограниченная кривыми  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = x$ ,  $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ ,  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 2y \rightarrow r = 2 \sin \varphi$



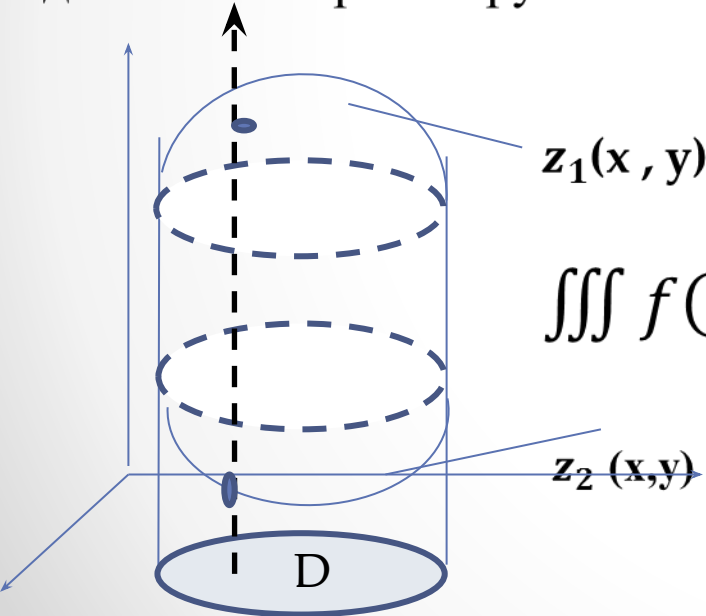
$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} r^2 dr = \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d \cos \varphi = \frac{20}{9\sqrt{2}} \end{aligned}$$

# Тройной интеграл

Функция  $f(x, y, z)$  непрерывна в замкнутой ограниченной пространственной области  $V$ . Тогда тройным интегралом по этой области называют  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint f(x, y, z) dv$ .

$dv$  – элемент объема.  $\iiint dv = V$  – объем области интегрирования

**Вычисление в декартовой системе координат** сводится к вычислению однократного интеграла по одной из координат и двойного интеграла по проекции на одну из координатных плоскостей. Пусть область интегрирования ограничена сверху и снизу гладкими поверхностями  $z_2(x, y)$ ,  $z_1(x, y)$  и **однозначно** проектируется на плоскость  $XOY$  в область  $D$ .

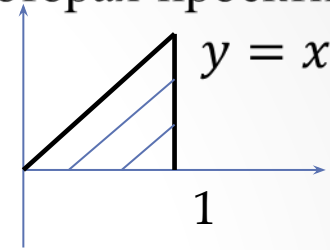
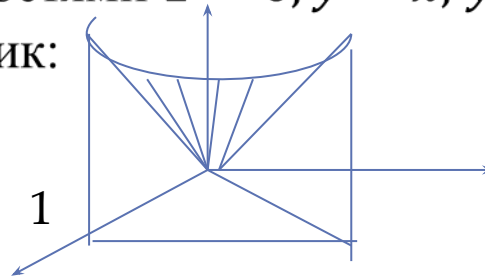


$$\iiint f(x, y, z) dv = \iint dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

**Двойной интеграл берется по проекции  $D$**

# Примеры

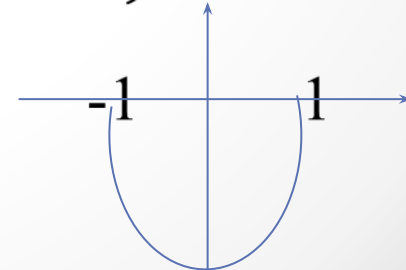
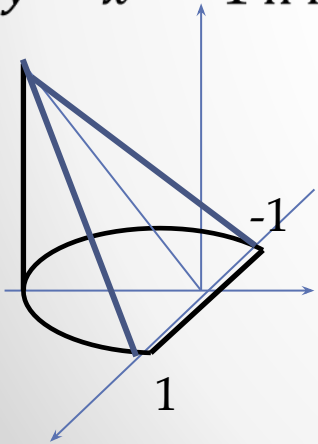
**Пример 1.** Вычислить  $I = \iiint z dv$  по области, ограниченной поверхностью конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  и плоскостями  $z = 0, y = x, y = 0$ , которая проецируется на плоскость  $XOY$  в треугольник:



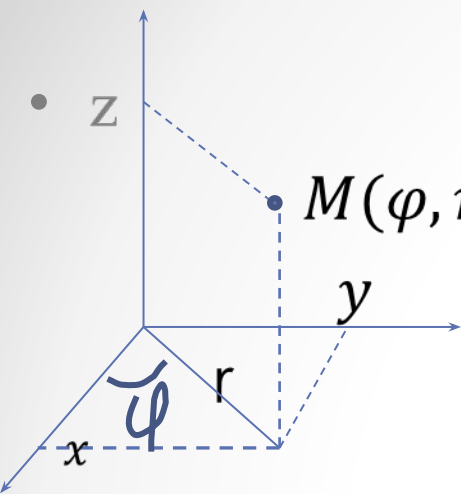
$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{6}$$

**Пример 2.** Найти объем тела, ограниченного параболическим цилиндром  $y = x^2 - 1$  и плоскостями  $z = -y, z = 0$ .

$$\begin{aligned} V &= \iiint dv = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^0 dy \int_0^{-y} dz = \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^0 (-y) dy = \int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx = \\ &= \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \frac{8}{15} \end{aligned}$$



# Тройной интеграл в цилиндрической системе координат



Элемент объема  $dv = r d\varphi dr dz$

$$M(\varphi, r, z) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

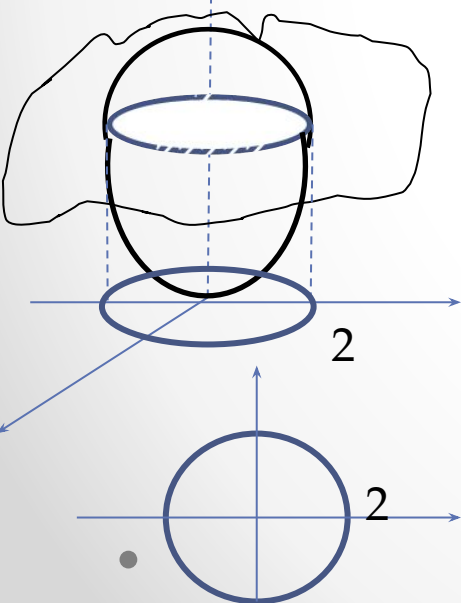
**Пример:** Найти объем тела, ограниченного параболоидами  $z = 8 - x^2 - y^2$ ,  $z = x^2 + y^2$

Параболоиды пересекаются в плоскости  $z = 4$  по окружности  $x^2 + y^2 = 4$ .

Пространственная область проектируется на плоскость  $XOY$  в круг  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

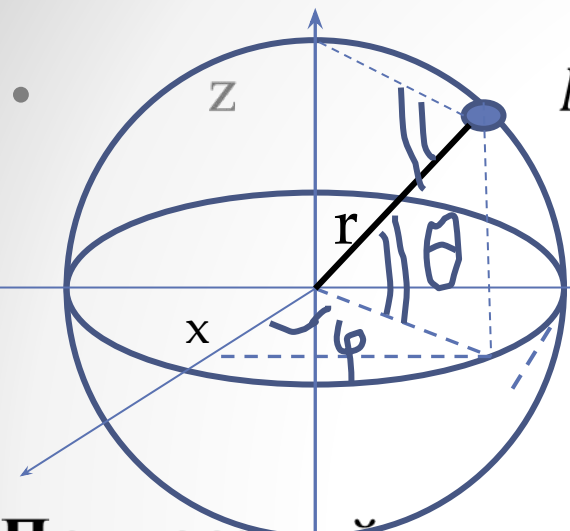
Записываем уравнения поверхностей в цилиндрической системе координат  $z_1 = r^2$ ,  $z_2 = 8 - r^2$ :

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{r^2}^{8-r^2} dz = 2\pi \int_0^2 (8r - r^3) dr = 16\pi$$





# Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат



$M(\varphi, \theta, r)$   $\varphi$  – полярный угол,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$\theta$  – азимутальный угол  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq r \leq R; \quad dv = r^2 \cos\theta d\varphi d\theta dr$

$x = r \cos\varphi \cos\theta, \quad y = r \sin\varphi \cos\theta, \quad z = r \sin\theta$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

**Пример:** найти массу, распределенную внутри сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = z$

с плотностью  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

$$M = \iiint \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} r r^2 \cos\theta dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \frac{(\sin\theta)^4}{4} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos\theta d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{\sin^5\frac{\pi}{2}}{5} = \frac{\pi}{10}$$

