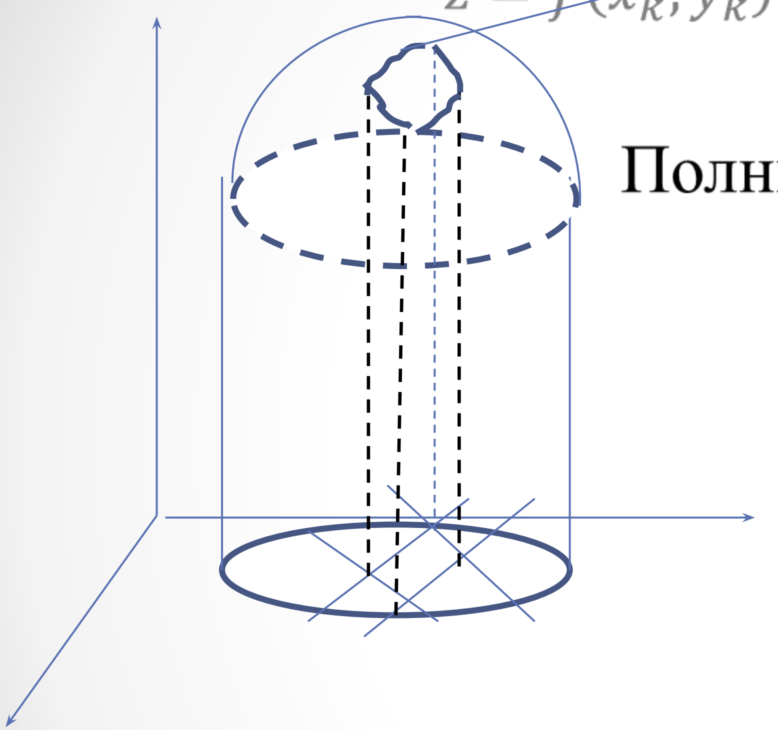
Кратные интегралы

Лекция 3

Двойной интеграл. Задача о вычислении объема

- $z = f(x_k, y_k) \geq 0$



Элементарный объем:

$$\Delta V_k = f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

Полный объем- интегральная сумма:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

$$\mathrm{V} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ max\Delta S_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k =$$

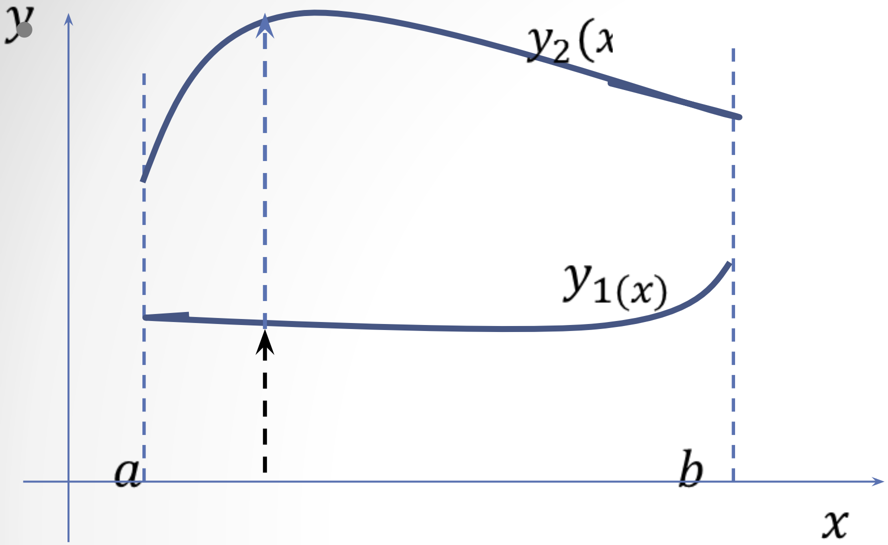
$$= \iint f(x, y)dS$$ - двойной интеграл

D – область интегрирования

$\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ - элемент площади

- $\iint dS = S$ - площадь области D

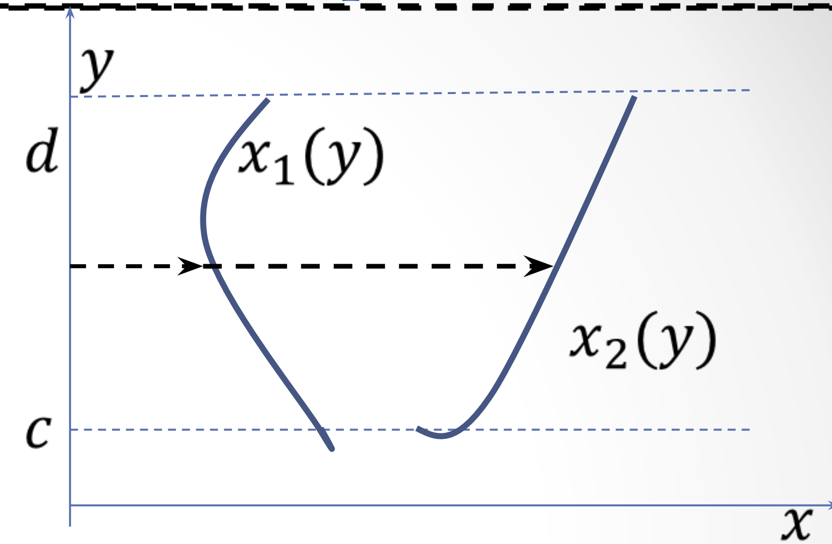
Вычисление двойного интеграла



$$\int_a^b dx \int_{y_{1(x)}}^{y_2(x)} f(x,y)dy =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{y_{1(x)}}^{y_{2(x)}} f(x,y)dy \right) dx$$

Внутренний интеграл по y при условии $x = const$. Пределы во внутреннем интеграле зависят от x



$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx =$$

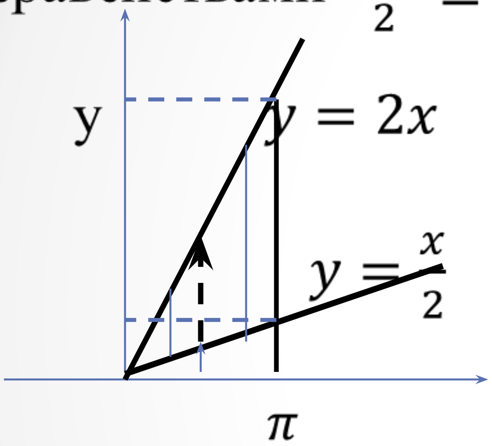
$$= \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

- Внутренний интеграл по x

при условии $y = const$. Пределы во внутреннем интеграле зависят от y

Примеры вычислений двойного интеграла в декартовых координатах

Пример 1. Вычисляем двойной интеграл по области, заданной неравенствами $\frac{x}{2} \le y \le 2x; \quad 0 \le x \le \pi$

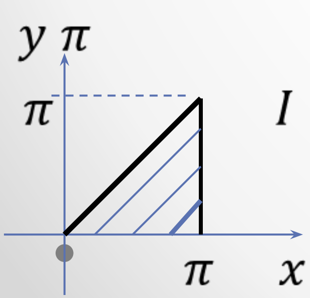


$$\iint_D sinydxdy = \int_0^{\pi} dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} sinydy =$$

$$\int_0^{\pi}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{2x} sinydy\right)dx = \int_0^{\pi}\left(-cos2x + cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}sin2\pi + \frac{1}{2}sin0 + 2sin\frac{\pi}{2} - 2sin0 = 2.$$

Пример 2. Вычислим $\mathbf{I} = \int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \frac{sinx}{x} dx$. Внутренний интеграл по x «неберущийся». Но интеграл можно вычислить, изменив порядок интегрирования. Область интегрирования – треугольник:



$$I = \int_0^{\pi} dx \int_0^{x} \frac{sinx}{x} dy = \int_0^{\pi} \frac{sinx}{x} \int_0^{x} dy = \int_0^{\pi} \frac{sinx}{x} xdx = -cos\pi + cos0 = 2$$

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат

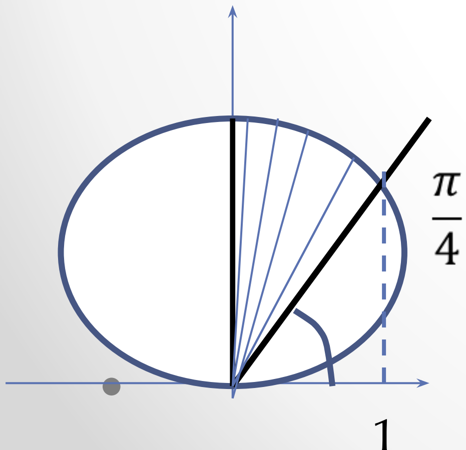
Применяется в случае, если область интегрирования – круг или его часть: $x = rcos\varphi, \quad y = rsin\varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad dS = rd\varphi dr$;

$$\iint f(x,y)dS = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(rcos\varphi, rsin\varphi)rdr$$

Пример 3. Вычислить $I = \int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$.

Область интегрирования – часть смещенного круга , ограниченная кривыми $x = 0,\ x = 1,\ y = x,\ y = 1 + \sqrt{1-x^2}$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$,

$$x^2 + y^2 = 2y \rightarrow \quad r = 2sin\varphi$$



$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2sin\varphi} r^2dr = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin^3\varphi d\varphi =$$

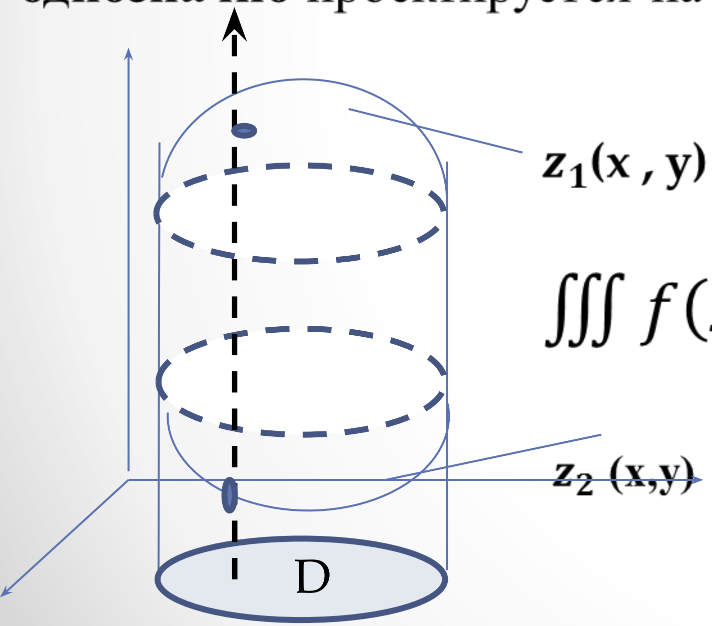
$$= -\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos^2\varphi)dcos\varphi = \frac{20}{9\sqrt{2}}$$

Тройной интеграл

Функция $f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной пространственной области V . Тогда тройным интегралом по этой области называют $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k = \iiint f(x,y,z)dv$.

dv – элемент объема. $\iiint dv = V$ – объем области интегрирования

Вычисление в декартовой системе координат сводится к вычислению однократного интеграла по одной из координат и двойного интеграла по проекции на одну из координатных плоскостей. Пусть область интегрирования ограничена сверху и снизу гладкими поверхностями $z_2(x,y)$, $z_1(x,y)$ и **однозначно** проектируется на плоскость) $X0Y$ в область D.

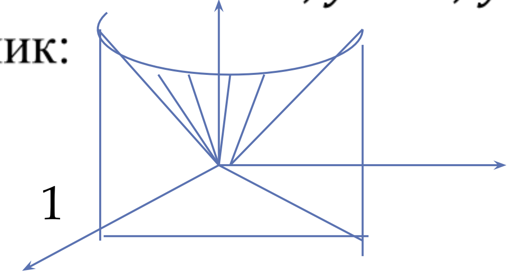


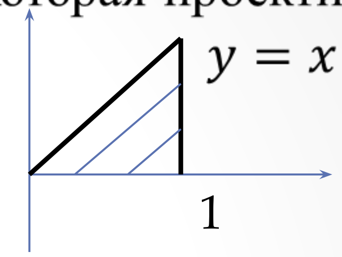
$$\iiint f(x,y,z)dv = \iint dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Двойной интеграл берется по проекции D

Примеры

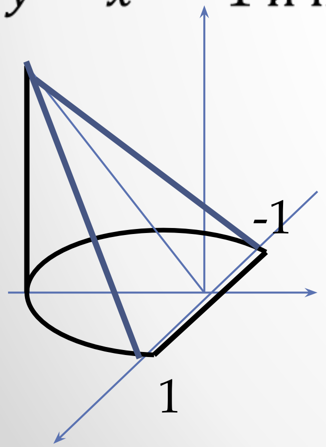
Пример 1. Вычислить $I = \iiint z dv$ по области, ограниченной поверхностью конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостями $z = 0, y = x, y = 0$, которая проектируется на плоскость $X0Y$ в треугольник:





$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3}\right) dx = \frac{1}{6}$$

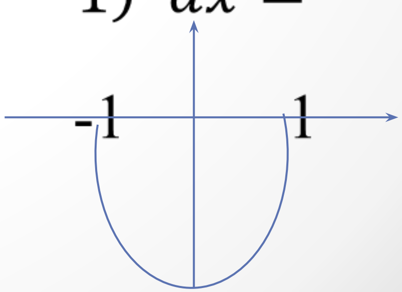
Пример 2. Найти объем тела, ограниченного параболическим цилиндром $y = x^2 - 1$ и плоскостями $z = -y, \quad z = 0$.



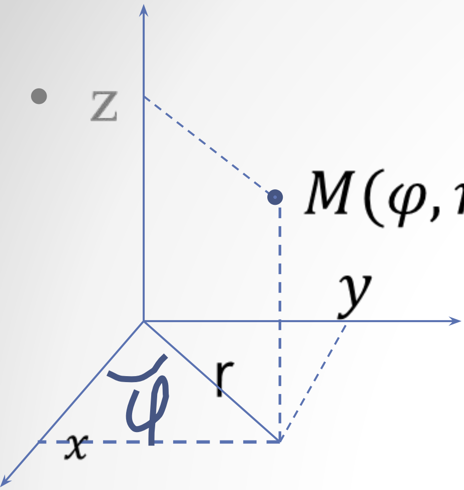
$$V = \iiint dv = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^0 dy \int_0^{-y} \mathrm{dz} =$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^0 (-y) dy = \int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \frac{8}{15}$$



Тройной интеграл в цилиндрической системе координат



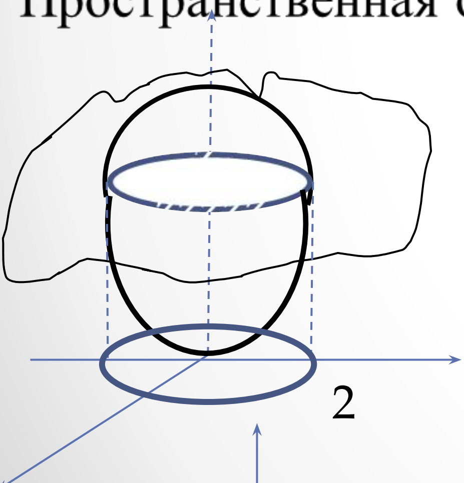
Элемент объема $\boldsymbol{dv = rd\varphi drdz}$

$M(\varphi, r, z) \quad x = rcos\varphi, \quad y = rsin\varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$

Пример: Найти объем тела, ограниченного параболоидами $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$

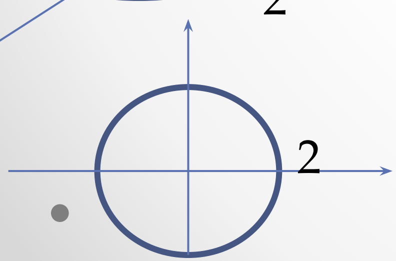
Параболоиды пересекаются в плоскости $z = 4$ по окружности $x^2 + y^2 = 4$.

Пространственная область проектируется на плоскость $X0Y$ в круг $x^2 + y^2 \leq 4$.

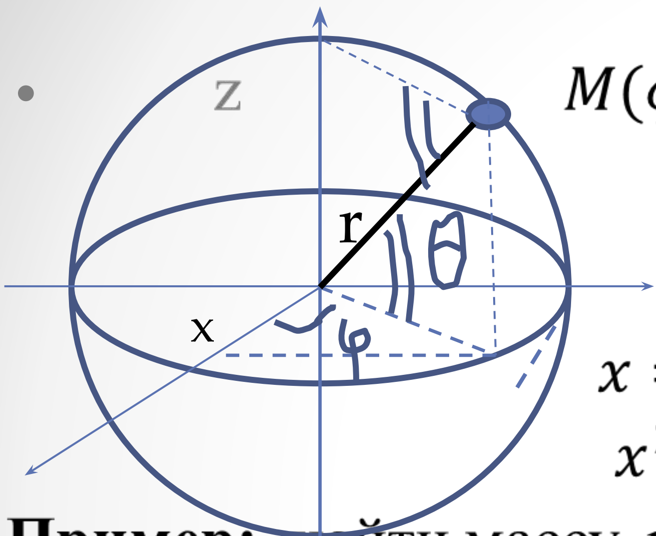


Записываем уравнения поверхностей в цилиндрической системе координат $z_1 = r^2, \quad z_2 = 8 - r^2$:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 rdr \int_{r^2}^{8-r^2} dz = 2\pi \int_0^2 (8r - r^3) dr = 16\pi$$



Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат



$M(\varphi, \theta, r)$ φ – полярный угол, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

θ – азимутальный угол $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}$

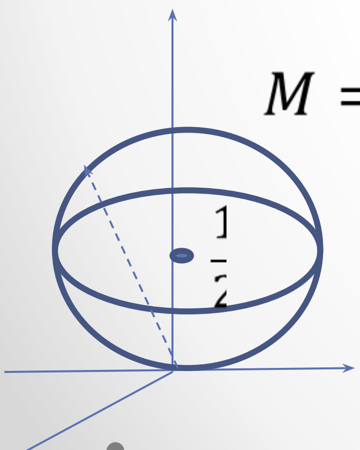
$0 \leq r \leq R;$ $dv = r^2 cos\theta d\varphi d\theta dr$

$x = rcos\varphi cos\theta,$ $y = rsin\varphi cos\theta,$ $z = rsin\theta$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Пример: найти массу, распределенную внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = z$

с плотностью $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



$$M = \iiint \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{sin\theta} r r^2 cos\theta dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta \frac{(sin\theta)^4}{4} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4\theta cos\theta d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{sin^5\frac{\pi}{2}}{5} = \frac{\pi}{10}$$