РГСУ

Раздел 5. Элементы теории вероятностей

Орлик
Любовь Константиновна
Профессор кафедры информатики
и прикладной математики,
кандидат физ.-мат. наук, профессор

Учебные материалы

5.1. Элементы комбинаторики

5.2.Алгебра событий

5.3. Основные теоремы теории вероятностей

5.1.Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает число комбинаций из предметов

Перестановки $P_n = n!$ **- важен только порядок.**

Пример. Сколькими способами можно расставить 5 различных книг на полке?

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

Рассмотрим n занумерованных ячеек:

1	2	3	…	n
n	$n-1$	$n-2$	…	1

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

(факториал)

Размещения: определение, формулы для вычисления числа размещений (без возвращения/с возвращением), пример

Размещения

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

-- важен порядок и состав.

Пример. Всего 10 цифр. Сколькими способами можно составить трехзначный номер?

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Формула выводится с помощью k ячеек

1	2	3	…	*k*
n	*n-1*	*n-2*	…	*n-(k-1)*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Размещения с повторениями.

Все важно – и порядок, и предметы, причем их можно повторять.

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные призы?

$$\overline{A}_{10}^{5} = 10^{5} = 100000$$

Сочетания: определение, формулы для вычисления числа сочетаний , пример

Сочетания

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Разные предметы, порядок не важен.

Пример. В группе 20 человек. Сколькими способами можно выбрать трех делегатов на конференцию?

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{17! \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17!} = 1140$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

Создатели теории вероятностей

Случайные события. Подсчет вероятностей случайных событий

Теория вероятностей **изучает объективные закономерности массовых случайных со**

Христиан Гюйгенс (1629 – 1695) Нидерландский физик, механик, математик, астроном и изобретатель

Блез Паскаль (1623 – 1662) Французский математик , физик, литератор и философ

Пьер Ферма (1601-1665) Французский математик, политолог

Я́коб Берну́лли
(1654 - 1705)
Швейцарский
математик

Пьер-Симо́н,
маркиз де Лапла́с
(1749 -1827)
Французский
математик,
механик , физик и
астроном

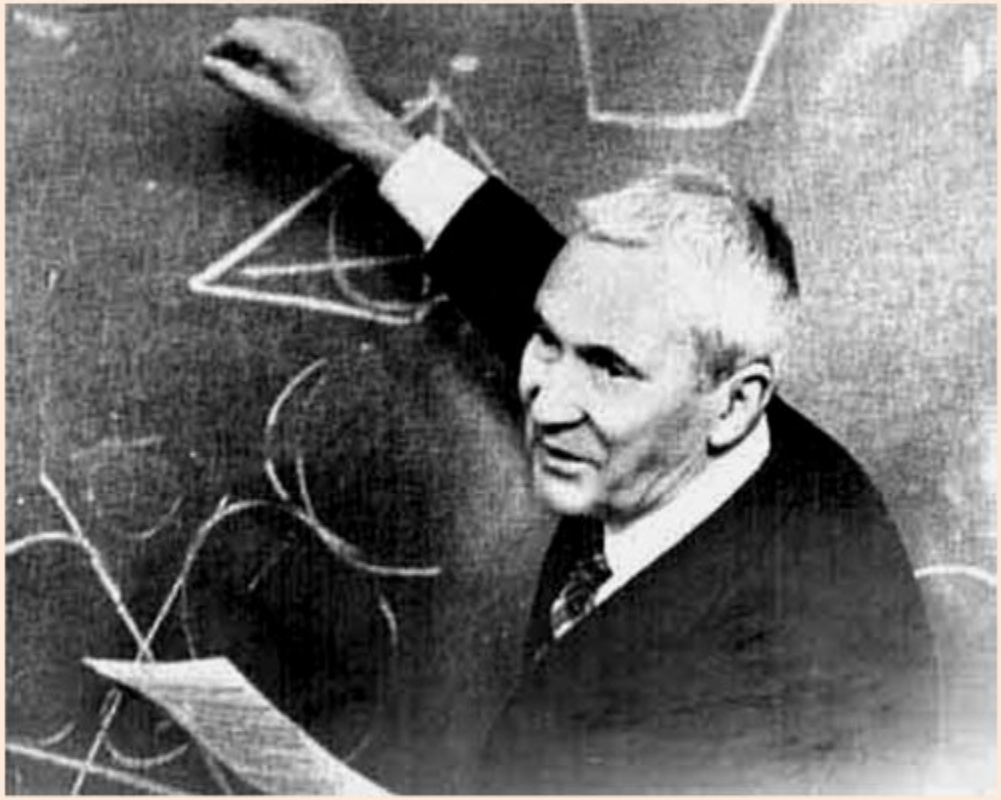
Симео́н Дени́ Пуассо́н (1781 -1840)
Французский математик,
механик , физик

Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс
(1777 -1855) Немецкий математик,
механик , физик и астроном

Пафну́тий Льво́вич Чебышев
(1821 - 1894)
Русский математик и механик

Андре́й Андре́евич Ма́рков
(1856 - 1922)
Русский математик

Алекса́ндр Миха́йлович Ляпуно́в
(1857 – 1918)
Русский математик и механик



Андре́й Никола́евич Колмого́ров (урождённый *Катаев*, 1903 – 1987)

Советский математик, один из крупнейших математиков XX века

5.2. Алгебра событий

2. Случайные события.

Определение 1. Событие называется случайным, если оно может произойти, а может не произойти при заданном комплексе условий. Обозначение событий -- $A, B, C, \ldots$

Пример 1. Бросаем монету. Событие «выпадет герб» является случайным.

Пример 2. Бросаем кубик. Цифры 1,2,3,4,5,6 – случайны.

Второй вопрос: *Основные понятия теории вероятностей*

опыт $\Rightarrow$ **событие** $(A, B, \dots)$ $\Rightarrow$ **вероятность события** $P(A)$

- ✓ **Опыт (испытание) – осуществление определённого комплекса условий**
- ✓ **Событие** $(A, B, \dots)$ **– исход опыта**
- ✓ **Вероятность события (Р(А) или *p*) – это число, характеризующее объективную возможность появления события в данном опыте**

$$0 \le P(A) \le 1$$

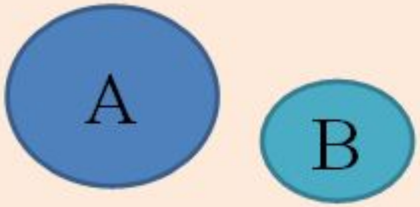
Если $P(A) = 0$**, то событие** A **называют *невозможным*;**

если $P(A) = 1$**, то событие** A **называют *достоверным*;**

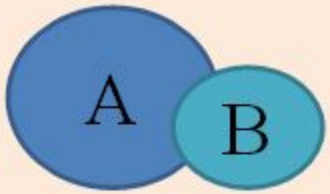
если $0 < P(A) < 1$**, то событие** A **называют *случайным*.**

Виды событий по отношению друг к другу

- ***Несовместные*** - **не могут произойти вместе в данном опыте**



- ***Совместные*** - **могут произойти вместе в данном опыте**



- ***Полная группа событий***

События $A_1, A_2, \ldots , A_n$ **образуют полную группу, если:**

- **они попарно несовместные;**
- **одно из них обязательно произойдет**

A_1	A_2	A_3	A_4
…	…	…	A_n

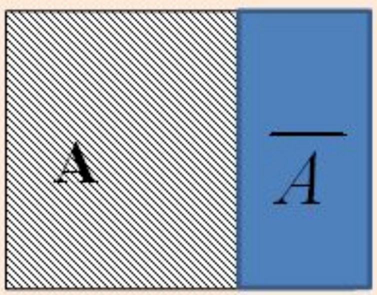
$$\boxed{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1}$$

- условие нормировки

✓ *Схема урн* – **полная группа равновозможных событий**

✓ *Равновозможные* **(равновероятные) – имеют одинаковую возможность (шанс, вероятность) появиться в данном опыте**

✓ *Противоположные* (A и $\overline{A}$) – **два события, которые образуют полную группу событий**

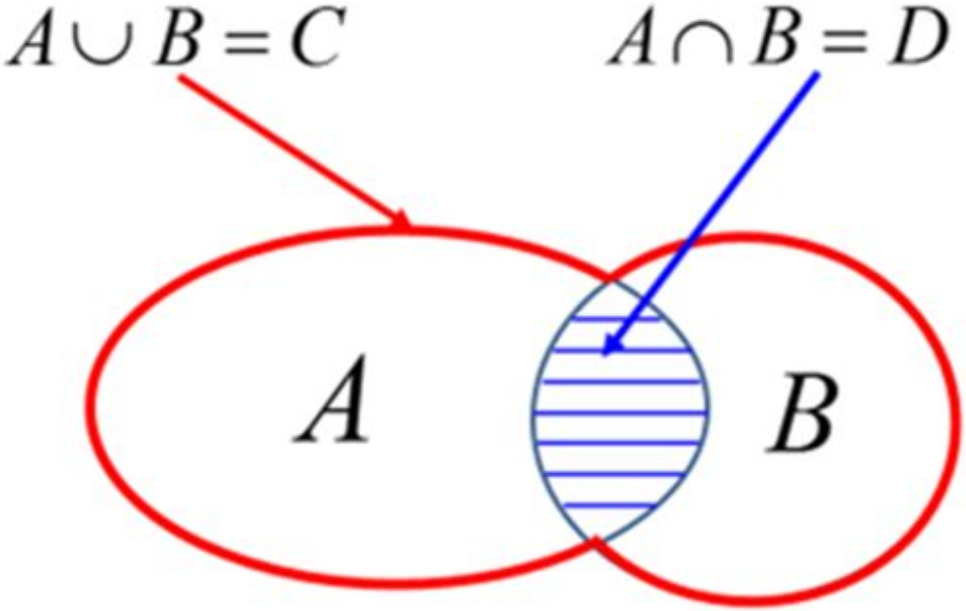


A и $\overline{A}$ (A и не A)

Обозначим $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = q$, **тогда**

$$\boxed{p + q = 1}$$

$$\boxed{q = 1 - p}$$

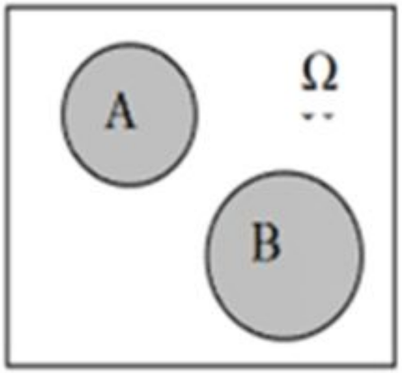
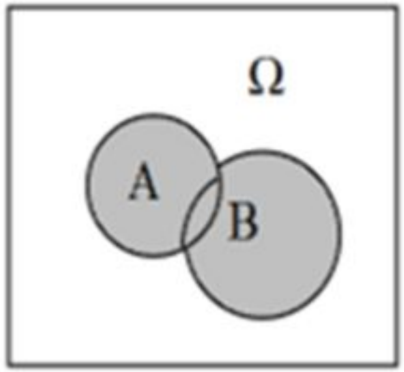
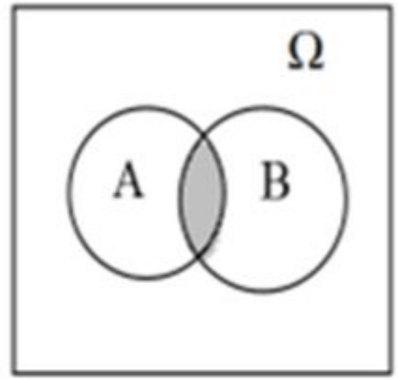
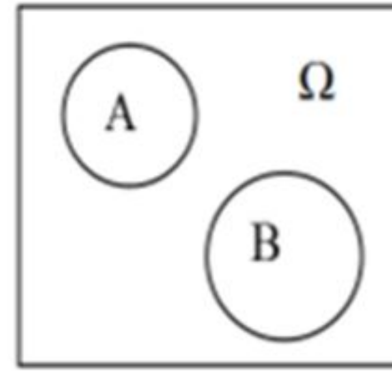

$A \cup B = C$
$A \cap B = D$
A
B

Определение 1.

Суммой случайных событий $A+B$ называется третье событие C, состоящее в наступлении хотя бы одного из первых двух событий.

Определение 2.

Произведением случайных событий $A \cdot B$ называется третье событие D , состоящее в наступлении как события A, так и B.

Геометрическая иллюстрация			
			
$C = A + B$ *A* и *B* - несовместные	$C = A + B$ *A* и *B* - совместные	$D = A \cdot B$ *A* и *B* - совместные	$D = A \cdot B = 0$ *A* и *B* - несовместные

Пример.

Определение вероятности событий: классическое, геометрическое, статистическое

3. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ СПОСОБЫ ПОДСЧЁТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ

$P(A) = \frac{m}{n}$	$P(A) = \frac{D_A}{D}$	$P(A) \approx P^*(A) = \frac{M}{N}$
Классическая вероятность	**Геометрическая вероятность**	**Статистическая вероятность**
n – число ***всех*** исходов опыта m – число ***«удачных»*** исходов опыта *Опыт проводится умозрительно* *Исходы образуют* ***«схему урн»*** *Число исходов опыта* - ***конечное***	D – мера *всей* области (длина, площадь, объем) D_A – мера области, *соответствующая событию* A *Опыт проводится умозрительно* *Попадание в любую точку области равновероятное* *Число исходов опыта* – ***бесконечное***	$P^*(A)$ – относительная частота события A N - *общее* число проведённых опытов M - число опытов, в которых появилось событие A *Опыты проводятся непосредственно* $P(A)$ - число, около которого группируются $P^*(A)$

Примеры непосредственного вычисления вероятностей случайных событий

Формула

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Брошена игральная кость. Какова вероятность выпадения простого числа?

Перечислим все простые числа от 1 до 6. Это 1,2,3,5.

$$m(A)=4,\ n=6,\ \ P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Брошен кубик два раза подряд. Какова вероятность, что оба раза выпадут четные числа?

Событие A --- выпали четные числа.

2,4,6 --- оба раза.

$n = 6 \cdot 6 = 36$ **событий. На каждую цифру №1 есть 6 возможностей цифры №2.**

Правило умножения

Если комбинация A состоит из k вариантов, каждый вариант состоит из l других вариантов B, то пара (A, B) состоит из $k \cdot l$ вариантов

Вычислим $m(A)$, то есть перечислим пары

2,2	**2,4**	**2,6**
4,2	**4,4**	**4,6**
6,2	**6,4**	**6,6**

$$m = 9.$$

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Задача

Монету бросали 3 раза. Найти вероятность того, что «решка» выпала 2 раза.

Переберём все возможные исходы

о о о о р р р р

р р о о р р о о $n=8; m=3; P(A)=3/8$

р о р о р о р о

5.3.Основные теоремы теории вероятностей

Правила сложения вероятностей

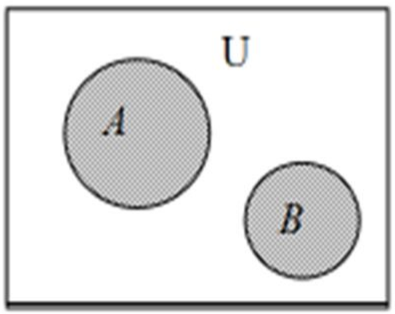
$$P(A+B)$$

события A и B несовместные

$P(A) = S_A$

$P(B) = S_B$

$S_{A+B} = S_A + S_B$



$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Замечание. Это правило справедливо для любого конечного числа несовместных событий.

события A и B совместные

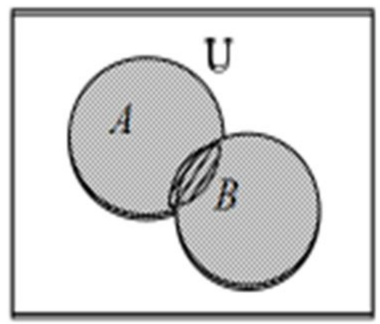
$P(A) = S_A$

$P(B) = S_B$

$S_{A+B} = S_A + S_B - S_{A \cdot B} =$

$= S_A + S_B - S_{AB}.$

$S_{AB} = P(AB)$



$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Пример. Стрелок производит выстрел по мишени, состоящей из двух колец: 10 и 9. Вероятность попадания в 10 равна $P(A) = 0{,}1$.
Вероятность попадания в 9 равна
$P(B) = 0{,}2.$
Какова вероятность попасть в мишень?

$$P(A + B) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3.$$

В урне 5 шаров - 2 белых и 3 черных. Опыт: вынимают один за другим два шара. Рассматриваются события: A - достать первым черный шар; B - достать вторым черный шар. Какова вероятность события B, если:

а) первый вынутый шар **не возвращать** в урну.

Так как событие A произошло, то в урне осталось 2 черных шара из 4. Поэтому:

$$P_A(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

б) первый вынутый шар **возвратить** в урну.

Если первый вынутый шар **возвратить** в урну, то событие B не будет зависеть от того, произошло событие A или нет. Поэтому: $P(B) = \frac{3}{5}$.

Два события A и B называются **независимыми**, если вероятность наступления одного из них не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Условная вероятность

Вероятность наступления события A **при условии**, что событие B произошло, обозначают $P_B(A)$ и называют **условной вероятностью.**

Правила умножения вероятностей

$P(A\,B)$

Если события A и B зависимые

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$

Если события A и B независимые

$P(A \cdot B) = P(A)\, P(B)$

Пример. **Два стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания для первого** $p_1 = 0,8;$ **для второго** $p_2 = 0,7.$ **Найти вероятности следующих событий.**

А) оба стрелка попадут в цель.

$$P(A) = p_1 \cdot p_2 = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56.$$

В) только один попадет в цель.

Это значит, что первый попадает и второй не попадает или наоборот, то есть второй попадает и первый не попадает. В этом случае

$$P(B) = p_1 \cdot (1 - p_2) + p_2(1 - p_1);$$

$$P(B) = 0,38.$$

С) Хотя бы один попал в цель.
Рассмотрим противоположное событие: оба не попали в цель.

$$P(C) = (1 - p_1)(1 - p_2);$$

$$P(C) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06;$$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0,94.$$

Повторные испытания Бернулли

Пусть дано случайное событие A
с известной вероятностью $P(A) = p.$
Введем событие $\overline{A}, \quad P(\overline{A}) = q,$
причем $q = 1 - p.$

Пусть имеется только одно событие $A.$
Но из него можно сделать сколько угодно событий путем повторения.

Например, стреляя в одну мишень, можем получить

$$A \cdot \overline{A} \cdot A$$ **(попал, не попал, попал).**

Получилось новое событие, которое называется повторным испытанием.

$$P(A \cdot \overline{A} \cdot A) = p^2 q.$$

Однако, событие A может появляться и в другой последовательности

$$B_2 = AA \ldots A\bar{A} \ldots \bar{A}AA,$$

а может и в другой.

Всего получается C_n^k комбинаций.

Теорема. Вероятность того, что в серии из n испытаний событие A появится k раз, вычисляется по формуле **Бернулли**

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Вероятность того, что событие A произойдет не менее k раз в серии из n опытов, вычисляется по формуле

$$P_n(\geq k) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Пример. Какова вероятность, что в семье, имеющей 5 детей, будут 2 мальчика? Вероятности рождения детей считать одинаковыми.

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}; \quad n = 5, k = 2.$$

$$P_5(2) = C_5^2 (0,5)^2 (0,5)^3 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

ФОРМУЛА ПУАССОНА

Пусть p --- вероятность события A в каждом испытании. Тогда вероятность $P_n(k)$ наступления события A ровно k раз в серии из n испытаний вычисляется по формуле Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где $\lambda = np.$

Замечание. **Формула Пуассона тем точнее, чем меньше** p **и больше** n, **причем** $np < 10$.

***Пример*.** **Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.**

По условию

$$n = 100000; \quad p = 0{,}0001; \quad k = 5.$$

Так как n **велико, а** p **мало, то воспользуемся формулой Пуассона**

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = np = 10.$$

$$P_{100000}(5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} \approx 0{,}0375.$$

Формула полной вероятности

Пусть даны два события A и B, причем B является суммой новых событий:

$$B = H_1 + H_2 + \ldots + H_n.$$

Тогда

$$AB = AH_1 + \ldots + AH_n.$$

Предполагается, что события

$$H_1, H_2, \ldots, H_n$$

несовместны.

Тогда события $AH_1, \ldots, AH_n$ также несовместны, как части несовместных событий.

Тогда

$$P(AB) = P(AH_1) + \ldots + P(AH_n);$$

$$P(AB) = \sum_{k=1}^{n} P_{H_k}(A) \cdot P(H_k).$$

Так как $P(AB) = P(A)$, **то получаем формулу, которая называется формулой полной вероятности**

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P_{H_k}(A) \cdot P(H_k).$$

$H_{1,} \dots, H_n$ **называются гипотезами. Гипотез должно быть столько, чтобы они обеспечили все возможные результаты испытаний.**

Пример. В группе спортсменов

5 лыжников,

6 велосипедистов и

4 бегуна.

Вероятность выполнить квалификационную норму:

для лыжника – 0,9;

для велосипедиста – 0,8;

для бегуна – 0,75.

Найти вероятность, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

Введем событие

A --- спортсмен выполнит норму.

Гипотезы:

H_1 --- лыжник,

H_2 --- велосипедист,

H_3 --- бегун.

$$P(H_1)=\frac{5}{15};\qquad P(H_2)=\frac{6}{15};$$

$$P(H_3)=\frac{4}{15}.$$

$$P_{H_1}(A)=0,9;\qquad P_{H_2}(A)=0,8;$$

$$P_{H_3}(A)=0,75.$$

$$P(A)=P_{H_1}(A)\cdot P(H_1)+$$
$$+P_{H_2}(A)\cdot P(H_2)+P_{H_3}(A)\cdot P(H_3);$$
$$P(A)=0,82.$$

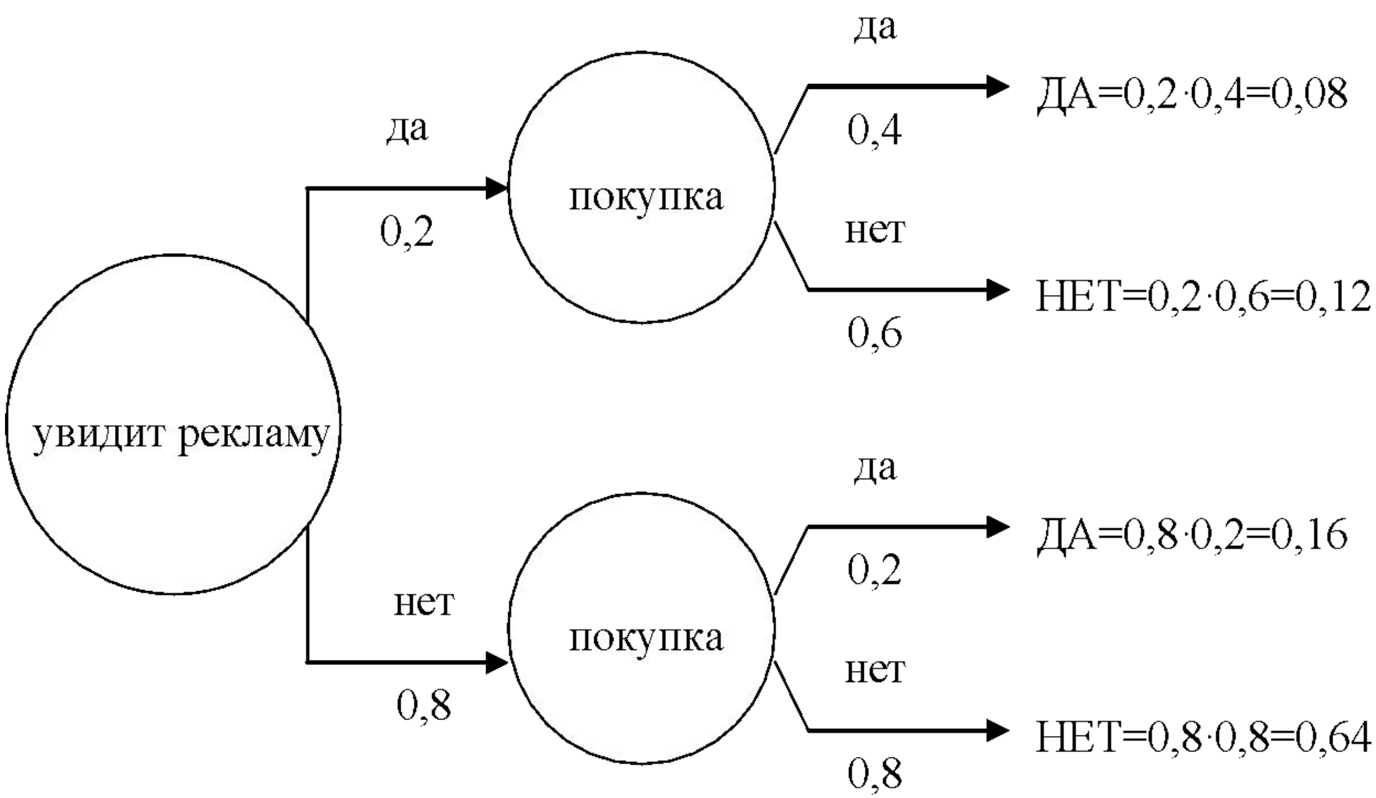
Пример

- Вероятность того, что потребитель увидит рекламу некоторого товара, оценивается как 0,2. Вероятность покупки этого товара потребителем под влиянием рекламы составляет 0,4, а без рекламы – 0,2. Найти вероятность покупки данного товара потребителем

Дерево вероятностей

Решение: используем так называемое «дерево вероятностей»

В качестве отправной точки изобразим круг, обозначающий событие «увидит рекламу» и проведем от него два отрезка, соответствующие альтернативам «да» и «нет»; в конце каждого из отрезков расположим событие «покупка», от каждого из которых, в свою очередь, проведем по два отрезка – «да» и «нет». Получим следующую схему



увидит рекламу
да
0,2
нет
0,8
покупка
покупка
да
0,4
нет
0,6
да
0,2
нет
0,8
ДА=0,2·0,4=0,08
НЕТ=0,2·0,6=0,12
ДА=0,8·0,2=0,16
НЕТ=0,8·0,8=0,64

Двигаясь по каждой «ветке» слева направо, перемножим все вероятности, попадающиеся на пути, и запишем полученные значения в конце. Интересующее нас событие происходит только на тех «ветках», где оно имеет место на последнем участке. Полная вероятность покупки продукта равна сумме вероятностей на первой и третьей «ветках», то есть 0,24.

Если рассмотрение событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ позволяет делать какие-то заключения относительно события A, то естественно предположить, что верно и обратное, то есть что по известной полной вероятности $P(A)$ можно найти или уточнить вероятности отдельных гипотез. Такую возможность дает ***формула Байеса***:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}$$

Пример.

Клиент звонит на сервисный номер с целью получить консультацию. Все звонки распределяются между тремя колл-центрами. Процент загруженных операторов считается одинаковым и постоянным для всех колл-центров. В первом колл-центре 20 операторов, во втором – 15, в третьем – 25. Известно, что сотрудники первого центра дают неточную информацию в 10% случаев, второго – в 5%, третьего – в 4%. Применяя полученную информацию, клиент обнаружил, что она неточная. Найти вероятность того, что его консультировал оператор второго колл-центра.

Решение: обозначим событие *A* – информация неточная, событие H_i – оператор относится к *i*-му колл-центру. Распишем все необходимые вероятности, учитывая выражение для *P*(*A*).

$$P(H_1) = 20/60 = 1/3; \quad P(H_2) = 15/60 = 1/4;$$

$$P(H_3) = 25/60 = 5/12; \quad P_{H_1}(A) = 0{,}1; \quad P_{H_2}(A) = 0{,}05;$$

$$P_{H_3}(A) = 0{,}04.$$

Тогда =

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A)}$$

$$= \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}33 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}42 \cdot 0{,}04}$$

=0,2

Рекомендуемая литература

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2011. — 404 с.

2. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2. – М.: АСТ, 2014. – 415с.

3. Вентцель Е.С. Овчаров Л.А.Теория вероятностей и её инженерные приложения М.: Высшая школа,2000.–480с.