



РГСУ

Раздел 5. Элементы теории вероятностей

Орлик

Любовь Константиновна

Профессор кафедры информатики
и прикладной математики,
кандидат физ.-мат. наук, профессор

Учебные материалы

5.1. Элементы комбинаторики

5.2. Алгебра событий

5.3. Основные теоремы теории вероятностей

5.1.Элементы комбинаторики

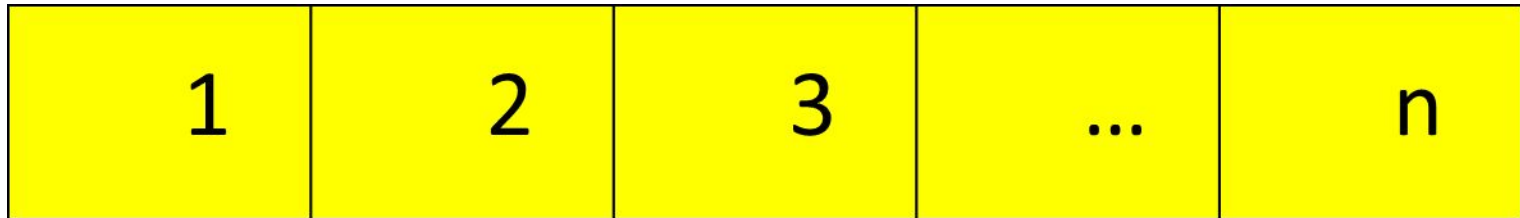
Комбинаторика изучает число комбинаций из предметов

Перестановки $P_n = n!$ - важен только порядок.

Пример. Сколькими способами можно расставить 5 различных книг на полке?

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

Рассмотрим n пронумерованных ячеек:



n $n-1$ $n-2$... 1

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

(факториал)

Размещения: определение,
формулы для вычисления числа
размещений (без возвращения/с
возвращением), пример

Размещения

-- важен порядок и состав.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример. Всего 10 цифр. Сколькими способами можно составить трехзначный номер?

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Формула выводится с помощью k ячеек

1	2	3	...	k
n	$n-1$	$n-2$...	$n-(k-1)$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Размещения с повторениями.
Все важно – и порядок, и
предметы, причем их можно
повторять.**

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

В конкурсе по 5 номинациям
участвуют 10 кинофильмов.
Сколько существует вариантов
распределения призов, если по
каждой номинации
установлены
различные призы?

$$\overline{A}_{10}^5 = 10^5 = 1000000$$

Сочетания: определение,
формулы для вычисления числа
сочетаний , пример

Сочетания

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Разные предметы, порядок не важен.

Пример. В группе 20 человек. Сколькими способами можно выбрать трех делегатов на конференцию?

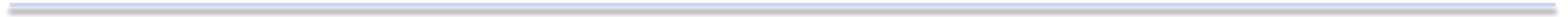
$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{17! \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17!} = 1140$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

Создатели теории вероятностей



Случайные события. Подсчет вероятностей случайных событий

Теория вероятностей изучает объективные
закономерности массовых случайных
событий



Христиан Гюйгенс
(1629 – 1695)
Нидерландский физик,
механик, математик,
астроном и изобретатель



Блез Паскаль (1623 – 1662)
Французский математик,
физик, литератор и философ



Пьер Ферма (1601-1665)
Французский математик,
политолог

Якоб Бернулли
(1654 - 1705)
Швейцарский
математик



Пьер-Симон,
маркиз де Лаплас
(1749 - 1827)
Французский
математик,
механик, физик и
астроном



Симеон Дени Пуассон (1781 - 1840)
Французский математик,
механик, физик



Иоганн Карл Фридрих Гаусс
(1777 - 1855) Немецкий математик,
механик, физик и астроном

Пафну́тий Льво́вич Чебы́шев
(1821 - 1894)

Русский математик и механик



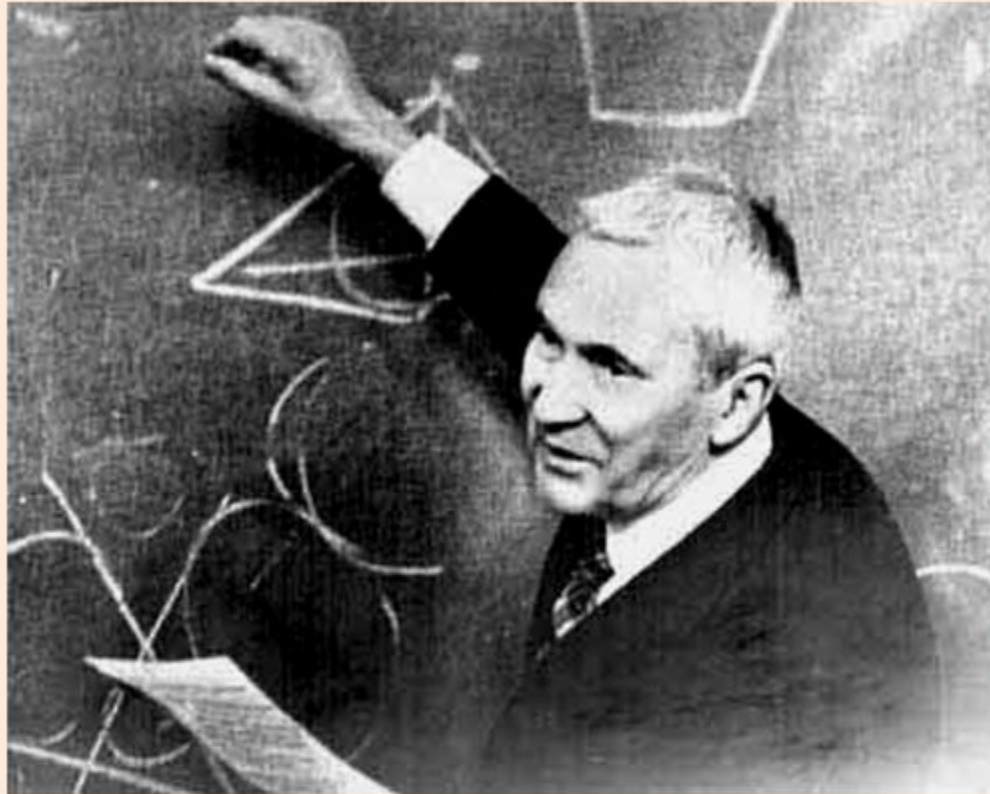
Андре́й Андре́евич Ма́рков
(1856 - 1922)

Русский математик



Алекса́ндр Миха́йлович Ляпуно́в
(1857 – 1918)

Русский математик и механик



Андрей Николаевич Колмогоров (урождённый *Катаев*, 1903 – 1987)

Советский математик, один из крупнейших математиков XX века

5.2. Алгебра событий

2. Случайные события.

Определение 1. Событие называется случайным, если оно может произойти, а может не произойти при заданном комплексе условий. Обозначение событий -- A, B, C, \dots

Пример 1. Бросаем монету. Событие «выпадет герб» является случайным.

Пример 2. Бросаем кубик. Цифры 1,2,3,4,5,6 – случайны.

Второй вопрос: *Основные понятия теории вероятностей*

опыт \Rightarrow **событие** (A, B, \dots) \Rightarrow **вероятность события** $P(A)$

- ✓ **Опыт** (испытание) – осуществление определённого комплекса условий
- ✓ **Событие** (A, B, \dots) – исход опыта
- ✓ **Вероятность события** $(P(A)$ или $p)$ – это число, характеризующее объективную возможность появления события в данном опыте

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Если $P(A) = 0$, то событие A называют *невозможным*;

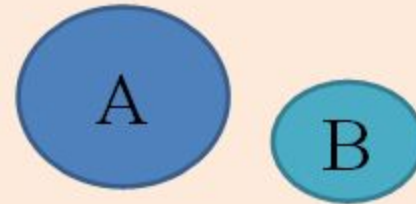
если $P(A) = 1$, то событие A называют *достоверным*;

если $0 < P(A) < 1$, то событие A называют *случайным*.

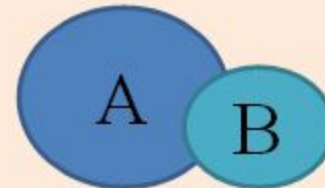


Виды событий по отношению друг к другу

✓ **Несовместные** - не могут произойти вместе в данном опыте



✓ **Совместные** - могут произойти вместе в данном опыте



✓ **Полная группа событий**

События A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу, если:

- они попарно несовместные;
- одно из них обязательно произойдет

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

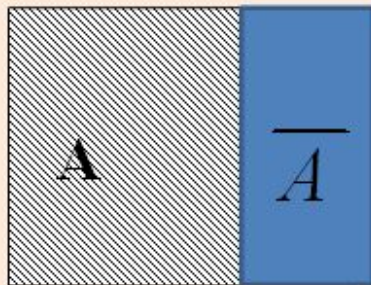
- условие нормировки

A_1	A_2	A_3	A_4
...	A_n

✓ *Схема урн* – полная группа равновозможных событий

✓ *Равновозможные* (равновероятные) – имеют одинаковую возможность (шанс, вероятность) появиться в данном опыте

✓ *Противоположные* (A и \bar{A}) – два события, которые образуют полную группу событий



A и \bar{A} (A и не A)

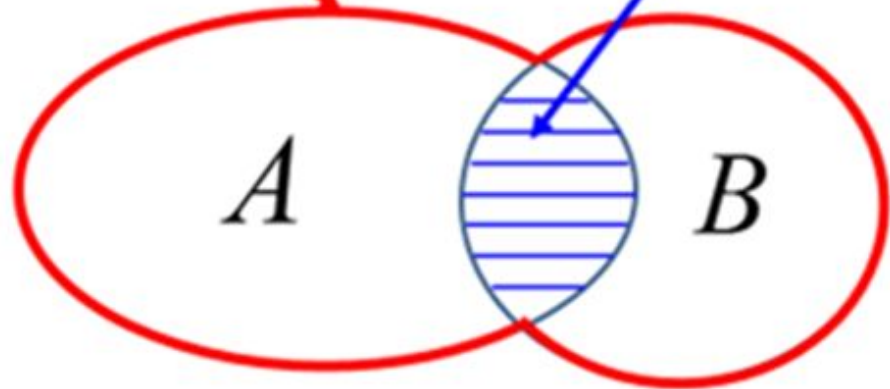
Обозначим $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = q$, тогда

$$p + q = 1$$

$$q = 1 - p$$

$$A \cup B = C$$

$$A \cap B = D$$



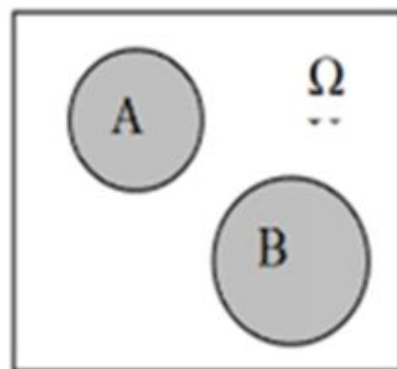
Определение 1.

Суммой случайных событий $A + B$ называется третье событие C , состоящее в наступлении хотя бы одного из первых двух событий.

Определение 2.

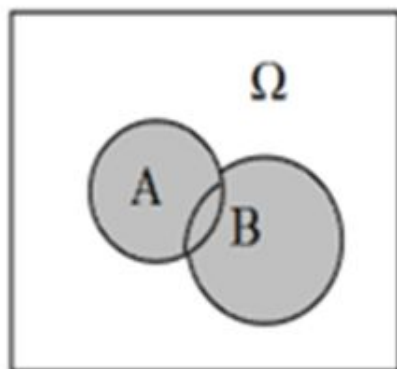
Произведением случайных событий $A \cdot B$ называется третье событие D , состоящее в наступлении как события A , так и B .

Геометрическая иллюстрация



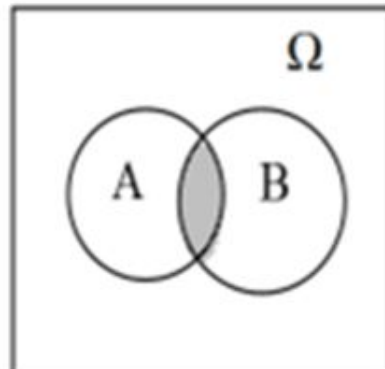
$$C = A + B$$

A и B - несовместные



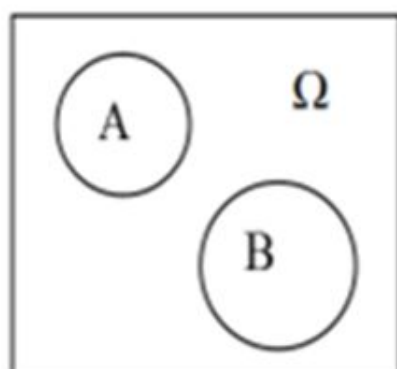
$$C = A + B$$

A и B - совместные



$$D = A \cdot B$$

A и B - совместные



$$D = A \cdot B = 0$$

A и B - несовместные

Пример.

Определение вероятности
событий: классическое,
геометрическое, статистическое

3. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ СПОСОБЫ ПОДСЧЁТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$P(A) = \frac{D_A}{D}$$

$$P(A) \approx P^*(A) = \frac{M}{N}$$

Классическая вероятность

n – число *всех*
исходов опыта

m – число *«удачных»*
исходов опыта

Опыт проводится
умозрительно

Исходы образуют
«схему урн»

Число исходов опыта –
конечное

Геометрическая вероятность

D – мера *всей* области
(длина, площадь,
объем)

D_A – мера области,
соответствующая
событию A

Опыт проводится
умозрительно

Попадание в любую
точку области
равновероятное

Число исходов опыта –
бесконечное

Статистическая вероятность

$P^*(A)$ – относительная
частота события A

N – *общее* число
проведённых опытов

M – число опытов, в
которых появилось
событие A

Опыты проводятся
непосредственно

$P(A)$ – число, около
которого группируются
 $P^*(A)$

Примеры непосредственного вычисления вероятностей случайных событий

Формула

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Брошена игральная кость. Какова вероятность выпадения простого числа?

Перечислим все простые числа от 1 до 6. Это 1,2,3,5.

$$m(A) = 4, \quad n = 6, \quad P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Брошен кубик два раза подряд. Какова вероятность, что оба раза выпадут четные числа?

Событие A --- выпали четные числа.

2,4,6 --- оба раза.

$n = 6 \cdot 6 = 36$ событий. На каждую цифру №1 есть 6 возможностей цифры №2.

Правило умножения

Если комбинация A состоит из k вариантов,
каждый вариант состоит из l других
вариантов то пара (A, B)
состоит из $k \cdot l$ вариантов

Вычислим $m(A)$, то есть перечислим пары

2,2	2,4	2,6
4,2	4,4	4,6
6,2	6,4	6,6

$$m = 9.$$

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Задача

Монету бросали 3 раза. Найти вероятность того, что «решка» выпала 2 раза.

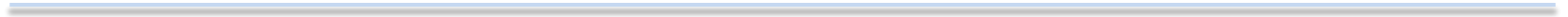
Переберём все возможные исходы

о о о о р р р р

р р о о р р о о $n=8; m=3; P(A)=3/8$

р о р о р о р о

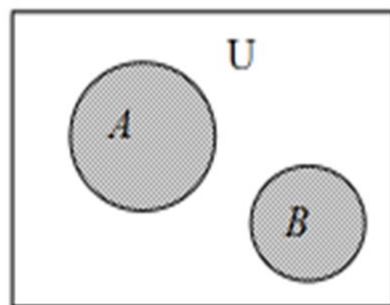
5.3. Основные теоремы теории вероятностей



Правила сложения вероятностей

$$P(A+B)$$

события A и B несовместные

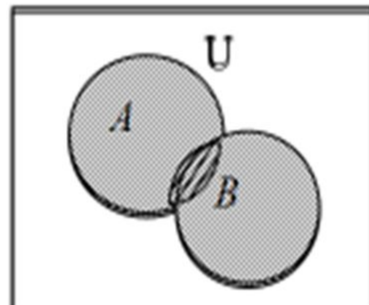


$$\begin{aligned}P(A) &= S_A \\P(B) &= S_B \\S_{A+B} &= S_A + S_B\end{aligned}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Замечание. Это правило справедливо для любого конечного числа несовместных событий.

события A и B совместные



$$\begin{aligned}P(A) &= S_A \\P(B) &= S_B \\S_{A+B} &= S_A + S_B - S_{A \cdot B} \\&= S_A + S_B - S_{AB} \\S_{AB} &= P(AB)\end{aligned}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Пример. Стрелок производит выстрел по мишени, состоящей из двух колец: 10 и 9. Вероятность попадания в 10 равна $P(A) = 0,1$. Вероятность попадания в 9 равна $P(B) = 0,2$. Какова вероятность попасть в мишень?

$$P(A + B) = 0,1 + 0,2 = 0,3.$$

В урне 5 шаров - 2 белых и 3 черных. Опыт: вынимают один за другим два шара. Рассматриваются события: A - достать первым черный шар; B - достать вторым черный шар. Какова вероятность события B , если:

а) первый вынутый шар **не возвращать** в урну.

Так как событие A произошло, то в урне осталось 2 черных шара из 4. Поэтому:

$$P_A(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

б) первый вынутый шар **возвратить** в урну.

Если первый вынутый шар **возвратить** в урну, то событие B не будет зависеть от того, произошло событие A

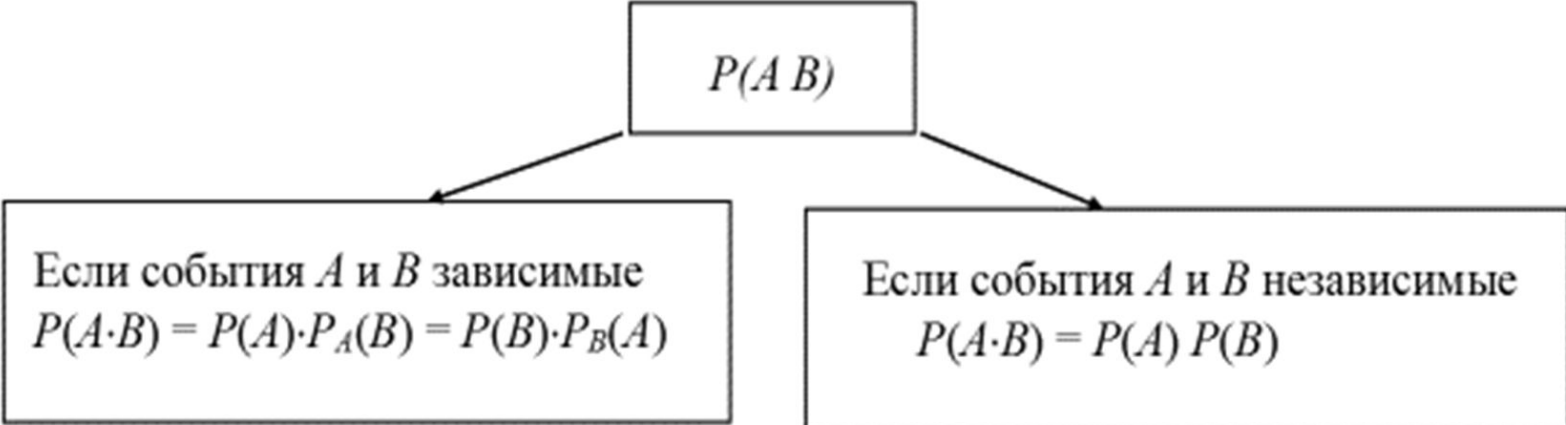
или нет. Поэтому: $P(B) = \frac{3}{5}$.

Два события A и B называются **независимыми**, если вероятность наступления одного из них не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Условная вероятность

Вероятность наступления события A при условии, что событие B произошло, обозначают $P_B(A)$ и называют **условной вероятностью**.

Правила умножения вероятностей

$$P(A \cdot B)$$


Если события A и B зависимые
 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$

Если события A и B независимые
 $P(A \cdot B) = P(A) P(B)$

Пример. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по цели.

Вероятность попадания для первого $p_1 = 0,8$; для второго $p_2 = 0,7$.
Найти вероятности следующих событий.

A) оба стрелка попадут в цель.

$$P(A) = p_1 \cdot p_2 = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56.$$

B) только один попадет в цель.

Это значит, что первый попадает и второй не попадает или наоборот, то есть второй попадает и первый не попадает. В этом случае

$$P(B) = p_1 \cdot (1 - p_2) + p_2(1 - p_1);$$

$$P(B) = 0,38.$$

С) Хотя бы один попал в цель.

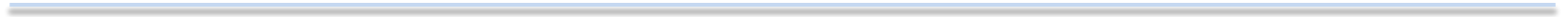
Рассмотрим противоположное событие: оба не попали в цель.

$$P(C) = (1 - p_1)(1 - p_2);$$

$$P(C) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06;$$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0,94.$$

Повторные испытания Бернулли



Пусть дано случайное событие A
с известной вероятностью $P(A) = p$.
Введем событие \bar{A} , $P(\bar{A}) = q$,
причем $q = 1 - p$.

Пусть имеется только одно событие A .
Но из него можно сделать сколько
угодно событий путем повторения.

Например, стреляя в одну мишень, можем получить

$A \cdot \bar{A} \cdot A$ (попал, не попал, попал).

Получилось новое событие, которое называется повторным испытанием.

$$P(A \cdot \bar{A} \cdot A) = p^2 q.$$

Однако, событие A может появляться и в другой последовательности

$$B_2 = AA...A\bar{A}...A\bar{A}A,$$

а может и в другой.

Всего получается C_n^k комбинаций.

Теорема. Вероятность того, что в серии из n испытаний событие A появится k раз, вычисляется по формуле **Бернулли**

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Вероятность того, что событие A произойдет не менее k раз в серии из n опытов, вычисляется по формуле

$$P_n(\geq k) = \sum_{m=k}^n C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Пример. Какова вероятность, что в семье, имеющей 5 детей, будут 2 мальчика? Вероятности рождения детей считать одинаковыми.

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}; \quad n = 5, k = 2.$$

$$P_5(2) = C_5^2 (0,5)^2 (0,5)^3 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

ФОРМУЛА ПУАССОНА

Пусть p --- вероятность события A в каждом испытании. Тогда вероятность $P_n(k)$ наступления события A ровно k раз в серии из n испытаний вычисляется по формуле Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где $\lambda = np$.

Замечание. Формула Пуассона тем точнее, чем меньше p и больше n , причем $np < 10$.

Пример. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

По условию

$$n = 100000; \quad p = 0,0001; \quad k = 5.$$

Так как n велико, а p мало, то воспользуемся формулой Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = np = 10.$$

$$P_{100000}(5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} \approx 0,0375.$$

Формула полной вероятности

Пусть даны два события A и B ,
причем B является суммой новых
событий:

$$B = H_1 + H_2 + \dots + H_n.$$

Тогда

$$AB = AH_1 + \dots + AH_n.$$

Предполагается, что события

$$H_1, H_2, \dots, H_n$$

несовместны.

Тогда события AH_1, \dots, AH_n также
несовместны, как части несовместных
событий.

Тогда

$$P(AB) = P(AH_1) + \dots + P(AH_n);$$

$$P(AB) = \sum_{k=1}^n P_{H_k}(A) \cdot P(H_k).$$

Так как $P(AB) = P(A)$, то
получаем формулу, которая называется
формулой полной вероятности

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P_{H_k}(A) \cdot P(H_k).$$

H_1, \dots, H_n называются **гипотезами**.
Гипотез должно быть столько, чтобы
они обеспечили все возможные
результаты испытаний.

Пример. В группе спортсменов

5 лыжников,

6 велосипедистов и

4 бегуна.

**Вероятность выполнить
квалификационную норму:**

для лыжника – 0,9;

для велосипедиста – 0,8;

для бегуна – 0,75.

**Найти вероятность, что спортсмен,
выбранный наудачу, выполнит норму.**

Введем событие

A --- спортсмен выполнит норму.

Гипотезы:

H_1 --- лыжник,

H_2 --- велосипедист,

H_3 --- бегун.

$$P(H_1) = \frac{5}{15}; \quad P(H_2) = \frac{6}{15};$$

$$P(H_3) = \frac{4}{15}.$$

$$P_{H_1}(A) = 0,9; \quad P_{H_2}(A) = 0,8;$$

$$P_{H_3}(A) = 0,75.$$

$$P(A) = P_{H_1}(A) \cdot P(H_1) + \\ + P_{H_2}(A) \cdot P(H_2) + P_{H_3}(A) \cdot P(H_3);$$

$$P(A) = 0,82.$$

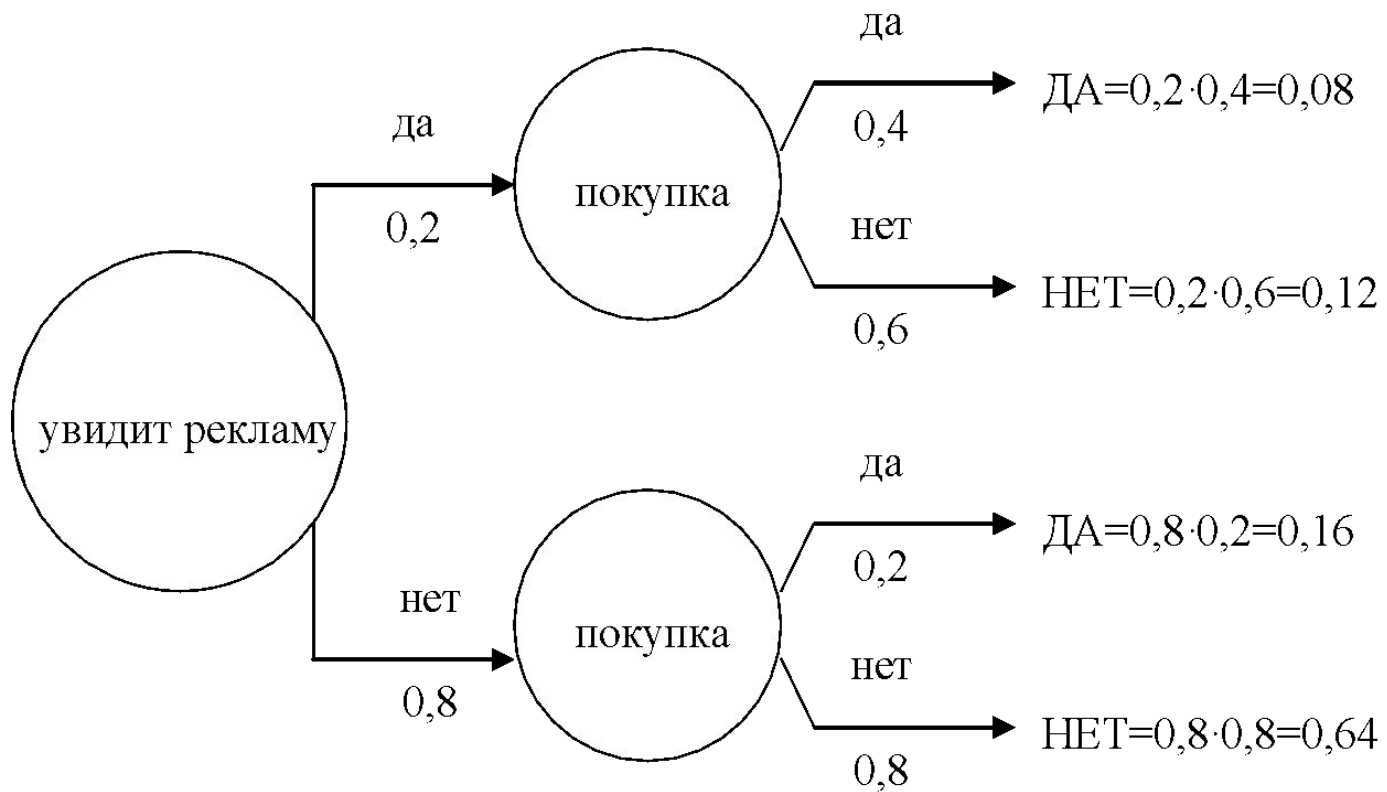
Пример

- Вероятность того, что потребитель увидит рекламу некоторого товара, оценивается как 0,2. Вероятность покупки этого товара потребителем под влиянием рекламы составляет 0,4, а без рекламы – 0,2. Найти вероятность покупки данного товара потребителем
-

Дерево вероятностей

Решение: используем так называемое «дерево вероятностей»

В качестве отправной точки изобразим круг, обозначающий событие «увидит рекламу» и проведем от него два отрезка, соответствующие альтернативам «да» и «нет»; в конце каждого из отрезков расположим событие «покупка», от каждого из которых, в свою очередь, проведем по два отрезка – «да» и «нет». Получим следующую схему



Двигаясь по каждой «ветке» слева направо, перемножим все вероятности, попадающиеся на пути, и запишем полученные значения в конце.

Интересующее нас событие происходит только на тех «ветках», где оно имеет место на последнем участке. Полная вероятность покупки продукта равна сумме вероятностей на первой и третьей «ветках», то есть 0,24.

Если рассмотрение событий (гипотез) H_1, H_2, \dots, H_n позволяет делать какие-то заключения относительно события A , то естественно предположить, что верно и обратное, то есть что по известной полной вероятности $P(A)$ можно найти или уточнить вероятности отдельных гипотез. Такую возможность дает **формула Байеса:**

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}$$

Пример.

Клиент звонит на сервисный номер с целью получить консультацию. Все звонки распределяются между тремя колл-центрами. Процент загруженных операторов считается одинаковым и постоянным для всех колл-центров. В первом колл-центре 20 операторов, во втором – 15, в третьем – 25. Известно, что сотрудники первого центра дают неточную информацию в 10% случаев, второго – в 5%, третьего – в 4%. Применяя полученную информацию, клиент обнаружил, что она неточная. Найти вероятность того, что его консультировал оператор второго колл-центра.

Решение: обозначим событие A – информация неточная, событие H_i – оператор относится к i -му колл-центру. Распишем все необходимые вероятности, учитывая выражение для $P(A)$.

$$P(H_1) = 20 / 60 = 1/3 \quad P(H_2) = 15 / 60 = 1/4$$

$$P(H_3) = 25 / 60 = 5/12 \quad P_{H_1}(A) = 0,1 \quad P_{H_2}(A) = 0,05$$

$$P_{H_3}(A) = 0,04$$

Тогда =
$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A)}$$

$$= \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,33 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,05 + 0,42 \cdot 0,04} = 0,2$$

Рекомендуемая литература

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2011. — 404 с.

2. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2. – М.: АСТ, 2014. – 415с.

3. Вентцель Е.С. Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения М.: Высшая школа, 2000. – 480с.