

7. Теорема. (О счетной аддитивности интеграла Лебега). Пусть  $C \in \Sigma$  и измеримая функция  $f : C \rightarrow [-\infty, +\infty]$  такова, что существует интеграл  $\int_C f d\mu \in [-\infty, +\infty]$ .

Пусть множества  $A_k \in \Sigma$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , попарно не пересекаются, содержатся во множестве  $C$  и  $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Тогда интегралы  $\int_A f d\mu$  и

$\int_{A_k} f d\mu$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , существуют и справедливо равенство

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu. (*)$$

Доказательство. По условию хотя бы один из интегралов  $\int_C f^+ d\mu$  и  $\int_C f^- d\mu$  конечен. Допустим для определенности, что

$$\int_C f^+ d\mu < +\infty.$$

По свойству (с) §2 тогда

$$\int_A f^+ d\mu \leq \int_C f^+ d\mu < +\infty \text{ и все } \int_{A_k} f^+ d\mu \leq \int_C f^+ d\mu < +\infty.$$

Поэтому в равенстве (\*) существуют все интегралы. По теореме 6 §3 имеем

$$\int_A f^- d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^- d\mu, \quad \int_A f^+ d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^+ d\mu.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^+ d\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^- d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f^+ d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f^- d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f^+ d\mu - \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f^- d\mu \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \int_{A_k} f^+ d\mu - \int_{A_k} f^- d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие. Если  $f \in L(\mu, C)$ , то формула  $\mu_f(A) = \int_A f d\mu$

определяет конечную вещественную меру на  $\sigma$ -алгебре  $\Sigma_C = \{A \subset C; A \in \Sigma\}$  измеримых подмножеств множества  $C$ .

8. Теорема. (О линейности интеграла). Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $C \in \Sigma$ ,  $f$  и  $g \in L(\mu, C)$ , причем  $f, g: C \rightarrow \mathbb{R}$  (т.е. обе функции всюду на  $C$  конечны). Тогда функции  $\alpha f$  и  $f + g$  также суммируемы и справедливы равенства

$$\int_C \alpha \cdot f d\mu = \alpha \cdot \int_C f d\mu, \quad (3)$$

$$\int_C (f + g) d\mu = \int_C f d\mu + \int_C g d\mu. \quad (4)$$

Доказательство. По свойствам (с) и (d) § 3 гл.1 функции  $\alpha f$  и  $f + g$  на множестве  $C$  измеримы.

Существование интеграла  $\int_C \alpha \cdot f d\mu$  и равенство (3) доказываются

просто: Если  $\alpha > 0$ , то по определению интеграла от произвольной измеримой функции и по свойству (e) §2

$$\begin{aligned} \int_C \alpha \cdot f \, d\mu &= \int_C (\alpha \cdot f)^+ \, d\mu - \int_C (\alpha \cdot f)^- \, d\mu = \int_C \alpha \cdot f^+ \, d\mu - \int_C \alpha \cdot f^- \, d\mu = \\ &= \alpha \cdot \int_C f^+ \, d\mu - \alpha \cdot \int_C f^- \, d\mu = \alpha \cdot \left( \int_C f^+ \, d\mu - \int_C f^- \, d\mu \right) = \alpha \cdot \int_C f \, d\mu. \end{aligned}$$

Если  $\alpha < 0$ , то

$$(\alpha \cdot f)^+ = \max(0, \alpha \cdot f) = \max(0, -|\alpha| \cdot f) = |\alpha| \cdot \max(0, -f) = |\alpha| \cdot f^-,$$

$$(\alpha \cdot f)^- = \max(0, -\alpha \cdot f) = \max(0, |\alpha| \cdot f) = |\alpha| \cdot \max(0, f) = |\alpha| \cdot f^+.$$

Поэтому снова применяя определение интеграла и свойство (е) §2 имеем

$$\begin{aligned} \int_C \alpha \cdot f \, d\mu &= \int_C (\alpha \cdot f)^+ \, d\mu - \int_C (\alpha \cdot f)^- \, d\mu = \int_C |\alpha| \cdot f^- \, d\mu - \int_C |\alpha| \cdot f^+ \, d\mu = \\ &= |\alpha| \cdot \int_C f^- \, d\mu - |\alpha| \cdot \int_C f^+ \, d\mu = \\ &|\alpha| \cdot \left( \int_C f^- \, d\mu - \int_C f^+ \, d\mu \right) = -|\alpha| \cdot \int_C f \, d\mu = \alpha \cdot \int_C f \, d\mu. \end{aligned}$$

При  $\alpha = 0$  равенство (3) очевидно.

Докажем теперь, что интеграл  $\int_C (f + g) d\mu$  существует и спра-

ведливо равенство (4).

По условию  $f$  и  $g \in L(\mu, C)$ . Значит,  $\int_C |f| d\mu < +\infty$  и

$\int_C |g| d\mu < +\infty$  по теореме 2. Применяя еще свойство 2(d) и теорему

2 §3, получим

$$\int_C |f + g| d\mu \leq \int_C (|f| + |g|) d\mu = \int_C |f| d\mu + \int_C |g| d\mu < +\infty.$$

Из этого неравенства по теореме 2 следует, что  $f + g \in L(\mu, C)$ .

Разобьем множество  $C$  на подмножества

$$B_1 = \{t \in C; f(t) \geq 0, g(t) \geq 0\}, \quad B_2 = \{t \in C; f(t) < 0, g(t) < 0\},$$

$$B_3 = \{t \in C; f(t) \geq 0, g(t) < 0, (f + g)(t) \geq 0\},$$

$$B_4 = \{t \in C; f(t) \geq 0, g(t) < 0, (f + g)(t) < 0\},$$

$$B_5 = \{t \in C; f(t) < 0, g(t) \geq 0, (f + g)(t) \geq 0\},$$

$$B_6 = \{t \in C; f(t) < 0, g(t) \geq 0, (f + g)(t) < 0\}.$$

По теореме 7

$$\int_C (f + g) d\mu = \sum_{k=1}^6 \int_{B_k} (f + g) d\mu, \quad (5)$$

так как  $C = \bigsqcup_{k=1}^6 B_k$ . Докажем, что

$$\int_{B_k} (f + g) d\mu = \int_{B_k} f d\mu + \int_{B_k} g d\mu \quad (6)$$

для каждого  $k = 1, 2, \dots, 6$ .

При  $k = 1$  это сразу следует из теоремы 2 §3, так как на множестве  $B_1$  функции  $f$  и  $g$  неотрицательны. Применяя кроме теоремы 2 §3 еще равенство (3) при  $\alpha = -1$ , получим нужное равенство и при  $k = 2$ :

$$\int_{B_2} (f + g) d\mu = - \int_{B_2} [(-f) + (-g)] d\mu = - \int_{B_2} (-f) d\mu - \int_{B_2} (-g) d\mu = \int_{B_2} f d\mu + \int_{B_2} g d\mu.$$

Докажем равенство (6) для  $k = 3$ . На множестве  $B_3$  справедливы соотношения

$$f \geq 0, \quad g < 0, \quad f + g \geq 0, \quad -g > 0, \quad (f + g) + (-g) = f \geq 0.$$

Применяя теорему 2 §3 к функциям  $f + g$  и  $-g$ , получим

$$\int_{B_3} f d\mu = \int_{B_3} (f + g) d\mu + \int_{B_3} (-g) d\mu = \int_{B_3} (f + g) d\mu - \int_{B_3} g d\mu. \quad (7)$$

Из условия  $g \in L(\mu, C)$  согласно теореме 5 следует, что  $g \in L(\mu, B_3)$  и поэтому интеграл  $\int_{B_3} g d\mu$  конечен. Значит, из равенства (7) вытекает

равенство

$$\int_{B_3} (f + g) d\mu = \int_{B_3} f d\mu + \int_{B_3} g d\mu.$$

На множестве  $B_4$  имеем

$$f \geq 0, \quad g < 0, \quad f + g < 0, \quad -(f + g) > 0, \quad [-(f + g)] + f = (-g) > 0.$$

Применяя теорему 2 §3 к функциям  $-(f + g)$  и  $f$ , получим

$$\int_{B_4} [-(f + g)] d\mu + \int_{B_4} f d\mu = \int_{B_4} (-g) d\mu,$$

откуда следует, что  $\int_{B_4} (f + g) d\mu = \int_{B_4} f d\mu + \int_{B_4} g d\mu$ .

Для  $k = 5$  и  $k = 6$  доказательства равенства (6) аналогичны предыдущим двум случаям.

Равенства (6) доказаны. Из этих равенств, из равенства (5) и из аналогичных равенств  $\int_C f d\mu = \sum_{k=1}^6 \int_{B_k} f d\mu$ ,  $\int_C g d\mu = \sum_{k=1}^6 \int_{B_k} g d\mu$

следует требуемое равенство (4).  $\square$

Теорему 8 можно усилить следующим образом.

9. Теорема. Пусть функции  $f, g : C \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы, интегралы

$\int_C f d\mu$  и  $\int_C g d\mu$  существуют и принадлежат множеству  $(-\infty, +\infty]$  или

оба принадлежат множеству  $[-\infty, +\infty)$ . Тогда интеграл  $\int_C (f + g) d\mu$

существует, принадлежит тому же множеству и справедливо равенство (4).

Доказательство. Допустим, что  $\int_C f d\mu = +\infty$  и

$\int_C g d\mu \in (-\infty, +\infty]$ . Тогда  $\int_C f^+ d\mu = +\infty$ ,  $\int_C f^- d\mu < +\infty$ ,  $\int_C g^- d\mu < +\infty$ .



Из легко проверяемого неравенства  $(f + g)^- \leq f^- + g^-$  следует, что интеграл  $\int_C (f + g)^- d\mu$  конечен. Поэтому интеграл  $\int_C (f + g) d\mu$  существует. Осталось доказать, что он равен  $+\infty$ . Поскольку  $f^+ \leq (f + g)^+ + g^-$ , то предполагая иное, получим противоречие:

$$+\infty = \int_C f^+ d\mu \leq \int_C (f + g)^+ d\mu + \int_C g^- d\mu < +\infty. \square$$

**10. Теорема.** (Лебега о мажорируемой сходимости). Пусть  $C \in \Sigma$ ,  $f_n \in L(\mu, C)$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f : C \rightarrow [-\infty, +\infty]$  и для всех  $t \in C$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \in [-\infty, +\infty]$ , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t). \quad (8)$$

Пусть еще  $g \in L(\mu, C)$  и

$$|f_n(t)| \leq g(t) \text{ для всех } t \in C \text{ и для всех } n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Тогда  $f \in L(\mu, C)$  и справедливо равенство

$$\int_C f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n d\mu. \quad (10)$$

Доказательство. Обозначим

$$h'_n(t) = \inf_{k \geq n} f_k(t), \quad h''_n(t) = \sup_{k \geq n} f_k(t) \text{ для всех } t \in C.$$

Ясно, что последовательность  $(h'_n)$  возрастает, последовательность  $(h''_n)$  убывает на  $C$  и

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h''_n(t), \quad (11)$$

$$-g(t) \leq h'_n(t) \leq f_n(t) \leq h''_n(t) = g(t) \quad (12)$$

для всех  $t \in C$  и  $n \in \mathbb{N}$ .

По теореме 4 о монотонности интеграла из неравенств (12) и из условия  $g \in L(\mu, C)$  следует, что все  $h'_n, h''_n \in L(\mu, C)$ . Кроме того, из (8) и (9) следует, что  $|f(t)| \leq g(t)$  на  $C$ . По теореме 6 отсюда следует, что и  $f \in L(\mu, C)$ .

По теореме 8 о линейности интеграла

$$h'_n + g, \quad g - h''_n \in L(\mu, C) \text{ для каждого } n \in \mathbb{N}.$$

Из неравенств (5) следует, что функции  $h'_n + g$  и  $g - h''_n$  неотрицательны. Ясно также, что последовательности  $(h'_n + g)$  и  $(g - h''_n)$  возрастают. Для каждого  $t \in C$  из (11) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [h'_n(t) + g(t)] = f(t) + g(t),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [g(t) - h''_n(t)] = g(t) - f(t).$$

Таким образом, к последовательностям  $(h'_n + g)$  и  $(g - h''_n)$  применима теорема Б. Леви (теорема 1 §3). Применяя эту теорему, получим

$$\int_C (f + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C (h'_n + g) d\mu,$$

$$\int_C (g - f) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C (g - h''_n) d\mu.$$

Отсюда по теореме 8 о линейности интеграла

$$\int_C f d\mu + \int_C g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C h'_n d\mu + \int_C g d\mu,$$

$$\int_C g d\mu - \int_C f d\mu = \int_C g d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C h''_n d\mu.$$

Из этих равенств и из конечности интеграла  $\int_C g d\mu$  вытекают равенства

$$\int_C f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C h'_n d\mu, \quad \int_C f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C h''_n d\mu.$$

Кроме того, из неравенств (12) ясно, что

$$\int_C h'_n d\mu \leq \int_C f_n d\mu \leq \int_C h''_n d\mu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда ясно, что справедливо искомое равенство (10).  $\square$

11. Теорема. Пусть  $C \in \Sigma$ ,  $f \in L(\mu, C)$ . Тогда для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что для любого  $A \in \Sigma$ ,  $A \subset C$ ,  $\mu A < \delta$ , выполнено:

$$\left| \int_A f d\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : A \in \Sigma, A \subset C, \mu A < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

Тогда утверждение теоремы будет выполнено, т.к.  $\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu$

по теореме 3. Предположим обратное:

$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists A \in \Sigma, A \subset C, \mu A < \delta, \int_A |f| d\mu \geq \varepsilon$ . Зафиксируем такое

число  $\varepsilon > 0$ . Для каждого натурального  $k$  положим  $\delta_k = 2^{-k}$  и найдем

$A_k \in \Sigma, A_k \subset C$ , такие, что  $\mu A_k < \delta_k, \int_{A_k} |f| d\mu \geq \varepsilon$ . Пусть  $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ .

Имеем:  $B_1 \supset B_2 \supset \dots, B_n \in \Sigma \forall n \in \mathbb{N}, \mu B_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k = \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+1}$ .

По теореме 6 §2 гл.1 о непрерывности меры  $\mu B = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu B_n = 0$ . По

теореме 5 §3  $\int_B |f| d\mu = 0$ . Теперь рассмотрим меру  $\mu_{|f|}$  на сигма-

алгебре  $\Sigma$ , которую можно определить вследствие теоремы 6 §3 равенством  $\mu_{|f|} A = \int_A |f| d\mu \forall A \in \Sigma$ . По теореме о непрерывности меры

$\mu_{|f|} B = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{|f|} B_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} |f| d\mu$ . Однако по построению

$A_n \subset B_n$ , поэтому по свойству (с) §2 получаем:

$\int_{B_n} |f| d\mu \geq \int_{A_n} |f| d\mu \geq \varepsilon$ , где число  $\varepsilon > 0$  зафиксировано. Получен-

ное противоречие доказывает теорему.  $\square$

**Замечание.** Свойство, доказанное в теореме 11, называется *абсолютной непрерывностью интеграла*.

## §5. Понятие «почти всюду»

1. **Определение.** Пусть  $(S, \Sigma, \mu)$  – пространство с мерой,  $C \in \Sigma$ . Утверждение  $P(t), t \in C$ , верно почти всюду на  $C$  (или почти для всех  $t \in C$ ), если существует множество  $N \in \Sigma, \mu N = 0$ , такое, что  $\{t \in C : P(t) \text{ не верно}\} \subset N$ .

2. **Определение.** Пусть  $C \in \Sigma, f, g : C \rightarrow [-\infty; +\infty]$ . Функции  $f$  и  $g$  называются эквивалентными, если  $f(t) = g(t)$  почти для всех  $t \in C$ . Обозначение:  $f \sim g$ .

3. **Лемма.** Пусть  $C \in \Sigma, f, g : C \rightarrow [-\infty; +\infty], f \sim g$ . Тогда функция  $f$  измерима в том и только в том случае, когда  $g$  измерима.

**Доказательство.** Пусть  $N_0 = \{t \in C : f(t) \neq g(t)\}$ . Так как  $f \sim g$ , то  $N_0 \subset N, \mu N = 0$ . Допустим,  $f$  измерима. Докажем измеримость функции  $g$  (см. гл. 1, §3). Возьмем  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим  $g^{-1}(\alpha; +\infty] = \{t \in C : g(t) > \alpha\}$ . Сравним это множество с множеством  $f^{-1}(\alpha; +\infty]$ . Пусть

$$N_1 = \{t \in C : g(t) > \alpha, f(t) \leq \alpha\}, \quad N_2 = \{t \in C : g(t) \leq \alpha, f(t) > \alpha\}.$$

Тогда  $g^{-1}(\alpha; +\infty] = (f^{-1}(\alpha; +\infty] \sqcup N_1) \setminus N_2$  (докажите равенство этих множеств самостоятельно!).

Так как  $\mu$  – полная мера,  $N_1, N_2 \subset N, \mu N = 0$ , то  $N_1, N_2 \in \Sigma$ ,  $\mu N_1 = \mu N_2 = 0$ . Так как  $f$  измерима, то  $f^{-1}(\alpha; +\infty] \in \Sigma$ . Поэтому  $g^{-1}(\alpha; +\infty] \in \Sigma$ , функция  $g$  измерима.

Обратное утверждение доказывается заменой  $g$  на  $f$ .  $\square$

**4. Лемма.** Пусть  $C \in \Sigma$ ,  $f, g : C \rightarrow [-\infty; +\infty]$  – измеримые функции,  $f \sim g$ . Если один из интегралов  $\int_C g d\mu, \int_C f d\mu$  определен, то определен и второй, причем для любого  $A \subset C, A \in \Sigma$ ,

$$\int_A g d\mu = \int_A f d\mu.$$



Доказательство. Пусть, например,  $\int_C f d\mu$  определен,

$\int_C f^+ d\mu < +\infty$ . Обозначим

$$C_1 = \{t \in C : g(t) > 0, f(t) \leq 0\}, C_2 = \{t \in C : g(t) \leq 0, f(t) > 0\}.$$

Тогда по определению  $g^+ = \max(0, g)$ ,  $f^+ = \max(0, f)$  имеем:

$$\{t : g^+(t) > 0\} = \{t : g(t) > 0\} = (\{t : f(t) > 0\} \sqcup C_1) \setminus C_2 = (\{t : f^+(t) > 0\} \sqcup C_1) \setminus C_2,$$

$C_1, C_2 \subset N_0 = \{t \in C : f(t) \neq g(t)\} \subset N$ ,  $\mu N = 0$ , следовательно, в силу полноты меры  $\mu$ ,  $\mu C_1 = \mu C_2 = 0$ . Получаем:

$$\int_C g^+ d\mu = \int_{C \cup C_1} f^+ d\mu - \int_{C_2} f^+ d\mu = \int_C f^+ d\mu < +\infty, \quad (1)$$

следовательно,  $\int_C g d\mu$  тоже определен.

Рассмотрим  $\int_A g d\mu = \int_A g^+ d\mu - \int_A g^- d\mu$ . Аналогично (1) имеем:

$$\int_A g^+ d\mu = \int_A f^+ d\mu, \quad \int_A g^- d\mu = \int_A f^- d\mu,$$

то есть  $\int_A g d\mu = \int_A f d\mu$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**5. Замечание.** Лемма 4 означает, что интеграл Лебега «не различает» эквивалентные функции.

Если же функции  $f$  и  $g$  не эквивалентны, то интегралы по множеству  $A_1 = \{t \in C : g(t) > f(t)\}$  или  $A_2 = \{t \in C : g(t) < f(t)\}$  от функций  $f$  и  $g$  обязательно будут отличаться. Действительно, мера одного из этих множеств положительна (иначе  $f \sim g$ ). Допустим,  $\mu A_1 > 0$ . Тогда по теореме 5 § 3 (о нулевом интеграле)  $\int_{A_1} (g - f) d\mu \neq 0$ , так как

$g - f : A_1 \rightarrow [0, +\infty]$ . Значит,  $\int_{A_1} g d\mu \neq \int_{A_1} f d\mu$ .

6. Замечание. Для любой функции  $f \in L(\mu, C)$  существует эквивалентная ей функция  $g \in L(\mu, C)$ , не принимающая бесконечных значений.

Действительно, если  $\int_C f^+ d\mu < +\infty$ ,  $\int_C f^- d\mu < +\infty$ , то по свойству

$$(f) \quad \mu \{t \in C ; f^+(t) = +\infty\} = 0, \quad \mu \{t \in C ; f^-(t) = +\infty\} = 0.$$

Заменяем значения функции  $f$  на этих множествах, например, нулевыми значениями. Получим эквивалентную  $f$  функцию  $g: C \rightarrow (-\infty; +\infty)$ . При этом  $g \in L(\mu, C)$  по лемме 4.