введение в теорию алгоритмов

Курс «Алгоритмизация и программирование»,
лекция 1

Понятие алгоритма

Алгоритм-
последовательность элементарных действий, формальное выполнение которой приводит к верному решению задачи за конечное время.

Исполнитель –
Одушевлённый или неодушевлённый объект, выполняющий последовательность элементарных действия.

Элементарное действие –
действие, которое исполнитель может выполнять без дополнительного обучения.

Запись алгоритма, кодирование алгоритма

Запись алгоритма –
фиксация алгоритма в бумажной или электронной форме с использованием неформального набора правил

Кодирование алгоритма –
фиксация алгоритма в бумажной или электронной форме с использованием формального набора правил

Набор правил является формальным, если неописанные правилами действия выполнять запрещено.

Набор правил является неформальным, если неописанные правилами действия можно выполнять произвольным образом.

Программирование

АЛГОРИТМ =ПРОГРАММА

Программирование **– разработка алгоритма**

Способы записи алгоритма

Способы записи алгоритма:

1) Блок-схема
2) Пошаговая процедура.
3) Псевдокод.

Состояния алгоритма:

1) Прямой ход.
2) Разветвление.
3) Передача управления вперёд / назад.

Прямой ход:
последовательное выполнение элементарных действий.

Разветвление:
выбор одного их множества элементарных действий для выполнения.

Передача управления:
переход к указанной элементарной операции, не следующей по порядку за текущей.
вперёд – если указанная операция расположена после текущей;
назад – если указанная операция расположена перед текущей.

Способы записи алгоритма

При вычислении **математических выражений** должно быть указано:

1) Формула для вычисления результата.
2) Место, в котором необходимо сохранить результат.

Переменная – символьное обозначение места хранения числовых, текстовых или логических значений, а так же составных объектов.
Значение переменной – число, текст, логическое значение или составной объект.

Прибавить к переменой X единицу – **неверная запись! Не указано место хранения результата!**

Увеличить значение переменной X на единицу – **верная запись, эквивалентная X = X + 1.**

Блок-схема

Не наглядно

Элементарное действие 1

↓

Элементарное действие 2

↓

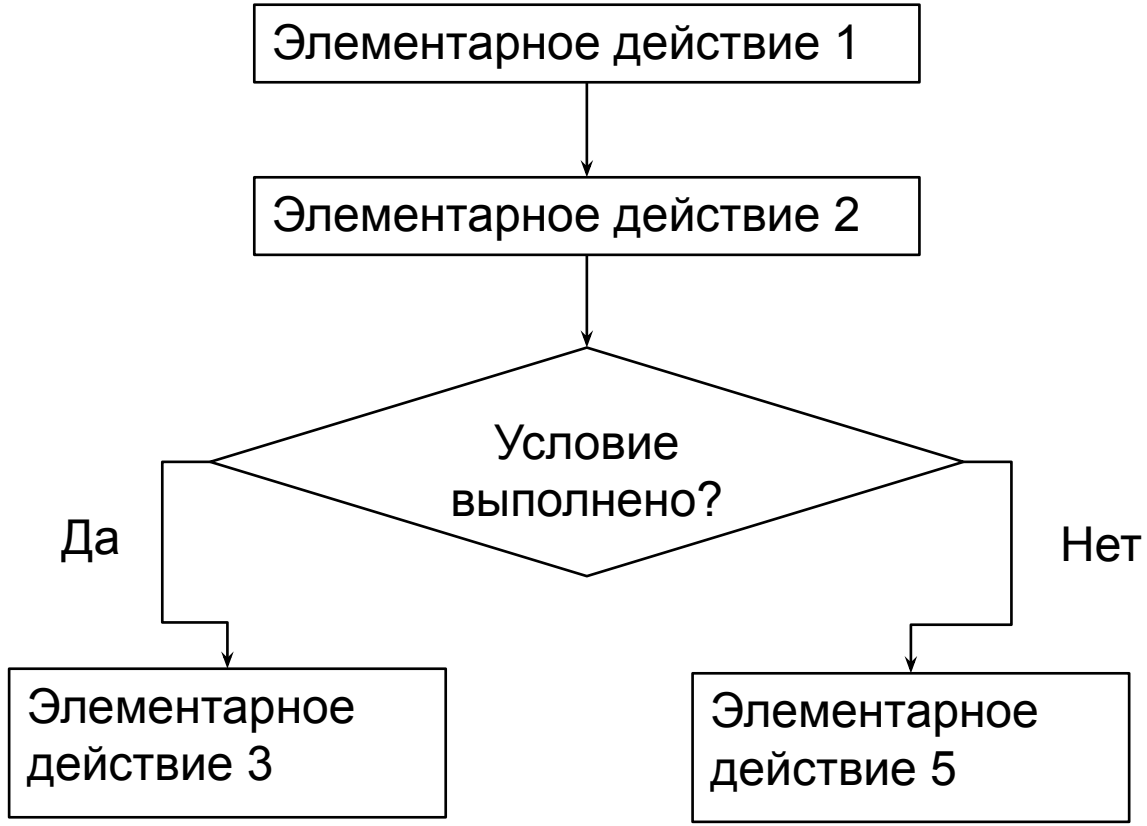
Если условие выполнено, то.

Если условие не выполнено, то

Элементарное действие 3

Элементарное действие 5

Наглядно



Пошаговая процедура

ШАГ1: формальное действие 1
ШАГ2: формальное действие 2
ШАГ3: если условие выполнено, то перейти к шагу 4, иначе перейти к шагу 6
ШАГ4: формальное действие 3
ШАГ5: перейти к шагу 7
ШАГ6: формальное действие 5
ШАГ7: ….

Псевдо-код

1: Формальное действие 1
2: формальное действие 2
3: ЕСЛИ <условие> выполнено, ТО:
4: формальное действие 3
5: ИНАЧЕ:
6: Формальное действие 5

Псевдо-код, используемый в текущем курсе

Разветвление:
ЕСЛИ <выполнено условие>
ТО: элементарные операции
ИНАЧЕ: элементарные операции (**опции ИНАЧЕ может не быть**)
Цикл ПОКА:
ПОКА <выполнено условие>
ДЕЛАЙ: элементарные операции
КОНЕЦ
Цикл ДЛЯ
ДЛЯ <переменная цикла>; ДИАПАЗОН от:<значение>, до:<значение>, шаг: <значение>
Элементарные операции
КОНЕЦ

Элементарные действия для исполнителя «Компьютер»

Арифметические действия:

- сложение (+)
- вычитание (-)
- умножение (*)
- деление (/)

Действия ввода и вывода:

- ввод (input)
- вывод (output)

Ввод десятичных чисел является элементарной операцией УСЛОВО!

Логические действия:

- логическое И (&)
- логическое ИЛИ (|)
- отрицание НЕ (not)

Действия сравнения:

- больше (>)
- меньше (<)
- равно (=)

Действие сохранения значения:

- присвоить значение переменной (=)
- ввод (input)

Пример алгоритма

Разработать алгоритм - значит представить решение исходной задачи в виде последовательности элементарных действий.

Задача: вычислить значение переменной X равное сумме значений переменных A и B и вывести результат на экран монитора.

Алгоритм:
1: присвоить значение переменной A
2: присвоить значение переменной B
3: выполнить сложение A + B
4: сохранить результат сложения в перемой X
5: вывести значение переменной X

Запись алгоритма с помощью псевдо-кода:

```
input A
input B
X = A + B
output X
```

Состояние алгоритма

Состояние алгоритма
определяется значениями переменных, используемых в алгоритме

Цикл
многократное повторение последовательности элементарных действий.

Инварианта цикла
набор переменных, задающих начальные условия для очередной итерации цикла.

Инварианта цикла проходит три состояния:

1) ***инициализация***
2) ***повторение***
3) ***окончание***

Агрегатные данные типа МАССИВ.

Массив – упорядоченный набор *однотипных значений*, к каждому из которых можно обратиться, указав его индекс (порядковый номер).

Массив A

- Элемент 1
  - Значение элемента 1
  - Индекс элемента 1
- Элемент 2
  - Значение элемента 2
  - Индекс элемента 2
- …
- Элемент N
  - Значение элемента n
  - Индекс элемента n

Обращение к значению элемента массива с индексом m: A[m]

Агрегатные данные типа МАССИВ.

Свойства массива:

Значения элементов массива существуют физически.

Индексы – виртуальные величины.

Каждый элемент массива можно рассматривать как самостоятельную переменную с именем A[m].
Имя переменной может формироваться в ходе выполнения алгоритма.

Значение m	1	2	3
Имя переменной	A[1]	A[2]	A[3]

К массиву нельзя обратиться по его имени!

A = 1 – **НЕВЕРНО!**
A[3] = 1 – ВЕРНО! (в переменной A[3] будет хранится значение 1)

Алгоритм подсчёта количества элементов массива с заданными значениями

Задача

Задан массив с именем A, состоящий из N элементов.

Определить, сколько элементов удовлетворяют условию COND.

Запись COND(X) означает проверку условия для значения переменной X.

Пример

COND ⟺ ПЕРЕМЕННАЯ > 5

COND(3) – ЛОЖЬ (3 > 5)

COND(9) – ИСТИНА (9 > 5)

Y = 7

COND(Y) – ИСТИНА (7 > 5)

Z = 2

COND(Z) – ЛОЖЬ (2 > 5)

Алгоритм подсчёта количества элементов массива с заданными значениями

Идея реализации алгоритма, решающего задачу:
В переменной **count** будет хранится значение, равное количеству элементов массива, удовлетворяющих заданному условию.
В переменой **idx** будет хранится индекс элемента массива
Проверяем: удовлетворяет значение элемента массива с индексом **idx** условию COND?
Если удовлетворяет, то увеличиваем значение переменной **count** на 1.
Повторяем проверку для всех элементов массива (в алгоритме будет цикл!).

Псевдо-код алгоритма

```
count = 0
idx = 0
ПОКА idx < N
ДЕЛАЙ:
    ЕСЛИ COND( A[idx] )
    ТО:
        count = count +1
    idx = idx + 1
КОНЕЦ
```

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА:
count, idx

Алгоритм подсчёта элементов массива с заданными значениями

Инициализация инварианты:
count = 0 (нет элементов удовлетворяющих COND)
idx =0 (будет обрабатываться элемент массива с номером 0)

Повторение инварианты
после первого цикла:
значение count содержит количество элементов (0 или 1), удовлетворяющих COND.
idx = 1 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 1).

после второго цикла:
значение count содержит количество элементов (от 0 до 2), удовлетворяющих COND.
idx = 2 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 2).

...
Окончание цикла
idx = N
count содержит значение, равное количеству элементов, удовлетворяющих COND

Агрегатные данные типа ДВУМЕРНЫЙ МАССИВ

	Индекс 1-го элемента в строке	Индекс 2-го элемента в строке	…	Индекс N-го элемента в строке
Индекс 1-й строки	Значение Элемента 1,1	Значение Элемента 1,2	…	Значение Элемента 1,N
Индекс 2-й строки …	Значение Элемента 2,1 …	Значение Элемента 2,2 …	… …	Значение Элемента 2,N …
Индекс M-той строки	Значение Элемента M,1	Значение Элемента M,2	…	Значение Элемента M,N

Обращение к значению элемента массива с индексами I, j: A[I, j]

Агрегатные данные типа ДВУМЕРНЫЙ МАССИВ

Свойства массива:

Значения элементов массива существуют физически.

Индексы – виртуальные величины.

Каждый элемент массива можно рассматривать как самостоятельную переменную с именем A[I, j].
Имя переменной может формироваться в ходе выполнения алгоритма.

Значение i	1	2	3
Значение j	2	3	5
Имя переменной	A[1, 2]	A[2, 3]	A[3, 5]

К массиву нельзя обратиться по его имени!
A = 1 – **НЕВЕРНО!**
A[3, 5] = 1 – ВЕРНО! (в переменной A[3, 5] будет хранится значение 1)

Алгоритм подсчёта количества элементов двумерного массива с заданными значениями

Задача
Задан двумерный массив с именем B, состоящий из N строк и M столбцов (N * M элементов).
Определить, сколько элементов удовлетворяют условию COND.

Идея реализации алгоритма, решающего задачу:
В переменной **count** будет хранится значение, равное количеству элементов массива, удовлетворяющих заданному условию.
В переменой **idx_1** будет хранится номер строки.
В переменой **idx_2** будет хранится номер столбца.
Проверяем: удовлетворяет значение элемента массива с индексами **idx_1, idx_2** условию COND?
Если удовлетворяет, то увеличиваем значение переменной **count** на 1.
Повторяем проверку для всех элементов массива (в алгоритме будут два цикла!).

Алгоритм подсчёта количества элементов двумерного массива с заданными значениями

Псевдо-код алгоритма

```
count = 0
idx_1 = 0
idx_2 = 0
ПОКА idx_1 < N
ДЕЛАЙ:
    ПОКА idx_2 < M
        ЕСЛИ COND( A[idx_1, idx_2] )
        ТО:
            count = count +1
        idx_2 = idx_2 + 1
    КОНЕЦ
    idx_2 = idx_2 + 1
КОНЕЦ
```

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА:
count, idx_1, idx_2

Алгоритм подсчёта количества элементов двумерного массива с заданными значениями

Инициализация инварианты:
count = 0 (нет элементов удовлетворяющих COND)
idx_1 = 0, idx_2 = 0 (будет обрабатываться элемент массива с индексами 0,0)

Повторение инварианты
после первого внутреннего цикла:
значение count содержит количество элементов (0 или 1), удовлетворяющих COND.
idx_1 = 0, idx_2 = 1 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с индексами 0, 1).

после первого внешнего цикла:
значение count содержит количество элементов (от 0 до M), удовлетворяющих COND.
idx_1 = 1, idx_2 = 0 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с индексами 1, 0).

Окончание цикла
idx_1 = N, idx_2 = M
count содержит значение, равное количеству элементов, удовлетворяющих COND

Сложность алгоритма

Сложность алгоритма

величина, показывающая, как связано количество элементарных операций, необходимых для решения задачи, с объёмом входных данных.

Обозначается **O**(математическое выражение)

Примеры:

1) O(n) при увеличении объёма входных данных в 2 раза, количество элементарных операций увеличится в 2 раза.
2) $O(n^2)$ при увеличении объёма входных данных в 2 раза, количество элементарных операций увеличится в 4 раза.
3) O(log(n)) при увеличении объёма входных данных в 256 раз, количество элементарных операций увеличится в 8 раза.

Сложность алгоритма

Псевдо-код алгоритма подсчёта количества элементов, удовлетворяющих условию COND в одномерном массиве

```
count = 0
idx = 0
ПОКА idx < N
ДЕЛАЙ:
    ЕСЛИ COND( A[idx] )
    ТО:
        count = count +1
    idx = idx + 1
КОНЕЦ
```

Будет N проходов цикла
Каждая
из
элементарных операций
повторится N раз

Сложность алгоритма O(N)

Сложность алгоритма

Псевдо-код алгоритма подсчёта количества элементов, удовлетворяющих условию COND в двумерном массиве

```
count = 0
idx_1 = 0
idx_2 = 0
ПОКА idx_1 < N
ДЕЛАЙ:
    ПОКА idx_2 < M
        ДЕЛАЙ:
            ЕСЛИ COND( A[idx_1, idx_2] )
            ТО:
                count = count +1
            idx_2 = idx_2 + 1
    КОНЕЦ
    idx_2 = idx_2 + 1
КОНЕЦ
```

Будет N проходов цикла

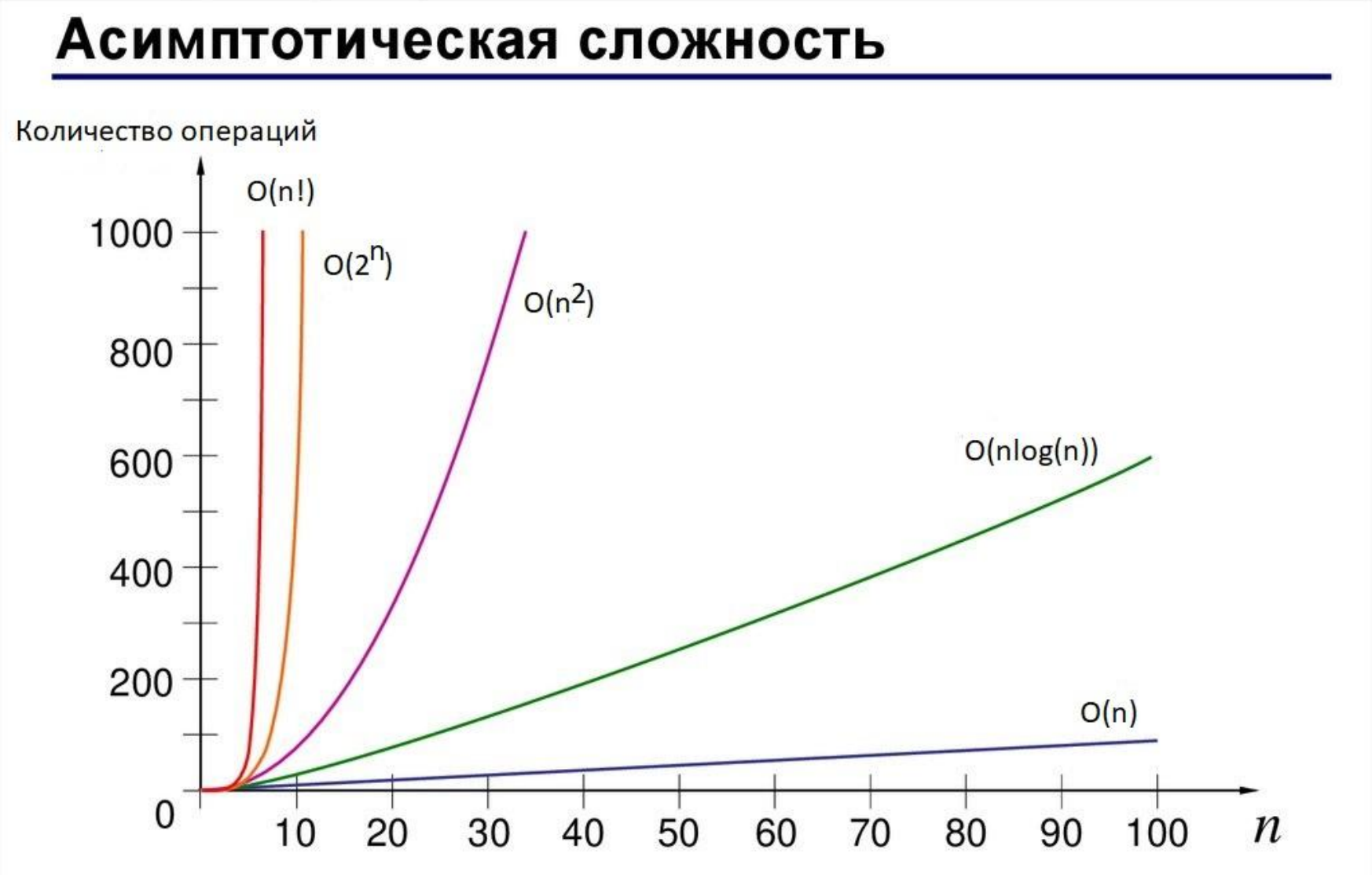
Будет M проходов цикла

Каждая из элементарных операций повторится N * M раз

Сложность алгоритма O(N*M)

Для квадратного массива $O(N^2)$

Сложность алгоритма



Сумма значений одномерного массива

Задача
Задан одномерный массив с именем A, состоящий из N элементов.
Вычислить сумму значений элементов массива.

Идея реализации алгоритма, решающего задачу:
В переменной **Total** будет хранится текущая сумма значений элементов массива.
В переменой **idx** будет хранится индекс текущего элемента массива.
Прибавляем значение текущего элемента массива к значению **Total**, сохраняем результат в **Total**.
Повторяем суммирование для всех элементов массива (в алгоритме будет цикл!).

Псевдо-код алгоритма подсчёта суммы

```
Total = 0
idx = 0
ПОКА idx < N
ДЕЛАЙ:
    Total = Total + A[idx]
    idx = idx + 1
КОНЕЦ
```

Инварианта цикла:
Total, idx

Будет N проходов цикла.
Каждая из
элементарных операций повторится N раз
Сложность алгоритма O(N)

Сумма значений одномерного массива

Инициализация инварианты:
Total = 0 (До начала суммирования значение суммы равно 0)
idx =0 (будет обрабатываться элемент массива с номером 0)

Повторение инварианты
после первого цикла:
значение **Total** равно значению нулевого элемента массива.
idx = 1 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 1).

после второго цикла:
значение **Total** равно сумме значений нулевого и первого элементов массива.
idx = 2 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 2).

...
Окончание цикла
idx = N
Total содержит сумму значений элементов массива

Поиск максимального значения в одномерном массиве

Задача

Задан массив с именем A, состоящий из N элементов.

Определить, максимальное среди всех значений элементов массива.

Идея реализации алгоритма, решающего задачу:

Индекс	0	1	…	i	I + 1	…
Значение	A[1]	A[2]	…	A[i]	A[I + 1]	…

Local – максимальное значение среди элементов с 0 по i

Если A[I + 1] > Local, то

Индекс…	0	1	…	i	I + 1	…
Значение	A[1]	A[2]	…	A[i]	A[I + 1]	…

Local – максимальное значение среди элементов с 0 по i + 1

Поиск максимального значения в одномерном массиве

Идея реализации алгоритма, решающего задачу, продолжение

Переменная **idx** хранит номер текущего обрабатываемого элемента массива.

Значение переменной **Local** равно максимальному среди значений элементов массива с номерами 0 … **idx** -1

Если **A[idx] > Local**, то значение A[idx] максимальное среди значений элементов с номерами 0 … **idx** : **Local = A[idx]**

Если **A[idx] <= Local,** то значение Local максимальное среди значений элементов с номерами 0 **… idx** **Значение Local не изменяется.**

Псевдо-код алгоритма

```
Local = A[0]
idx = 1
ПОКА idx < N
ДЕЛАЙ:
    ЕСЛИ A[idx] > Local
    ТО:
        Local = A[idx]
    idx = idx + 1
КОНЕЦ
```

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА:
Local, idx

Будет N проходов цикла.
Каждая из
элементарных операций
повторится N раз

Сложность алгоритма O(N)

Поиск максимального значения в одномерном массиве

Инициализация инварианты:
Local = A[0] (До первого повторения цикла, значение нулевого элемент массива считается максимальным, т.к. значения других элементов пока не анализировались)
idx =1 (будет обрабатываться элемент массива с номером 1. Элемент массива с номером 0 уже учтён, при задании начального значения переменной Local)

Повторение инварианты
после первого цикла:
значение **Local** равно максимальному значению среди нулевого и первого элементов массива.
idx = 2 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 2).
после второго цикла:
значение **Local** равно максимальному значению среди нулевого, первого и второго элементов массива.
idx = 3 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 3).

...
Окончание цикла
idx = N
Local содержит максимальное значение среди всех элементов массива.

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию

Задача

Задан массив с именем A, состоящий из N элементов.

Определить, максимальное среди значений элементов массива, таких что COND(A[i]) истинно, i = 0 … N - 1.

Индекс	0	1	…	i	I + 1	…
Значение	A[1]	A[2]	…	A[i]	A[I + 1]	…

Local – максимальное значение среди элементов с 0 по i, для которых COND(A[j]) истинно

j = 0, 1, …, i

Если A[I + 1] > Local, то

Индекс…	0	1	…	i	I + 1	…
Значение	A[1]	A[2]	…	A[i]	A[I + 1]	…

Local – максимальное значение среди элементов с 0 по i + 1, для которых COND(A[j]) истинно

j = 0, 1, …, I + 1

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию

Псевдо-код алгоритма (вариант 1)

```
Local = минимально возможному значению типа
idx = 1
ПОКА idx < N
ДЕЛАЙ:
    ЕСЛИ COND(A[idx]) & A[idx] > Local
    ТО:
        Local = A[idx]
    idx = idx + 1
КОНЕЦ
```

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА:
Local, idx

Будет N проходов цикла.
Каждая из элементарных операций повторится N раз

Сложность алгоритма O(N)

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию

Псевдо-код алгоритма (вариант 2)

```
idx = 0
ПОКА not(COND(A[idx])
ДЕЛАЙ:
        idx = idx + 1
КОНЕЦ
Local = A[idx]
idx = idx + 1
ПОКА idx < N
ДЕЛАЙ:
        ЕСЛИ COND(A[idx]) & A[idx] > Local
        ТО:
                Local = A[idx]
        idx = idx + 1
КОНЕЦ
```

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА 1:
idx

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА 2:
Local, idx

В двух циклах суммарно будет N проходов.
Каждая из
элементарных операций
повторится N раз
Сложность алгоритма O(N)

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию (вариант 1)

Инициализация инварианты:

Local = минимально возможному значению типа для элементов массива.

idx = 0 (будет обрабатываться элемент массива с номером 0. Ни один из элементов массива не учтён).

Повторение инварианты

после первых циклов, в которых COND(A[idx]) ложно:

значение **Local** не изменится.

idx = idx + 1 (указывает на переход к следующему элементу массива).

после первого цикла, в котором COND(A[idx]) истинно:

значение **Local** равно A[idx].

idx = idx + 1 (указывает на переход к следующему элементу массива).

после всех последующих циклов

значение **Local** равно максимальному среди элементов массива для которых COND(A[idx]) истинно.

idx = idx + 1 (указывает на переход к следующему элементу массива).

Окончание цикла

idx = N

Local содержит максимальное значение среди всех элементов массива, для которых COND(A[idx]) истинно.

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию (вариант 2)

Инициализация инварианты цикла 1:
idx = 0 (будет обрабатываться элемент массива с номером 0).
Повторение инварианты
после всех повторений цикла 1, для которых COND(A[idx]) ложно
idx = idx + 1 (переход к следующему элементу массива).
Окончание цикла 1
COND(A[idx]) истинно

Инициализация инварианты цикла 2:
Local = A[idx] (начальное значение Local равно значению первого элемента, удовлетворяющего COND)
idx = idx + 1 (будет обрабатываться элемент массива, следующий за первым, для которого COND(A[idx]) истинно.
Повторение инварианты цикла 2
после первого повторения:
Local не изменяется, если:
- COND(A[idx]) ложно;
- COND(A[idx]) истинно и Local <= A[idx]

Local = A[idx], если COND(A[idx]) истинно и Local > A[idx]
idx = idx + 1 (переход к следующему элементу массива).

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию (вариант 2

(**ПРОДОЛЖЕНИЕ**)

для всех последующих циклов

значение **Local** равно максимальному среди элементов массива для которых COND(A[idx]) истинно.

idx = idx + 1 (указывает на переход к следующему элементу массива).

Окончание цикла

idx = N

Local содержит максимальное значение среди всех элементов массива, для которых COND(A[idx]) истинно.