

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ АЛГОРИТМОВ

Курс «Алгоритмизация и программирование»,
лекция 1

Понятие алгоритма

Алгоритм-

последовательность элементарных действий, формальное выполнение которой приводит к верному решению задачи за конечное время.

Исполнитель –

Одушевлённый или неодушевлённый объект, выполняющий последовательность элементарных действия.

Элементарное действие –

действие, которое исполнитель может выполнять без дополнительного обучения.

Запись алгоритма, кодирование алгоритма

Запись алгоритма –

фиксация алгоритма в бумажной или электронной форме с использованием неформального набора правил

Кодирование алгоритма –

фиксация алгоритма в бумажной или электронной форме с использованием формального набора правил

Набор правил является **формальным**, если неописанные правилами действия выполнять запрещено.

Набор правил является **неформальным**, если неописанные правилами действия можно выполнять произвольным образом.

Программирование

АЛГОРИТМ = ПРОГРАММА

***Программирование* – разработка алгоритма**

Способы записи алгоритма

Способы записи алгоритма:

- 1) Блок-схема
- 2) Пошаговая процедура.
- 3) Псевдокод.

Состояния алгоритма:

- 1) Прямой ход.
- 2) Разветвление.
- 3) Передача управления вперёд / назад.

Прямой ход:

последовательное выполнение элементарных действий.

Разветвление:

выбор одного из множества элементарных действий для выполнения.

Передача управления:

переход к указанной элементарной операции, не следующей по порядку за текущей.

вперёд – если указанная операция расположена после текущей;

назад – если указанная операция расположена перед текущей.

Способы записи алгоритма

При вычислении **математических выражений** должно быть указано:

- 1) Формула для вычисления результата.
- 2) Место, в котором необходимо сохранить результат.

Переменная – символьное обозначение места хранения числовых, текстовых или логических значений, а так же составных объектов.

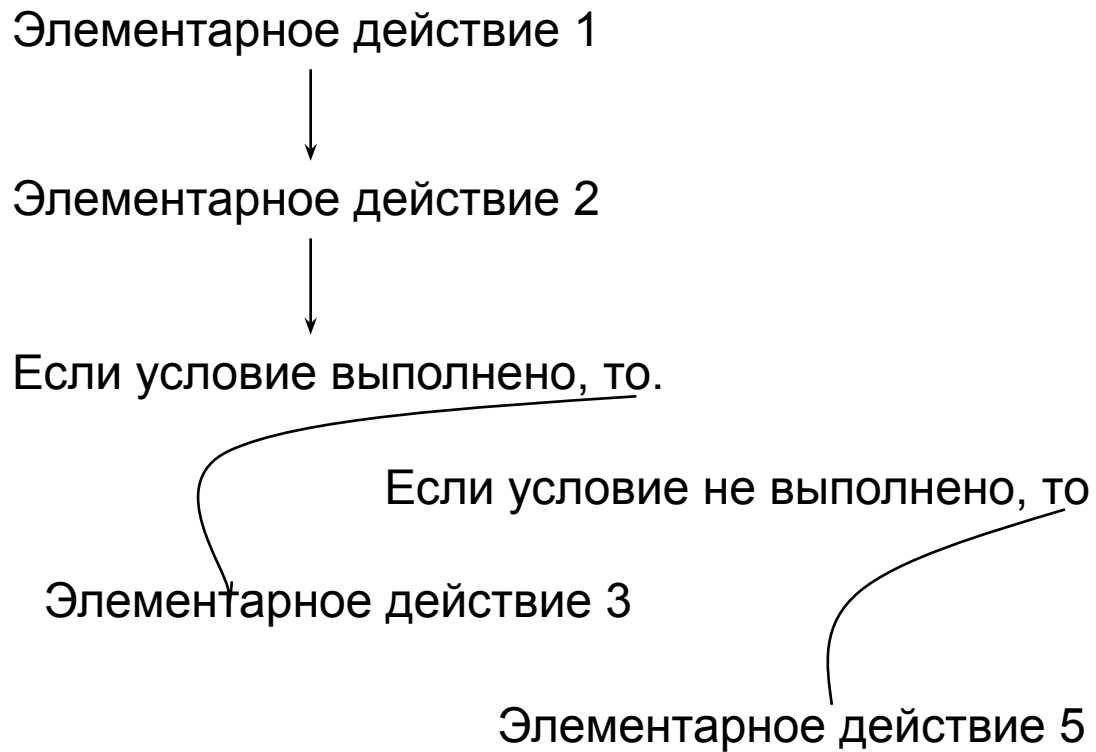
Значение переменной – число, текст, логическое значение или составной объект.

Прибавить к переменной X единицу – **неверная запись! Не указано место хранения результата!**

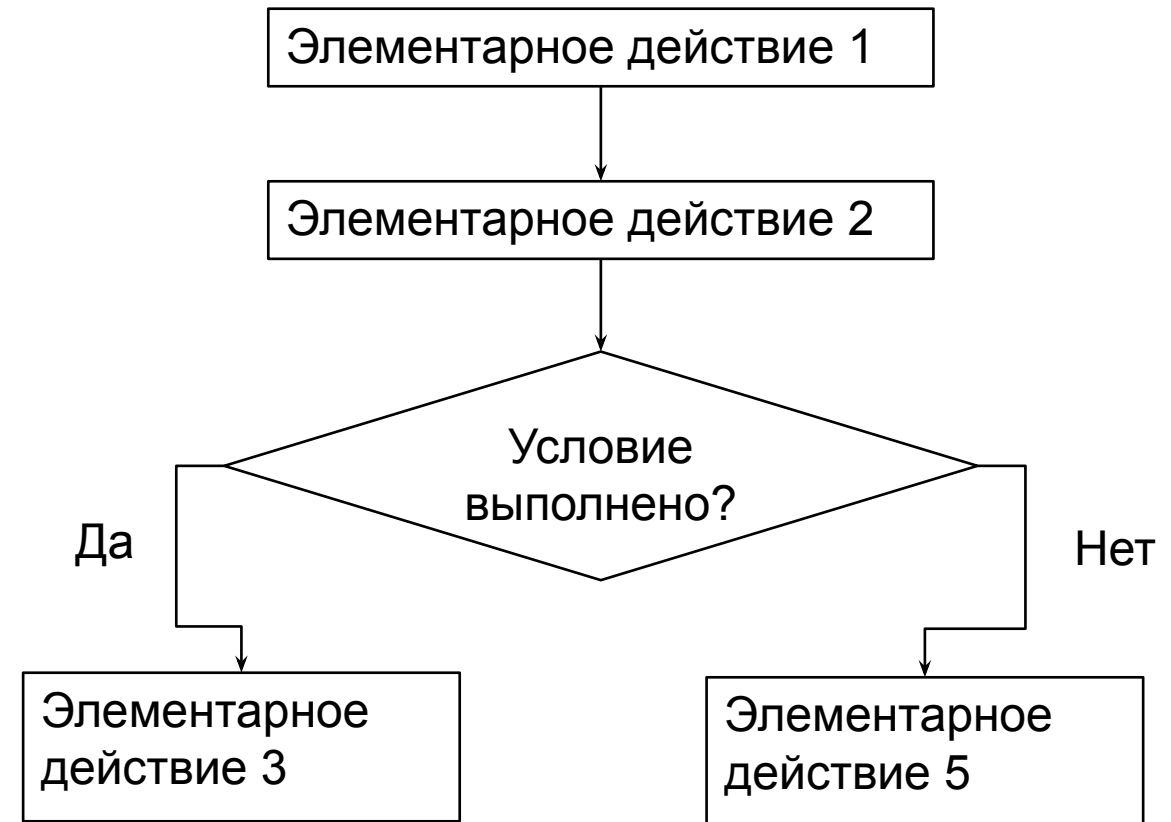
Увеличить значение переменной X на единицу – **верная запись, эквивалентная $X = X + 1$.**

Блок-схема

Не наглядно



Наглядно



Пошаговая процедура

ШАГ1: формальное действие 1

ШАГ2: формальное действие 2

ШАГ3: если условие выполнено, то перейти к шагу 4, иначе перейти к шагу 6

ШАГ4: формальное действие 3

ШАГ5: перейти к шагу 7

ШАГ6: формальное действие 5

ШАГ7:

Псевдо-код

- 1: Формальное действие 1
- 2: формальное действие 2
- 3: ЕСЛИ <условие> выполнено, ТО:
- 4: формальное действие 3
- 5: ИНАЧЕ:
- 6: Формальное действие 5

Псевдо-код, используемый в текущем курсе

Разветвление:

ЕСЛИ <выполнено условие>

ТО: элементарные операции

ИНАЧЕ: элементарные операции (**опции ИНАЧЕ может не быть**)

Цикл ПОКА:

ПОКА <выполнено условие>

ДЕЛАЙ: элементарные операции

КОНЕЦ

Цикл ДЛЯ

ДЛЯ <переменная цикла>; ДИАПАЗОН от:<значение>, до:<значение>, шаг: <значение>

Элементарные операции

КОНЕЦ

Элементарные действия для исполнителя «Компьютер»

Арифметические действия:

- сложение (+)
- вычитание (-)
- умножение (*)
- деление (/)

Логические действия:

- логическое И (&)
- логическое ИЛИ (|)
- отрицание НЕ (not)

Действия сравнения:

- больше (>)
- меньше (<)
- равно (=)

Действия ввода и вывода:

- ввод (input)
- вывод (output)

Действие сохранения значения:

- присвоить значение переменной (=)
- ввод (input)

Ввод десятичных чисел является элементарной операцией УСЛОВО!

Пример алгоритма

Разработать алгоритм - значит представить решение исходной задачи в виде последовательности элементарных действий.

Задача: вычислить значение переменной X равное сумме значений переменных A и B и вывести результат на экран монитора.

Алгоритм:

- 1: присвоить значение переменной A
- 2: присвоить значение переменной B
- 3: выполнить сложение $A + B$
- 4: сохранить результат сложения в переменной X
- 5: вывести значение переменной X

Запись алгоритма с помощью псевдо-кода:

```
input A  
input B  
 $X = A + B$   
output X
```

Состояние алгоритма

Состояние алгоритма

определяется значениями переменных, используемых в алгоритме

Цикл

многократное повторение последовательности элементарных действий.

Инварианта цикла

набор переменных, задающих начальные условия для очередной итерации цикла.

Инварианта цикла проходит три состояния:

- 1) *инициализация*
- 2) *повторение*
- 3) *окончание*

Агрегатные данные типа МАССИВ.

Массив – упорядоченный набор *однотипных значений*, к каждому из которых можно обратиться, указав его индекс (порядковый номер).

Массив А

- Элемент 1
 - Значение элемента 1
 - Индекс элемента 1
- Элемент 2
 - Значение элемента 2
 - Индекс элемента 2
- ...
- Элемент N
 - Значение элемента n
 - Индекс элемента n

Обращение к значению элемента массива с индексом m: $A[m]$

Агрегатные данные типа МАССИВ.

Свойства массива:

Значения элементов массива существуют физически.

Индексы – виртуальные величины.

Каждый элемент массива можно рассматривать как самостоятельную переменную с именем $A[m]$.
Имя переменной может формироваться в ходе выполнения алгоритма.

Значение m	1	2	3
Имя переменной	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$

К массиву нельзя обратиться по его имени!

$A = 1$ – **НЕВЕРНО!**

$A[3] = 1$ – **ВЕРНО!** (в переменной $A[3]$ будет храниться значение 1)

Алгоритм подсчёта количества элементов массива с заданными значениями

Задача

Задан массив с именем A , состоящий из N элементов.

Определить, сколько элементов удовлетворяют условию $COND$.

Запись $COND(X)$ означает проверку условия для значения переменной X .

Пример

$COND \iff ПЕРЕМЕННАЯ > 5$

$COND(3) - ЛОЖЬ (3 > 5)$

$COND(9) - ИСТИНА (9 > 5)$

$Y = 7$

$COND(Y) - ИСТИНА (7 > 5)$

$Z = 2$

$COND(Z) - ЛОЖЬ (2 > 5)$

Алгоритм подсчёта количества элементов массива с заданными значениями

Идея реализации алгоритма, решающего задачу:

В переменной **count** будет храниться значение, равное количеству элементов массива, удовлетворяющих заданному условию.

В переменной **idx** будет храниться индекс элемента массива

Проверяем: удовлетворяет значение элемента массива с индексом **idx** условию COND?

Если удовлетворяет, то увеличиваем значение переменной **count** на 1.

Повторяем проверку для всех элементов массива (в алгоритме будет цикл!).

Псевдо-код алгоритма

```
count = 0
```

```
idx = 0
```

```
ПОКА idx < N
```

```
ДЕЛАЙ:
```

```
    ЕСЛИ COND( A[idx] )
```

```
    ТО:
```

```
        count = count + 1
```

```
    idx = idx + 1
```

```
КОНЕЦ
```

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА:

count, idx

Алгоритм подсчёта элементов массива с заданными значениями

Инициализация инварианты:

`count` = 0 (нет элементов удовлетворяющих COND)

`idx` = 0 (будет обрабатываться элемент массива с номером 0)

Повторение инварианты

после первого цикла:

значение `count` содержит количество элементов (0 или 1), удовлетворяющих COND.

`idx` = 1 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 1).

после второго цикла:

значение `count` содержит количество элементов (от 0 до 2), удовлетворяющих COND.

`idx` = 2 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 2).

...

Окончание цикла

`idx` = N

`count` содержит значение, равное количеству элементов, удовлетворяющих COND

Агрегатные данные типа ДВУМЕРНЫЙ МАССИВ

	Индекс 1-го элемента в строке	Индекс 2-го элемента в строке	...	Индекс N-го элемента в строке
Индекс 1-й строки	Значение Элемента 1,1	Значение Элемента 1,2	...	Значение Элемента 1,N
Индекс 2-й строки	Значение Элемента 2,1	Значение Элемента 2,2	...	Значение Элемента 2,N
...
Индекс M-той строки	Значение Элемента M,1	Значение Элемента M,2	...	Значение Элемента M,N

Обращение к значению элемента массива с индексами i, j : $A[i, j]$

Агрегатные данные типа ДВУМЕРНЫЙ МАССИВ

Свойства массива:

Значения элементов массива существуют физически.

Индексы – виртуальные величины.

Каждый элемент массива можно рассматривать как самостоятельную переменную с именем $A[i, j]$.
Имя переменной может формироваться в ходе выполнения алгоритма.

Значение i	1	2	3
Значение j	2	3	5
Имя переменной	$A[1, 2]$	$A[2, 3]$	$A[3, 5]$

К массиву нельзя обратиться по его имени!

$A = 1$ – **НЕВЕРНО!**

$A[3, 5] = 1$ – **ВЕРНО!** (в переменной $A[3, 5]$ будет храниться значение 1)

Алгоритм подсчёта количества элементов двумерного массива с заданными значениями

Задача

Задан двумерный массив с именем `B`, состоящий из `N` строк и `M` столбцов ($N * M$ элементов).
Определить, сколько элементов удовлетворяют условию `COND`.

Идея реализации алгоритма, решающего задачу:

В переменной `count` будет храниться значение, равное количеству элементов массива, удовлетворяющих заданному условию.

В переменной `idx_1` будет храниться номер строки.

В переменной `idx_2` будет храниться номер столбца.

Проверяем: удовлетворяет значение элемента массива с индексами `idx_1`, `idx_2` условию `COND`?

Если удовлетворяет, то увеличиваем значение переменной `count` на 1.

Повторяем проверку для всех элементов массива (в алгоритме будут два цикла!).

Алгоритм подсчёта количества элементов двумерного массива с заданными значениями

Псевдо-код алгоритма

```
count = 0
idx_1 = 0
idx_2 = 0
ПОКА idx_1 < N
ДЕЛАЙ:
    ПОКА idx_2 < M
        ЕСЛИ COND( A[idx_1, idx_2] )
            ТО:
                count = count + 1
                idx_2 = idx_2 + 1
        КОНЕЦ
    idx_2 = idx_2 + 1
КОНЕЦ
```

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА:

count, idx_1, idx_2

Алгоритм подсчёта количества элементов двумерного массива с заданными значениями

Инициализация инварианты:

`count` = 0 (нет элементов удовлетворяющих COND)

`idx_1` = 0, `idx_2` = 0 (будет обрабатываться элемент массива с индексами 0,0)

Повторение инварианты

после первого внутреннего цикла:

значение `count` содержит количество элементов (0 или 1), удовлетворяющих COND.

`idx_1` = 0, `idx_2` = 1 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с индексами 0, 1).

после первого внешнего цикла:

значение `count` содержит количество элементов (от 0 до M), удовлетворяющих COND.

`idx_1` = 1, `idx_2` = 0 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с индексами 1, 0).

Окончание цикла

`idx_1` = N, `idx_2` = M

`count` содержит значение, равное количеству элементов, удовлетворяющих COND

Сложность алгоритма

Сложность алгоритма

величина, показывающая, как связано количество элементарных операций, необходимых для решения задачи, с объёмом входных данных.

Обозначается O (математическое выражение)

Примеры:

- 1) $O(n)$ при увеличении объёма входных данных в 2 раза, количество элементарных операций увеличится в 2 раза.
- 2) $O(n^2)$ при увеличении объёма входных данных в 2 раза, количество элементарных операций увеличится в 4 раза.
- 3) $O(\log(n))$ при увеличении объёма входных данных в 256 раз, количество элементарных операций увеличится в 8 раз.

Сложность алгоритма

Псевдо-код алгоритма подсчёта количества элементов, удовлетворяющих условию COND в одномерном массиве

```
count = 0
```

```
idx = 0
```

```
ПОКА idx < N
```

```
ДЕЛАЙ:
```

```
    ЕСЛИ COND( A[idx] )
```

```
    ТО:
```

```
        count = count + 1
```

```
    idx = idx + 1
```

```
КОНЕЦ
```

Будет N проходов цикла
Каждая
из
элементарных операций
повторится N раз

Сложность алгоритма $O(N)$

Сложность алгоритма

Псевдо-код алгоритма подсчёта количества элементов, удовлетворяющих условию COND в двумерном массиве

```
count = 0
```

```
idx_1 = 0
```

```
idx_2 = 0
```

```
ПОКА idx_1 < N
```

```
ДЕЛАЙ:
```

```
    ПОКА idx_2 < M
```

```
        ДЕЛАЙ:
```

```
            ЕСЛИ COND( A[idx_1, idx_2] )
```

```
            ТО:
```

```
                count = count + 1
```

```
                idx_2 = idx_2 + 1
```

```
        КОНЕЦ
```

```
        idx_2 = idx_2 + 1
```

```
КОНЕЦ
```

→ Будет N проходов цикла

→ Будет M проходов цикла

Каждая из элементарных операций повторится $N * M$ раз

Сложность алгоритма $O(N * M)$
Для квадратного массива $O(N^2)$

Сумма значений одномерного массива

Задача

Задан одномерный массив с именем A , состоящий из N элементов.

Вычислить сумму значений элементов массива.

Идея реализации алгоритма, решающего задачу:

В переменной **Total** будет храниться текущая сумма значений элементов массива.

В переменной **idx** будет храниться индекс текущего элемента массива.

Прибавляем значение текущего элемента массива к значению **Total**, сохраняем результат в **Total**.

Повторяем суммирование для всех элементов массива (в алгоритме будет цикл!).

Псевдо-код алгоритма подсчёта суммы

Total = 0

idx = 0

ПОКА idx < N

ДЕЛАЙ:

Total = Total + A[idx]

idx = idx + 1

КОНЕЦ

Инварианта цикла:

Total, idx

Будет N проходов цикла.

Каждая из

элементарных операций повторится N раз

Сложность алгоритма $O(N)$

Сумма значений одномерного массива

Инициализация инварианты:

Total = 0 (До начала суммирования значение суммы равно 0)

idx = 0 (будет обрабатываться элемент массива с номером 0)

Повторение инварианты

после первого цикла:

значение **Total** равно значению нулевого элемента массива.

idx = 1 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 1).

после второго цикла:

значение **Total** равно сумме значений нулевого и первого элементов массива.

idx = 2 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 2).

...

Окончание цикла

idx = N

Total содержит сумму значений элементов массива

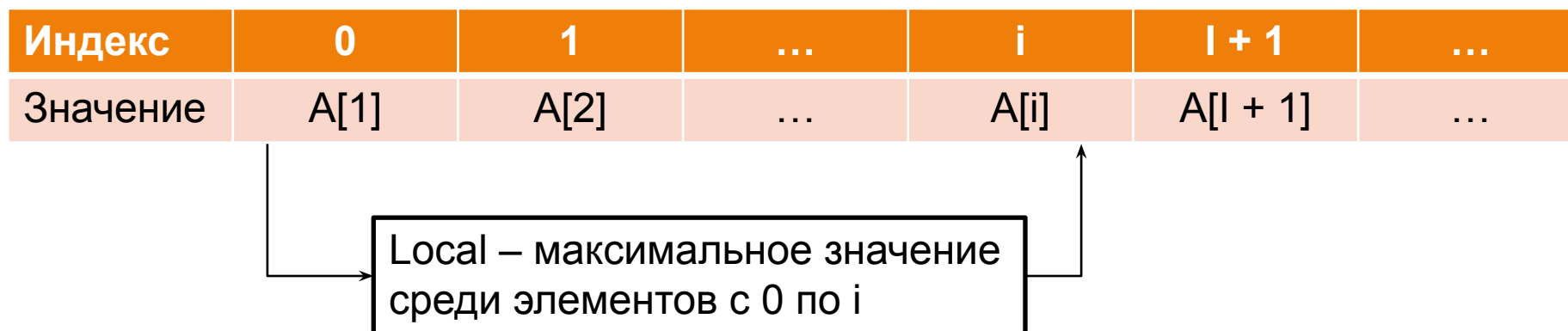
Поиск максимального значения в одномерном массиве

Задача

Задан массив с именем A , состоящий из N элементов.

Определить, максимальное среди всех значений элементов массива.

Идея реализации алгоритма, решающего задачу:



Если $A[i + 1] > Local$, то



Поиск максимального значения в одномерном массиве

Идея реализации алгоритма, решающего задачу, продолжение

Переменная **idx** хранит номер текущего обрабатываемого элемента массива.

Значение переменной **Local** равно максимальному среди значений элементов массива с номерами $0 \dots \text{idx} - 1$

Если **$A[\text{idx}] > \text{Local}$** , то значение $A[\text{idx}]$ максимальное среди значений элементов с номерами $0 \dots \text{idx}$:

$\text{Local} = A[\text{idx}]$

Если **$A[\text{idx}] \leq \text{Local}$** , то значение **Local** максимальное среди значений элементов с номерами $0 \dots \text{idx}$

Значение Local не изменяется.

Псевдо-код алгоритма

Local = A[0]

idx = 1

ПОКА **idx** < N

ДЕЛАЙ:

ЕСЛИ **A[idx]** > **Local**

ТО:

Local = A[idx]

idx = **idx** + 1

КОНЕЦ

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА:

Local, idx

Будет N проходов цикла.

Каждая из

элементарных операций

повторится N раз

Сложность алгоритма $O(N)$

Поиск максимального значения в одномерном массиве

Инициализация инварианты:

Local = A[0] (До первого повторения цикла, значение нулевого элемент массива считается максимальным, т.к. значения других элементов пока не анализировались)

idx = 1 (будет обрабатываться элемент массива с номером 1. Элемент массива с номером 0 уже учтён, при задании начального значения переменной Local)

Повторение инварианты

после первого цикла:

значение **Local** равно максимальному значению среди нулевого и первого элементов массива.

idx = 2 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 2).

после второго цикла:

значение **Local** равно максимальному значению среди нулевого, первого и второго элементов массива.

idx = 3 (указывает на то, что следующим будет обрабатываться элемент массива с номером 3).

...

Окончание цикла

idx = N

Local содержит максимальное значение среди всех элементов массива.

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию

Задача

Задан массив с именем A , состоящий из N элементов.

Определить, максимальное среди значений элементов массива, таких что $\text{COND}(A[i])$ истинно, $i = 0 \dots N - 1$.

Индекс	0	1	...	i	$i + 1$...
Значение	$A[1]$	$A[2]$...	$A[i]$	$A[i + 1]$...

Local – максимальное значение среди элементов с 0 по i , для которых $\text{COND}(A[j])$ истинно

$j = 0, 1, \dots, i$

Если $A[i + 1] > \text{Local}$, то

Индекс...	0	1	...	i	$i + 1$...
Значение	$A[1]$	$A[2]$...	$A[i]$	$A[i + 1]$...

Local – максимальное значение среди элементов с 0 по $i + 1$, для которых $\text{COND}(A[j])$ истинно

$j = 0, 1, \dots, i + 1$

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию

Псевдо-код алгоритма (вариант 1)

Local = минимально возможному значению типа

idx = 1

ПОКА idx < N

ДЕЛАЙ:

ЕСЛИ COND(A[idx]) & A[idx] > Local

ТО:

Local = A[idx]

idx = idx + 1

КОНЕЦ

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА:

Local, idx

Будет N проходов цикла.
Каждая из
элементарных операций
повторится N раз

Сложность алгоритма $O(N)$

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию

Псевдо-код алгоритма (вариант 2)

idx = 0

ПОКА not(COND(A[idx]))

ДЕЛАЙ:

 idx = idx + 1

КОНЕЦ

Local = A[idx]

idx = idx + 1

ПОКА idx < N

ДЕЛАЙ:

ЕСЛИ COND(A[idx]) & A[idx] > Local

ТО:

 Local = A[idx]

 idx = idx + 1

КОНЕЦ

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА 1:

idx

ИНВАРИАНТА ЦИКЛА 2:

Local, idx

В двух циклах суммарно будет N проходов.

Каждая из

элементарных операций

повторится N раз

Сложность алгоритма $O(N)$

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию (вариант 1)

Инициализация инварианты:

Local = минимально возможному значению типа для элементов массива.

idx = 0 (будет обрабатываться элемент массива с номером 0. Ни один из элементов массива не учтён).

Повторение инварианты

после первых циклов, в которых $COND(A[idx])$ ложно:

значение **Local** не изменится.

idx = **idx** + 1 (указывает на переход к следующему элементу массива).

после первого цикла, в котором $COND(A[idx])$ истинно:

значение **Local** равно $A[idx]$.

idx = **idx** + 1 (указывает на переход к следующему элементу массива).

после всех последующих циклов

значение **Local** равно максимальному среди элементов массива для которых $COND(A[idx])$ истинно.

idx = **idx** + 1 (указывает на переход к следующему элементу массива).

Окончание цикла

idx = N

Local содержит максимальное значение среди всех элементов массива, для которых $COND(A[idx])$ истинно.

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию (вариант 2)

Инициализация инварианты цикла 1:

$idx = 0$ (будет обрабатываться элемент массива с номером 0).

Повторение инварианты

после всех повторений цикла 1, для которых $COND(A[idx])$ ложно

$idx = idx + 1$ (переход к следующему элементу массива).

Окончание цикла 1

$COND(A[idx])$ истинно

Инициализация инварианты цикла 2:

$Local = A[idx]$ (начальное значение Local равно значению первого элемента, удовлетворяющего COND)

$idx = idx + 1$ (будет обрабатываться элемент массива, следующий за первым, для которого $COND(A[idx])$ истинно).

Повторение инварианты цикла 2

после первого повторения:

$Local$ не изменяется, если:

- $COND(A[idx])$ ложно;
- $COND(A[idx])$ истинно и $Local \leq A[idx]$

$Local = A[idx]$, если $COND(A[idx])$ истинно и $Local > A[idx]$

$idx = idx + 1$ (переход к следующему элементу массива).

Поиск в одномерном массиве максимального значения среди элементов, удовлетворяющих заданному условию (вариант 2)

(ПРОДОЛЖЕНИЕ)

для всех последующих циклов

значение **Local** равно максимальному среди элементов массива для которых $\text{COND}(A[\text{idx}])$ истинно.

$\text{idx} = \text{idx} + 1$ (указывает на переход к следующему элементу массива).

Окончание цикла

$\text{idx} = N$

Local содержит максимальное значение среди всех элементов массива, для которых $\text{COND}(A[\text{idx}])$ ИСТИННО.