Дискретная математика

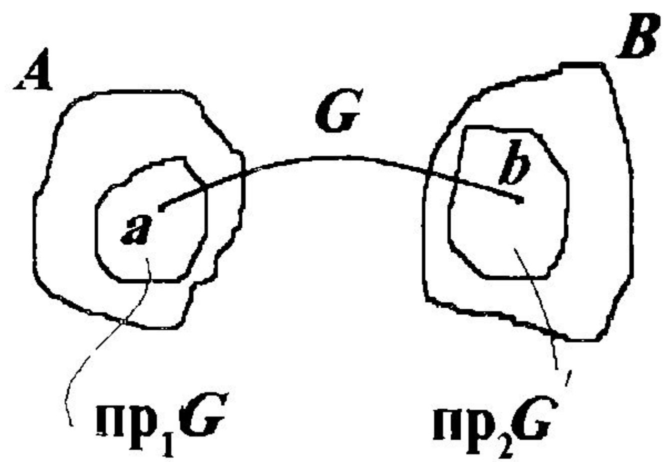
Соответствия

Основные определения

Соответствием между множествами A и B называется подмножество G прямого произведения этих множеств: $G \subseteq A \times B$. Если $(a, b) \in G$, то говорят, что "b соответствует a при соответствии G".

Область определения соответствия G – множество $\text{пр}_1 G=\{a: (a,b) \in G\}$

Область значений соответствия G – множество $\text{пр}_2 G=\{b: (a,b) \in G\}$



Основные определения

Пример 1. Экзаменационная ведомость устанавливает следующее соответствие :

- A={Иванов, Петров, Сидоров, Конев, Синицын, Васечкин, Макарова}.
- B={2, 3, 4, 5}.

Иванов – 4

Петров – 2

Сидоров – 3

Конев – 4

Синицын на экзамен не явился

Васечкин – 3

Макарова – 5

$G \subseteq A \times B$, G-соответствие между студентами и оценками

Основные определения

A={Иванов, Петров, Сидоров, Конев, Синицын, Васечкин, Макарова}.
B={2, 3, 4, 5}.

G={(Иванов, 4), (Петров, 2), (Сидоров, 3), (Конев, 4), (Васечкин, 3), (Макарова, 5)}.

Область определения соответствия G –

$пр_1G$={Иванов, Петров, Сидоров, Конев, Васечкин, Макарова}.

Область значений соответствия G – $пр_2G$={2, 3, 4, 5}.

Основные определения

Образом элемента a в множество B при соответствии G называется множество всех $b \in B$, соответствующих элементу $a \in A$. *Прообразом элемента b* в множество A при соответствии G называется множество всех $a \in A$, которым соответствует $b \in B$.

В примере 1:

- образом Иванова является 4;
- образом Сидорова - 3 и т.д.
- Прообразом 2 является Петров;
- Прообразом 4 – Иванов, Конев.

Свойства соответствий

1. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **всюду (полностью) определенным**, если область определения совпадает с множеством A, т.е. $пр_1 G = A$. В противном случае соответствие называется частично определенным.
2. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **сюръективным**, если область значений совпадает с множеством B, т.е. $пр_2 G = B$.
3. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **функциональным**, если образом любого элемента *a* из области определения $пр_1 G$ является единственный элемент *b* из области значений $пр_2 G$.
4. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **инъективным**, если прообразом любого элемента *b* из области значений $пр_2 G$ является единственный элемент *a* из области определения $пр_1 G$.

Свойства соответствий

Определим свойства отношения в примере 1.

G={(Иванов, 4), (Петров, 2), (Сидоров, 3), (Конев, 4), (Васечкин, 3), (Макарова, 5)}.

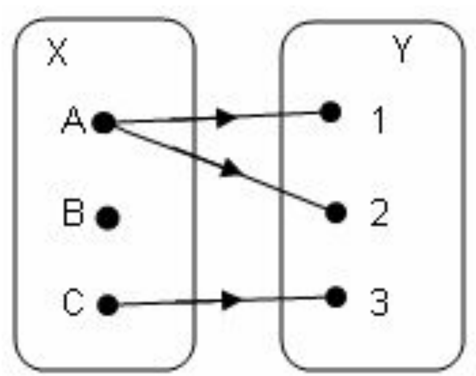
A={Иванов, Петров, Сидоров, Конев, Синицын, Васечкин, Макарова}.
B={2, 3, 4, 5}.

$пр_1$G={Иванов, Петров, Сидоров, Конев, Васечкин, Макарова}.

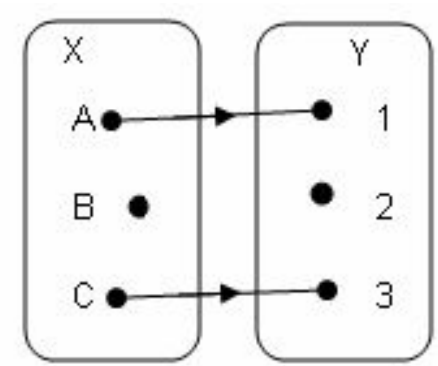
$пр_2$G={2, 3, 4, 5}.

1. Частично определено, так как нет образа для Синицына;
2. Сюръективно, так как для каждой оценки определен прообраз;
3. Функционально, так как каждому студенту соответствует единственная оценка;
4. Неинъективно, так как оценка 4 соответствует двум студентам.

Свойства соответствий

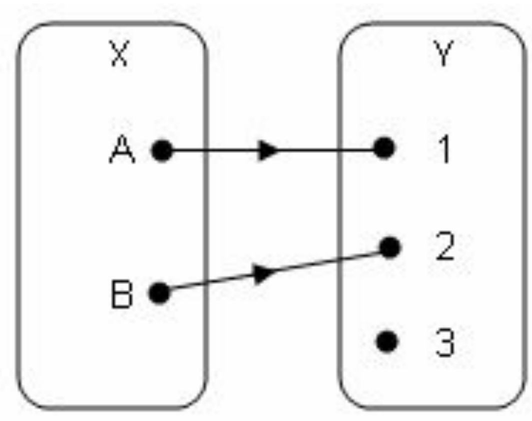


Частично определено, сюръективно, нефункционально, инъективно

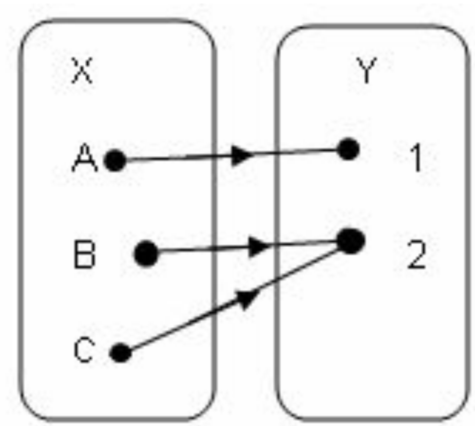


частично определено, несюръективно, функционально, инъективно

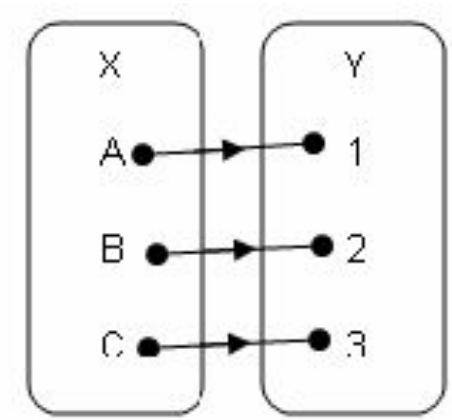
Свойства соответствий



Всюду определено, несюръективно, функционально, инъективно



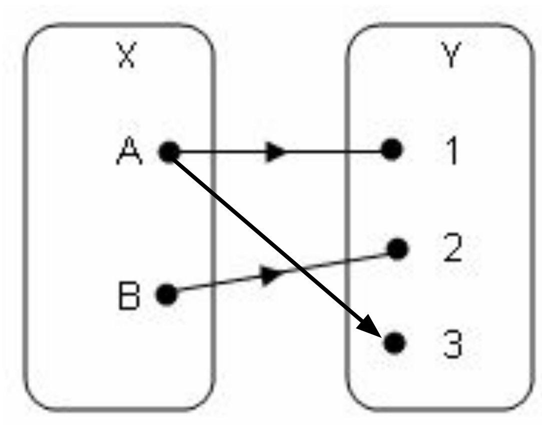
Всюду определено, сюръективно, функционально, неинъективно

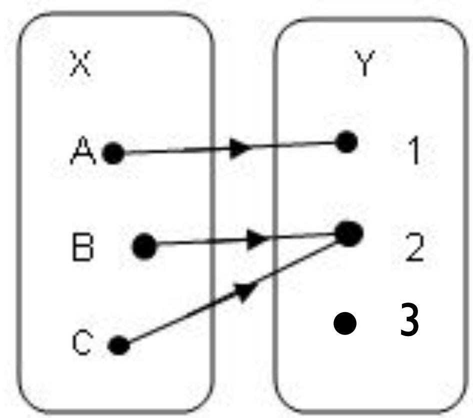


Всюду определено, сюръективно, функционально, инъективно

Свойства соответствий

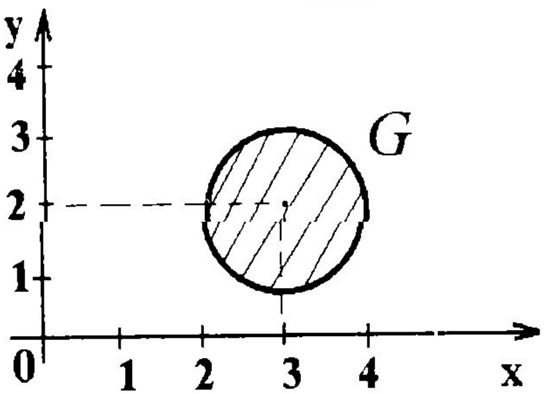
- Домашняя работа: определите свойства соответсвий.





- Придумайте пример соответствия, которое обладает свойствами: всюдоопределено, несюръективно, нефункционально, инъективно

Пример 1. Пусть G – множество всех пар действительных чисел (x, y), удовлетворяющих соотношению $(x-3)^2+$ $+(y-2)^2 \leq 1$. Графически такое соответствие G представляет собой круг радиуса 1 с центром в точке (3, 2). Таким образом, круг G задает соответствие между R и R (осью абсцисс и осью ординат)



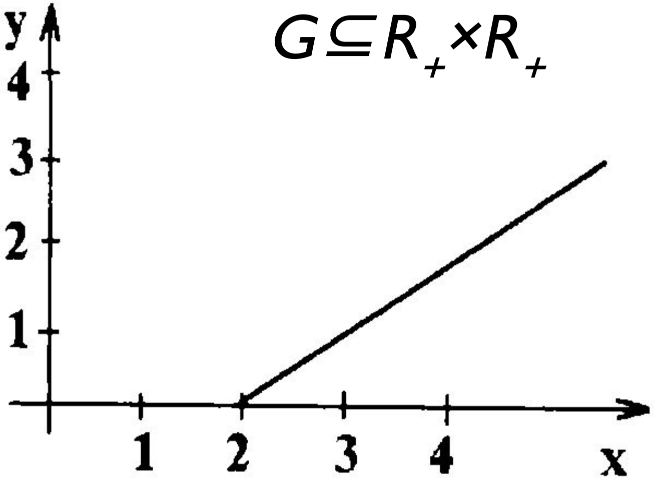
Определить, чему равны:

а) образы и прообразы чисел 2, 3, 4;

б) образы и прообразы отрезков [2, 3], [2, 4].

Каковы свойства соответствия G?

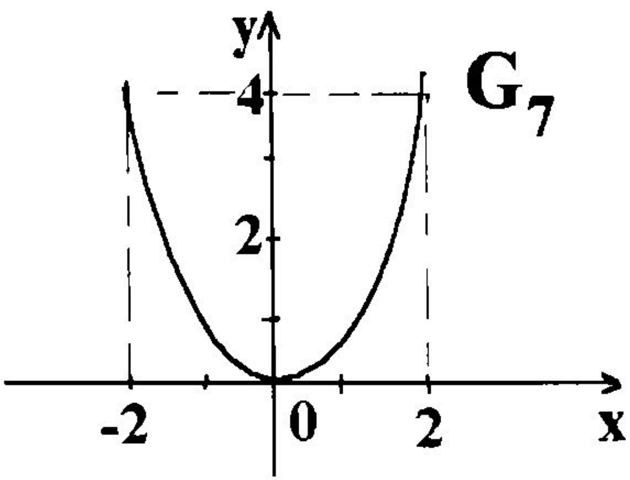
$G \subseteq R_+ \times R_+$



Пример 2. Пусть G – множество точек прямой линии, удовлетворяющей соотношению $x - 2 = y$ при $x, y \geq 0$ (рис. 3.3). Каковы свойства соответствия G?

Найти образы и прообразы чисел: 0, 1, 2; отрезков: [0,1], [2,3]

Пример 3. Соответствие G $\subseteq R \times R_+$ задано графиком. Найти образы и прообразы чисел: 0, 2, 3; отрезков [0,2], [-1,2]. Определить свойства соответствия.



Функции и отображения

Функциональное соответствие называется функцией.

Если функция f устанавливает соответствие между множествами A и B, то говорят, что функция имеет тип A→B (обозначается f : A→B).

Каждому элементу a из области определения функция f ставит в соответствие элемент b из области значений. Это обозначается $f(a)=b$. Элемент a называется аргументом функции, элемент b – значение функции на a.

Функции и отображения

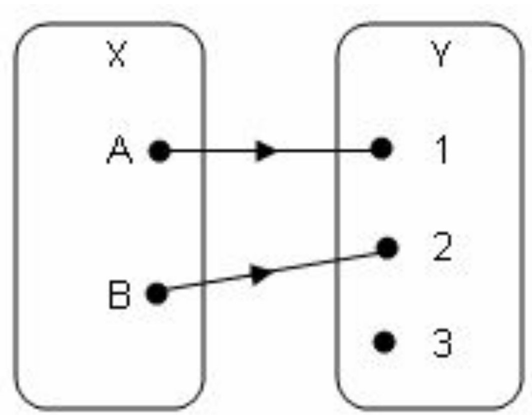
Отображением А в В называется всюду определенная функция $f: A \to B$ (обозначается $f: A \xrightarrow{в} B$).

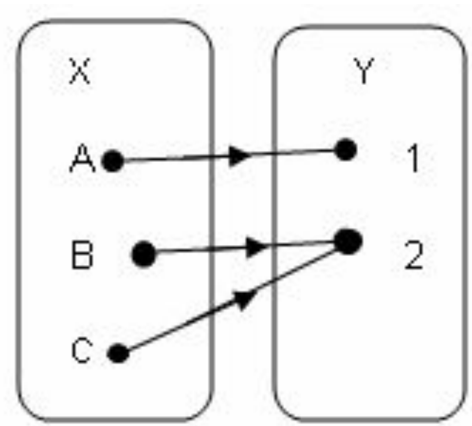
Отображением А на В называется всюду определенная и сюръективная функция $f: A \to B$ (обозначается $f: A \xrightarrow{на} B$).

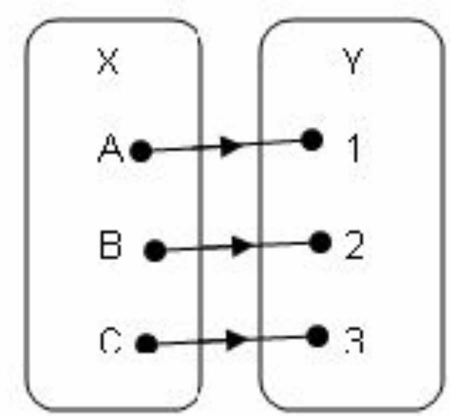
Соответствие	Обязательное свойство		
	функциональное	всюду определенное	сюръективное
Функция	+		
Отображение A в B	+	+	
Отображение A на B	+	+	+

Соответствие	Обязательное свойство		
	функциональное	всюду определенное	сюръективное
Функция	+		
Отображение *A* в *B*	+	+	
Отображение *A* на *B*	+	+	+

Какое соответствие является функцией, отображением в, отображением на?







Функции и отображения

Пример. Является ли функция $f(x) = 2x$, имеющая $N \to N$, отображением, и если – да, то каким?

Как нужно определить эту функцию, чтобы она стала отображением N на N

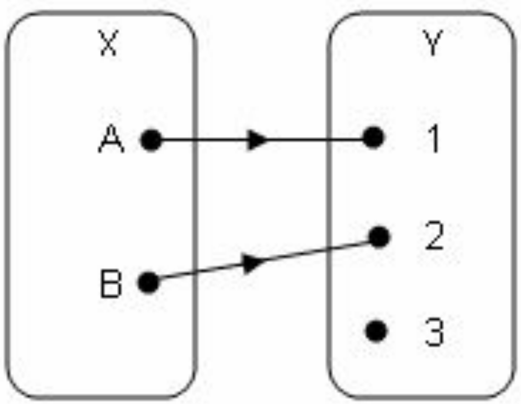
➢ Функция $f(x) = 2x$, $f: N \to N$, всюду определена на N, однако не сюръективна, так как область значений функции f равна $\text{пр}_2 f = M_{2n} \neq N$ (область значений содержит не все натуральные числа из N, а только четные). Поэтому f является отображением N в N

Взаимно-однозначное соответствие

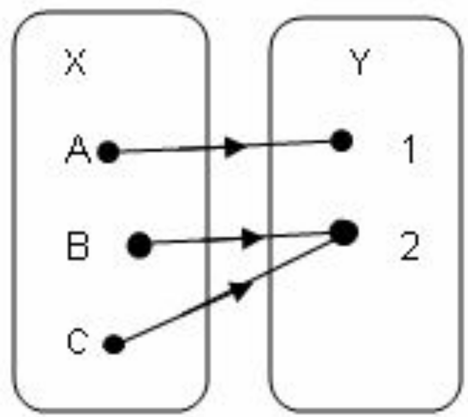
Соответствие называется взаимно-однозначным, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Соответствие	Обязательное свойство			
	функциональное	всюду определенное	сюръективное	инъективное
Функция	+			
Отображение A в B	+	+		
Отображение A на B	+	+	+	
Взаимно-однозначное соответствие	+	+	+	+

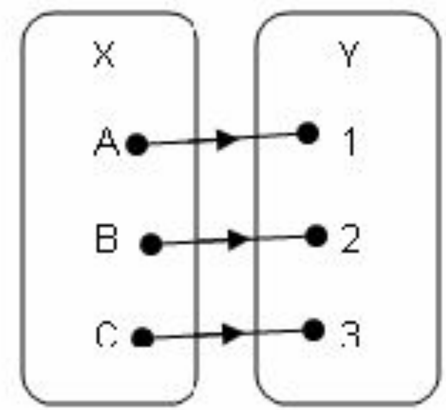
Какое соответствие является взаимно-однозначным?



$$f\colon X \xrightarrow{\text{в}} Y$$



$$f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$$



Взаимно-однозначное соответствие

Пример 4. Пусть множества $\beta(U)$, где $U = \{a, b, c\}$, и B_3 определены следующим образом:

$\beta(U)$ – множество всех подмножеств (булеан) множества $U = \{a, b, c\}$;

B_3 – множество всех двоичных векторов длины 3, т.е. $B_3 = A \times A \times A$, где $A = \{0, 1\}$.

Показать, что между множествами $\beta(U)$ и B_3, где $U = \{a, b, c\}$, имеет место взаимно однозначное соответствие.

Мощность множеств

Понятие мощности возникает при сравнении множеств по числу элементов.

Мощностью конечного множества является число его элементов. Множество, не являющееся конечным, называется **бесконечным.**

Если между множествами A и B существует взаимно-однозначное соответствие, то мощности этих множеств равны, т.е. $|A|=|B|$. В таком случае говорят, что множества A и B равномощны.

Мощность множеств

Этот факт позволяет:

- установить равенство мощностей двух множеств, не вычисляя этих множеств;
- вычислить мощность множества, установив его взаимно-однозначное соответствие с множеством, мощность которого известна или легко вычисляема.

Существование биекции между двумя эквивалентными множествами позволяет переносить изучение свойств с одного множества на другое, когда природа элементов не важна. Например, если $|A|=n$, то с элементами множества A можно работать как с числами 1,2,...,n.

Счетные множества

Любое множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называют счетным. Мощность счетного множества обозначают $\aleph_0$ (читается „алеф нуль").

Если некоторое множество M равномощно множеству натуральных чисел N, то между M и N можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию) ν: N→ M, которое называют нумерацией счетного множества M.

Счетные множества

Если элемент множества M есть $\nu(n)$ для некоторого $n \in N$, то этот элемент множества M обозначаем через a_n, называя натуральное число n номером элемента a_n относительно данной нумерации ν.

Таким образом, элементы счетного множества можно перенумеровать, записав их в виде последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$

Счетные множества

Пример. Множество всех нечетных натуральных чисел счетно. Нумерацию ν можно задать так: ν(n) = 2n-1,

$$\left.\begin{array}{l} N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\} \\ \quad\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \searrow\ \searrow \\ M_{2n-1}=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\} \end{array}\right\} \Rightarrow M_{2n-1} \text{- счетно.}$$

Получили:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & M_{2n-1} \subset N; \\ 2. & |M_{2n-1}| = |N|. \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Множество равномощно своему подмножеству.

Счетные множества

Пример. Множество Z всех целых чисел счетно.

Расположим элементы множества целых чисел в определенном порядке:

- $N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$
- $Z=\{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots\}$

Нумерацию v можно задать так:

$$v(n) = \begin{cases} -n/2, & n\text{- четное} \\ (n-1)/2, & n \text{ - нечетное} \end{cases}$$

Получили:

1. $N \subset Z$;
2. $|N|=|Z|$

Счетные множества

Пример. Множество Z всех целых чисел счетно.

Нумерацию можно было установить так:

$$\nu(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} - 1, & n = 2k \text{ (четно)}; \\ -\dfrac{n+1}{2}, & n = 2k-1 \text{ (не четно)}. \end{cases}$$

$Z=\{\ldots, \overset{9}{-5}, \overset{7}{-4}, \overset{5}{-3}, \overset{3}{-2}, \overset{1}{-1}, \overset{2}{0}, \overset{4}{1}, \overset{6}{2}, \overset{8}{3}, \overset{10}{4}, \ldots \}$

Получили:

1. $N \subset Z$;
2. $|N| = |Z|$.

Счетные множества

Примеры счетных множеств:

- Множество рациональных чисел счетно;
- Множество периодических дробей счетно;
- Множество всех натуральных чисел, делящихся на заданное число к ≥ 2, счетно.
- Множество пар натуральных чисел счетно.

Счетные множества

- Докажем, что Множество пар натуральных чисел счетно.

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & \ldots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & \ldots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & \ldots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & \ldots \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Счетные множества

Теорема .

- (а) Подмножество счетного множества конечно или счетно.
- (б) Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.
- (в) Объединение конечного или счетного числа конечных или счетных множеств конечно или счетно.

Несчетные множества

<u>Теорема Кантора:</u> Множество всех действительных чисел интервала (0,1) числовой оси несчетно.

Всякое множество, эквивалентное множеству всех действительных чисел интервала (0,1), называется континуальным или множеством мощности континуума.

Примеры континуальных множеств:

- Множество действительных чисел;
- Множество иррациональных чисел ;
- Множество точек на отрезке [0,5];
- Множество точек квадрата $[1,10]\times[1,10]$;
- Множество β(M) всех подмножеств некоторого счетного множества M
- Множество точек пространства R3.


Виды множеств
Конечные
$A = \{a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n\}$,
где $i \in [1, n]$; $|A| = n$
Бесконечные
$M = \{x, y, z, ...\}$
Счетные
$A = \{a_1, a_2, ..., a_i, ...\}$,
где $i \in \mathbb{N}$;
$|A| = |\mathbb{N}|$
Несчетные
$x \in (a;\ b) = A$;
$|A| = |\mathbb{R}|$
a
b
Множество решений уравнения $x^3 - 16x = 0$; множество двузначных чисел; множество сторон шестиугольника; пустое множество; множество целых решений неравенства $|x| \leq 5$
Множество целых решений неравенства $x \geq 5$; $\{x: x_n = 6 - n,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$; множество четных или нечетных чисел; множество рациональных чисел; множество решений уравнения $\sin x = 1$
Множество действительных решений неравенства $x \geq 3$; множество точек отрезка; множество прямых, параллельных данной