Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

Часть 3

Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова «combina», что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять».

Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход немецким философом, математиком Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Познакомимся с некоторыми приемами решения комбинаторных задач

- решение методом перебора;
- решение с помощью дерева возможных вариантов;
- решение с помощью комбинаторного правила умножения;
- решение с помощью таблиц;
- решение с помощью графов.

У Ирины 5 подруг: Вера, Зоя, Марина, Полина и Светлана. Она решила двух из них пригласить в кино. Укажите все возможные варианты выбора подруг. Сколько таких вариантов?

Замечание. При решении для краткости будем писать первые буквы имен.

Решение **Вера Зоя Марина Полина Света**

Составим сначала все пары, в которые входит Вера.

ВЗ, ВМ, ВП, ВС *Получим 4 пары.*

Выпишем теперь пары, в которые входит Зоя, но не входит Вера. *Таких пар три.* **ЗМ, ЗП, ЗС**

Далее составим пары, в которые входит Марина, но не входят Вера и Зоя. **МП, МС** *Их две.*

Далее составим пары, в которые входит Полина.

ПС *Еще одна пара*

Всего существует 4+3+2+1=10 **Ответ:10 вариантов**

Способ рассуждений, которым мы воспользовались при решении задачи, называют **перебором возможных вариантов.**

Рассмотрим еще одну задачу. На цветочной клумбе сидели **ш**мель, **ж**ук, **б**абочка и **м**уха. Два насекомых улетели. Какие пары насекомых могли улететь? Укажите все возможные варианты. Сколько таких вариантов?

ш

ж

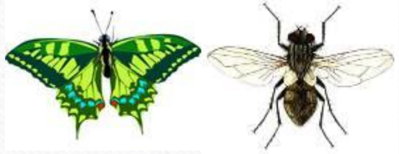
б

м

Решение

ш ж

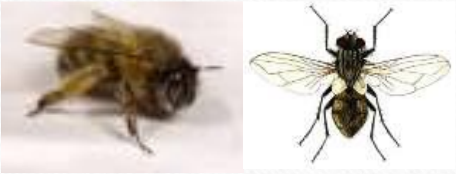
ж б



б м

ш б

ж м



ш м

Всего 3+2+1=6

Ответ:6 вариантов

Приемы решения комбинаторных задач

метод перебора

Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1; 4; 7?

Решение: Для того, чтобы не пропустить и не повторить ни одного из чисел, будем выписывать их в порядке возрастания:

11;14;17; (начали с 1)

41;44;47; (начали с 4)

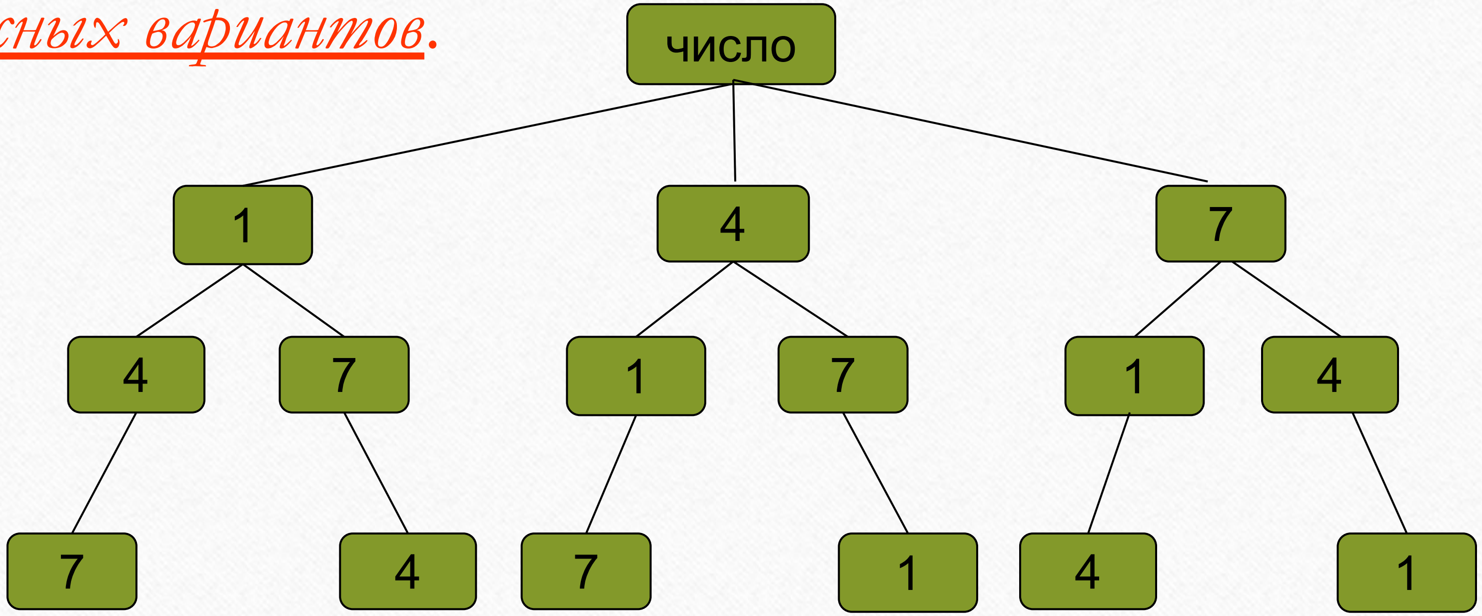
71;74;77; (начали с 7)

Таким образом, из трёх данных цифр можно составить всего 9 различных двузначных чисел.

Ответ: 9 чисел.

Комбинаторные задачи.
1. Дерево вариантов.

Решим аналогичную задачу о составлении трехзначных чисел из цифр 1;4;7, так чтобы цифры не повторялись. Для её решения построим схему - *дерево возможных вариантов*.



Ответ: числа 147;174;417;471;714;741

6 чисел (вариантов)

Приемы решения комбинаторных задач дерево возможных вариантов

Заметим, что ответ на вопрос, можно получить, не выписывая сами числа. Будем рассуждать так.

Первую цифру можно выбрать ***тремя*** *способами*. Так как после выбора первой цифры останутся две, то *вторую цифру можно выбрать* ***двумя*** *способами. Остается приписать* ***одну*** *цифру*. Следовательно, общее число искомых трехзначных чисел равно произведению

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Комбинаторные задачи.
2. Правило умножения.

На завтрак мож ... ь можно чаем,

2.Правило умножения.

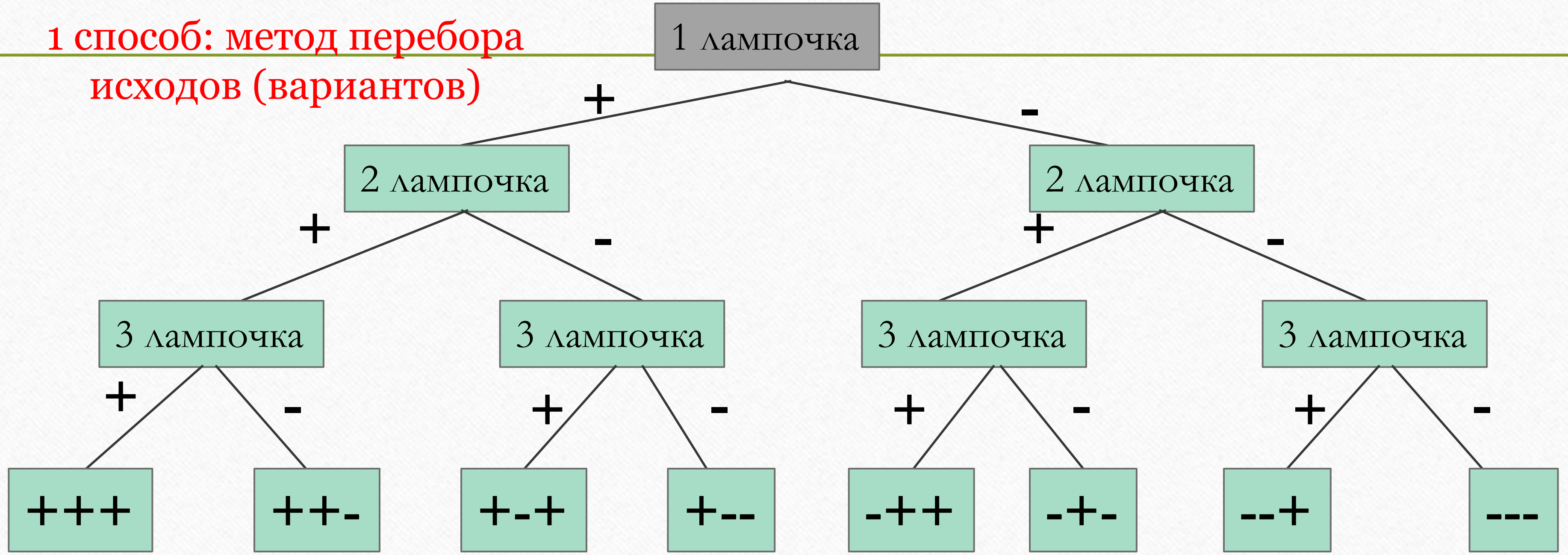
Для того, чтобы найти число всех возможных исходов (вариантов) независимого проведения двух испытаний А и В, надо перемножить число всех исходов испытания А на число всех исходов испытания В

Испытание А имеет 3 варианта (исхода), а испытание В-4, всего вариантов независимых испытаний А и В 3•4=12.

Решим задачу:

В комнате 3 лампочки. Сколько имеется различных вариантов освещения комнаты, включая случай, когда все лампочки не горят.

1 способ: метод перебора исходов (вариантов)



2 способ: правило умножения.

Испытание А- действие 1 лампочки, испытание В-действие 2 лампочки, испытание С-действие 3 лампочки.

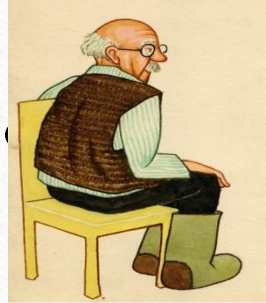
У каждого испытания 2 исхода: «горит» и «не горит»

Всего исходов: 2•2•2=8

Семейный ужин.

В семье 6 человек, а за столом в кухне 6 стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти 6 стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

6• •2•1= 720 очти 2 года

6 5 4 3 2 1

№1 №2 №3 №4 №5 №6

Мы нашли ответ на вопрос, используя так называемое **комбинаторное правило умножения**

«Если объект ***A*** можно выбрать ***m*** способами, а другой объект ***B*** можно выбрать ***k*** способами, то объект «***A и B***» можно выбрать $\boldsymbol{m \cdot k}$ *способами*».

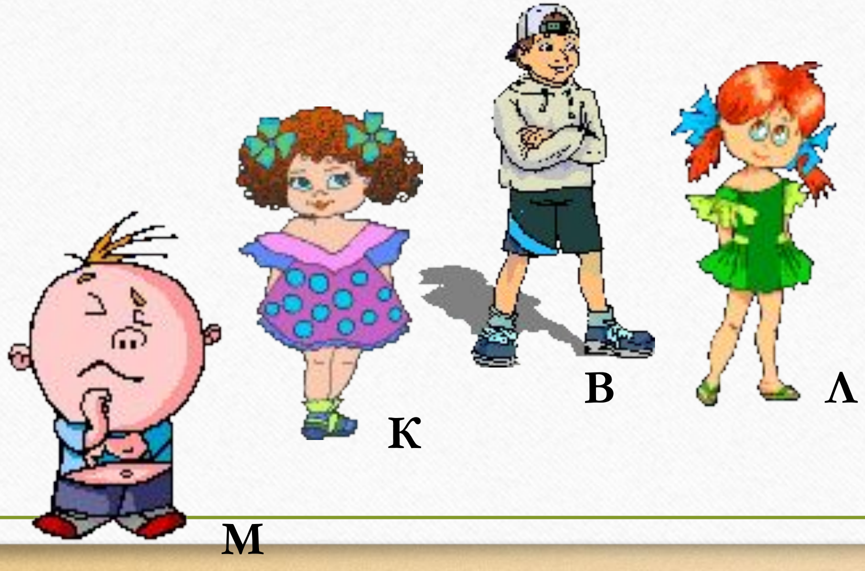
Комбинаторное правило умножения

У куклы Светы 3 юбки и 5 кофт, удачно сочетающихся по цвету. Сколько различных комбинаций одежды имеется у Светы?

Решение. **$3 \cdot 5 = 15$**

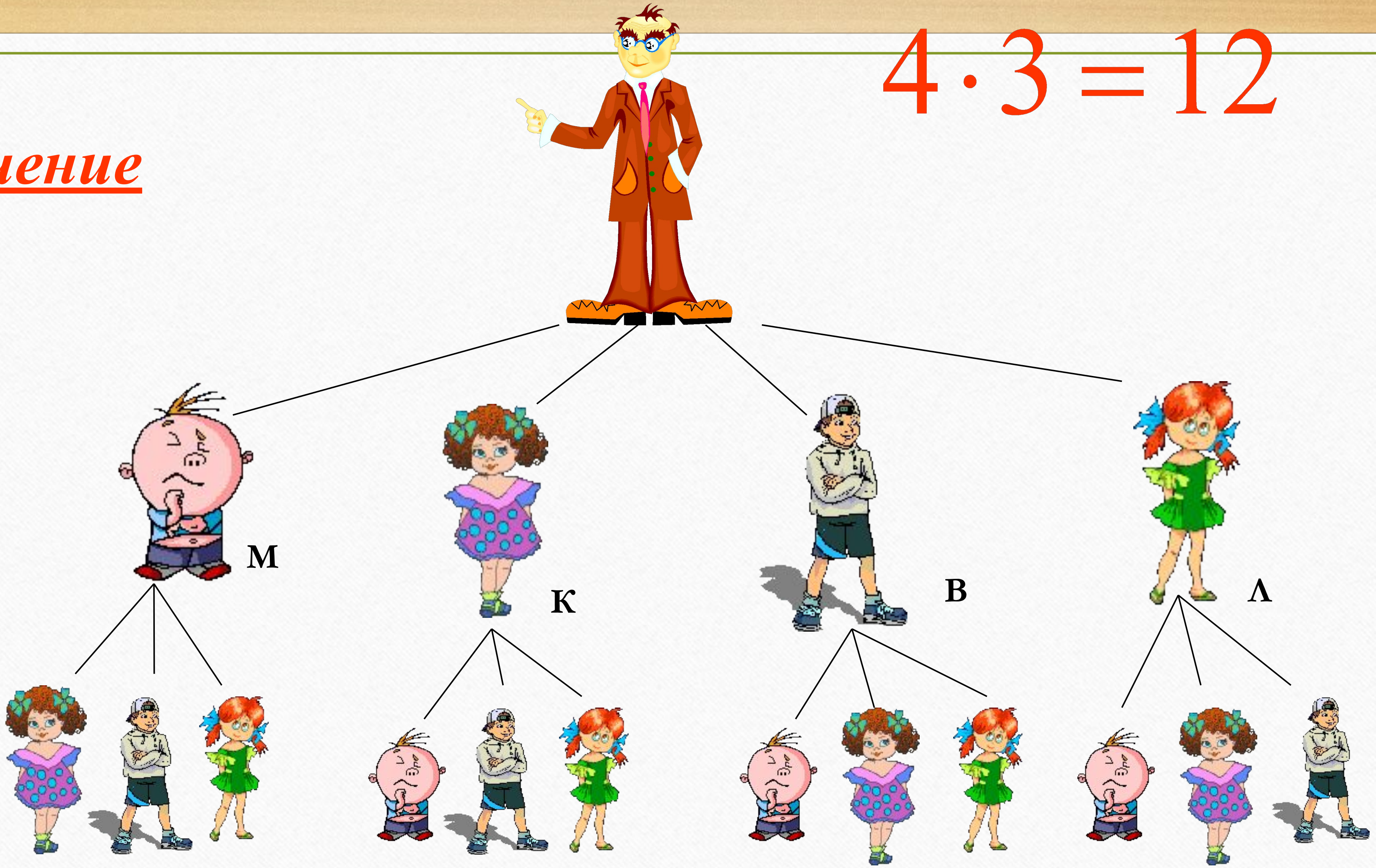
Решите задачу, используя
дерево возможных вариантов

В класс пришли четыре новых ученика **М**иша, **К**атя, **В**ася, **Л**иза. С помощью дерева возможных вариантов покажи, все возможные варианты расположения четырех учеников за одной партой. Сколько вариантов выбора будет?



$$4 \cdot 3 = 12$$

Решение



Ответ: 12 вариантов

Приемы решения комбинаторных задач

задачи, решаемые с помощью таблиц

У Миши 4 ручки разного цвета и 3 блокнота разного размера. Сколько различных наборов из ручки и блокнота сможет составить Миша? Реши задачу, составив таблицу.

б

с

м

с

з

ч

к

12 различных наборов

Приемы решения комбинаторных задач

задачи, решаемые с помощью таблиц

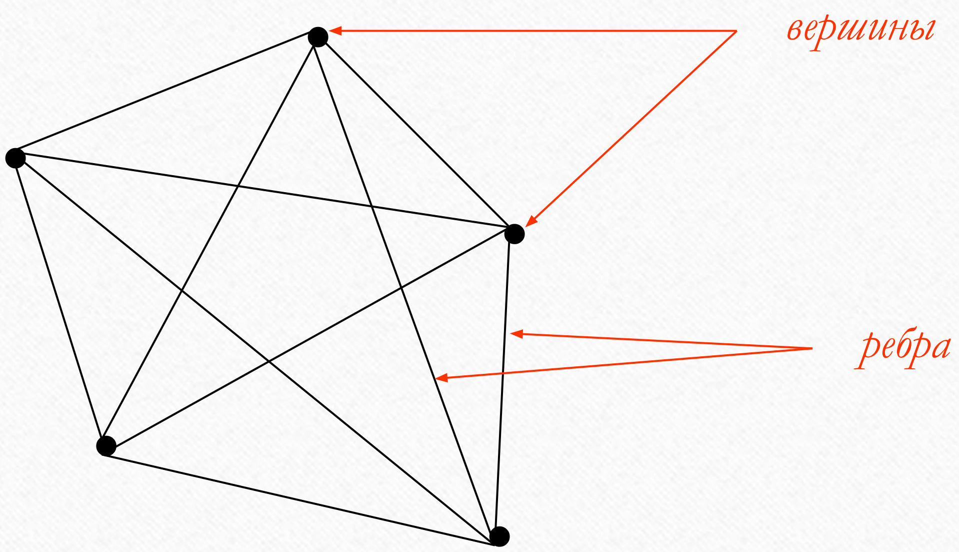
Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,4,5,9?

	0	2	4
1	10	12	14
2	20	22	24
4	40	42	44
5	50	52	54
9	90	92	94

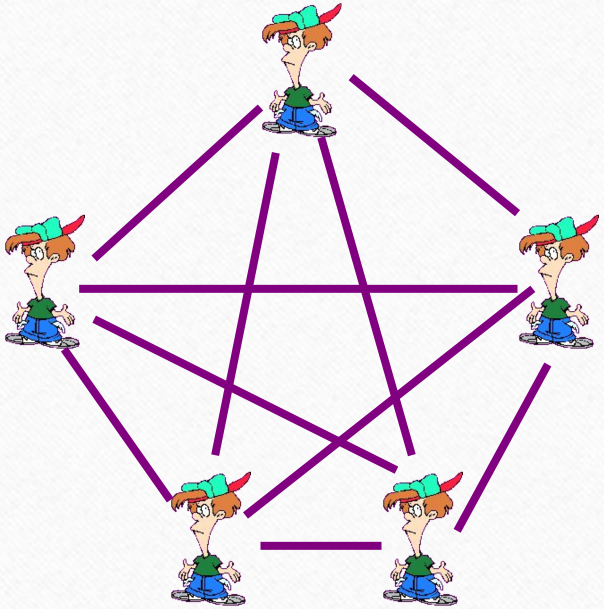
Ответ:15 чисел (5·3)

комбинаторика

ГРАФ – совокупность объектов со связями между ними. Объекты представляются как *вершины*, или *узлы графа*, а связи – как *дуги*, или *ребра*.



Пятеро друзей встретились после каникул и обменялись рукопожатиями. Каждый, здороваясь, пожал руку. Сколько всего было сделано рукопожатий?



Ответ:10 рукопожатий

Решите задачу, используя граф

Сколько различных завтраков, состоящих из 1 напитка и 1 вида выпечки, можно составить из **ч**ая, **к**офе, **б**улочки, **п**еченья и **в**афель?

ч

к

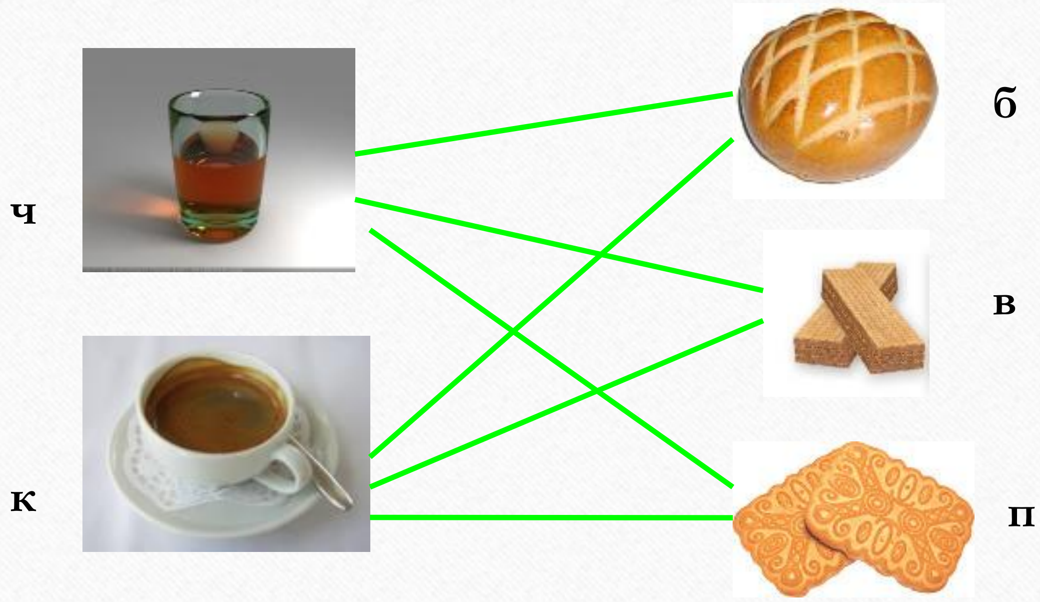
в

б

п

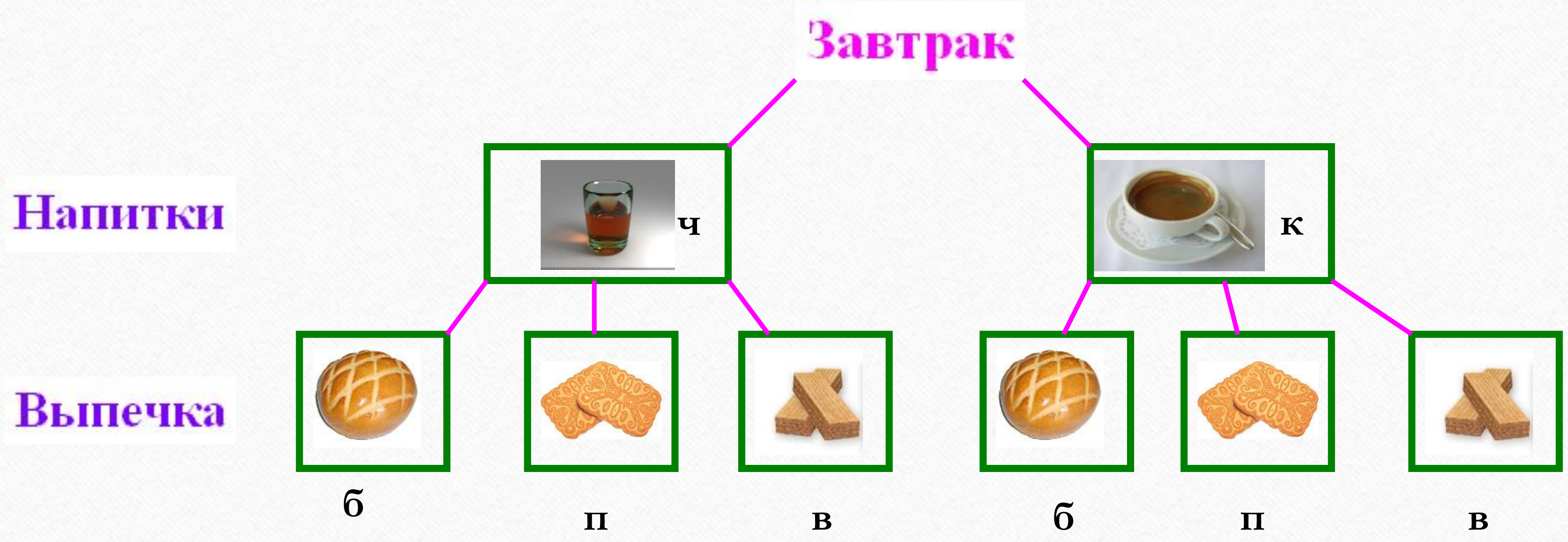
Приемы решения комбинаторных задач графы

напитки выпечка



6 завтраков

Эту же задачу можно решить, используя дерево возможных вариантов



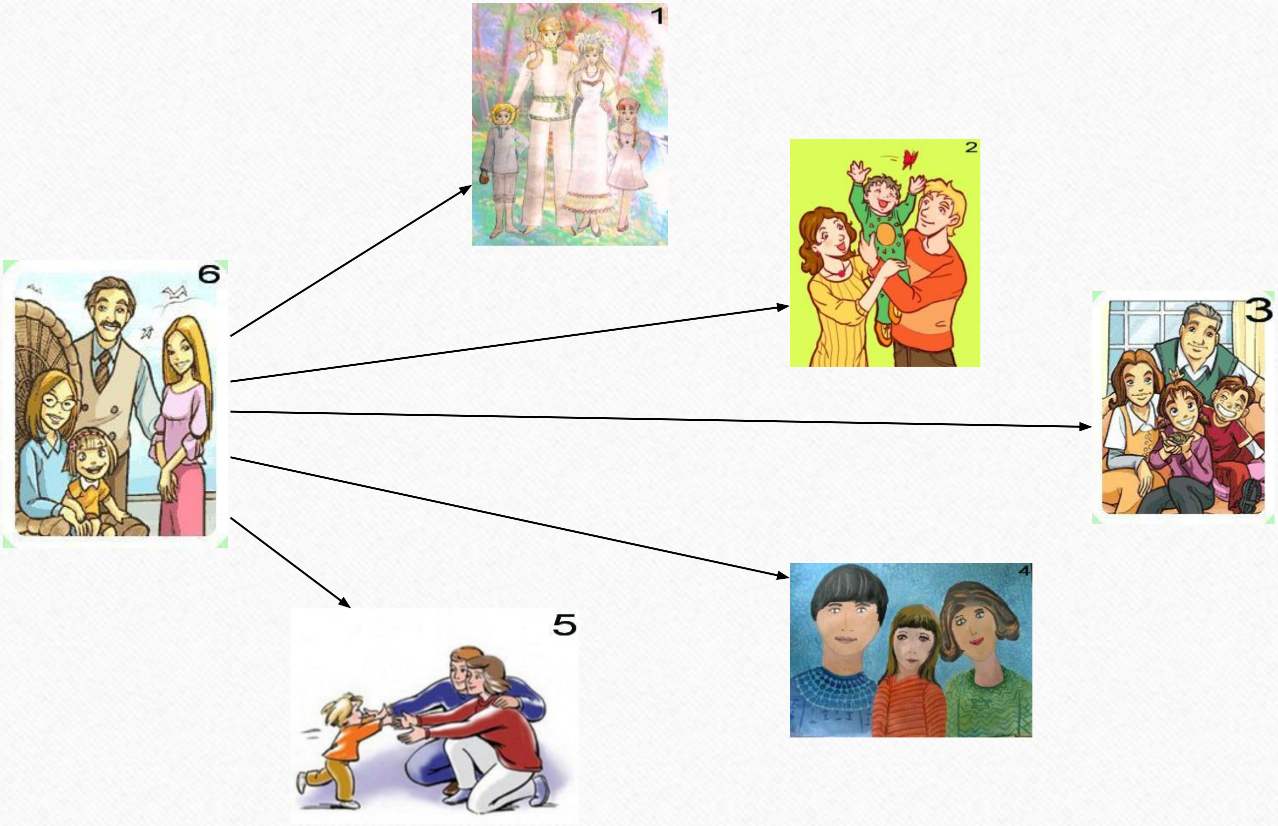
Решение задачи с помощью таблицы

Напитки Выпечка	 ч	 к
б 	б  ч	б  к
п 	п  ч	п  к
в 	в  ч	в  к

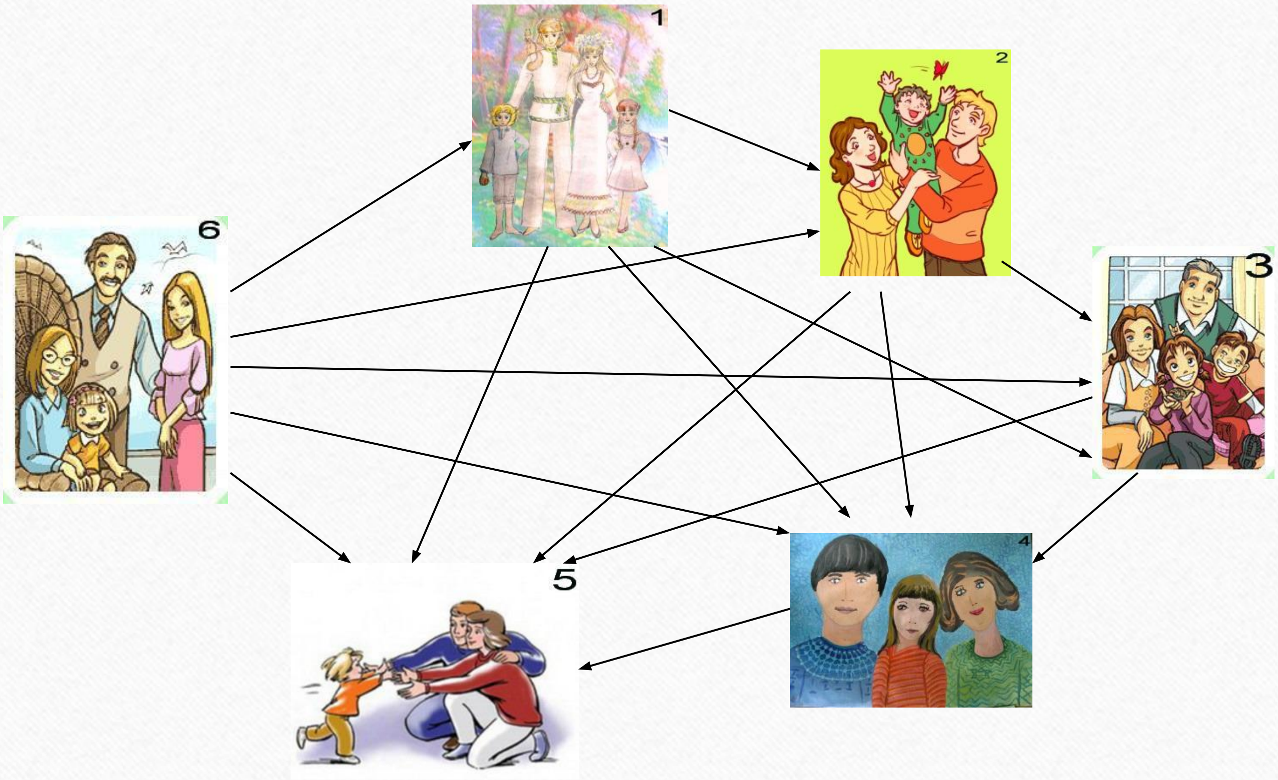
Решите задачу, используя граф

Шесть семей уехали отдыхать в разные города. Приехав к месту отдыха, они поговорили друг с другом по телефону. Сколько звонков было сделано?

Закончи построение графа, соответствующего данной задаче.



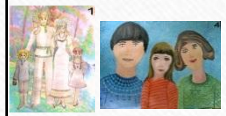
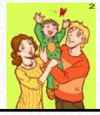
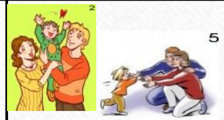
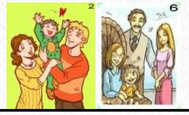
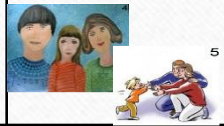
Приемы решения комбинаторных задач графы



<u>Ответ</u>:15 звонков

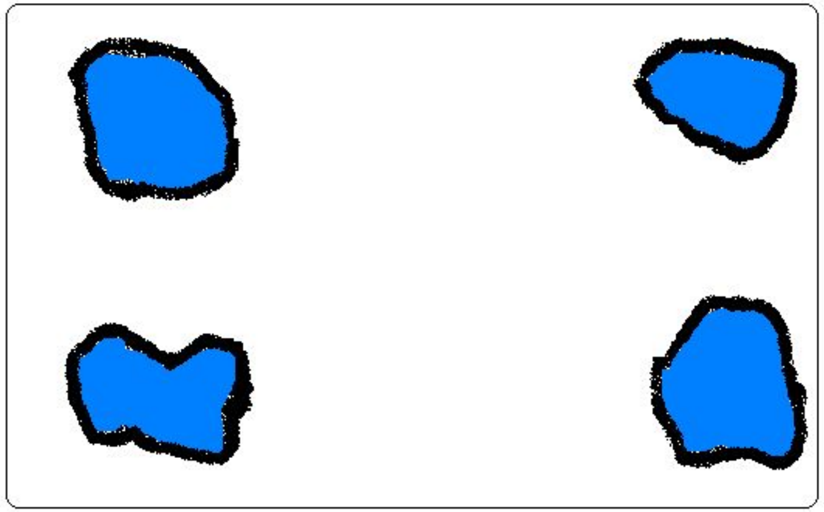
Приемы решения комбинаторных задач

задачи, решаемые с помощью таблиц

	1 	2 	3 	4 	5 	6 
1 	–					
2 	–	–				
3 	–	–	–			
4 	–	–	–	–		
5 	–	–	–	–	–	
6 	–	–	–	–	–	–

Ответ:15 звонков

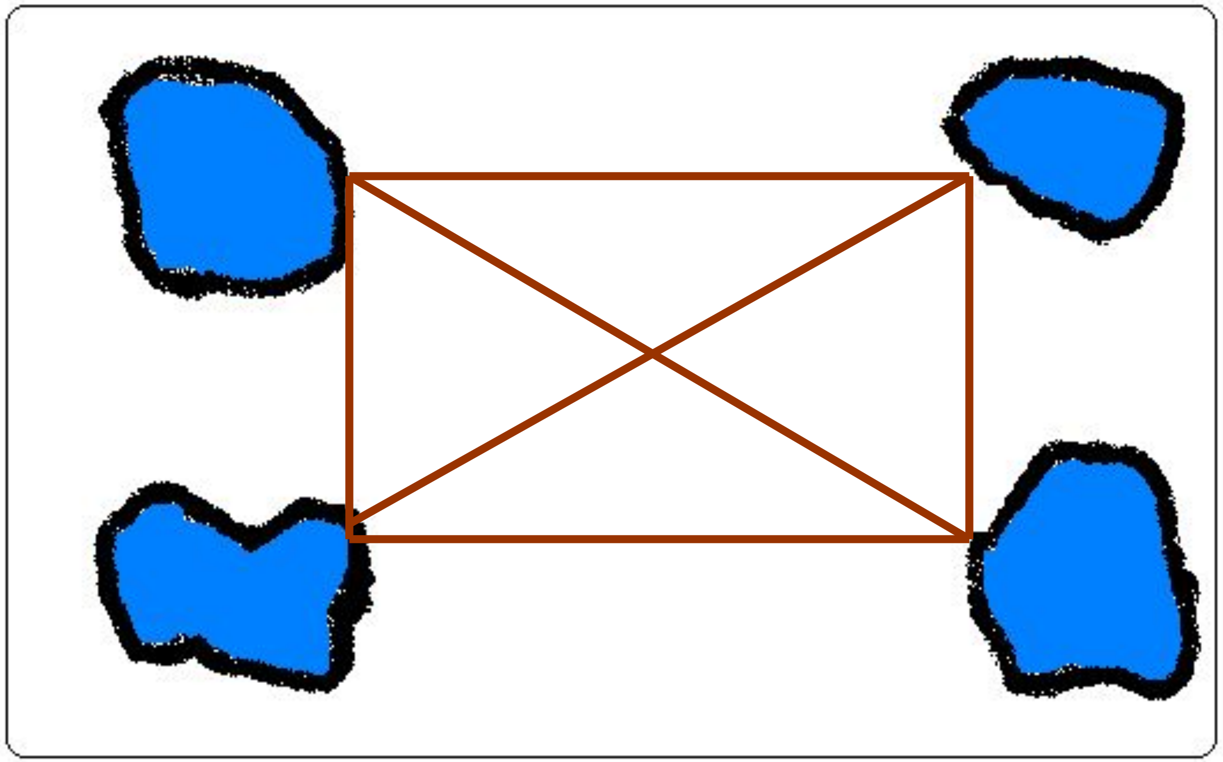
В парке 4 пруда. Было решено засыпать песком дорожки между ними так, чтобы можно было пройти от одного пруда к другому кратчайшим путем, т.е. не нужно было идти в обход.



Графы

Задание: покажи, какие дорожки надо сделать.

Решение



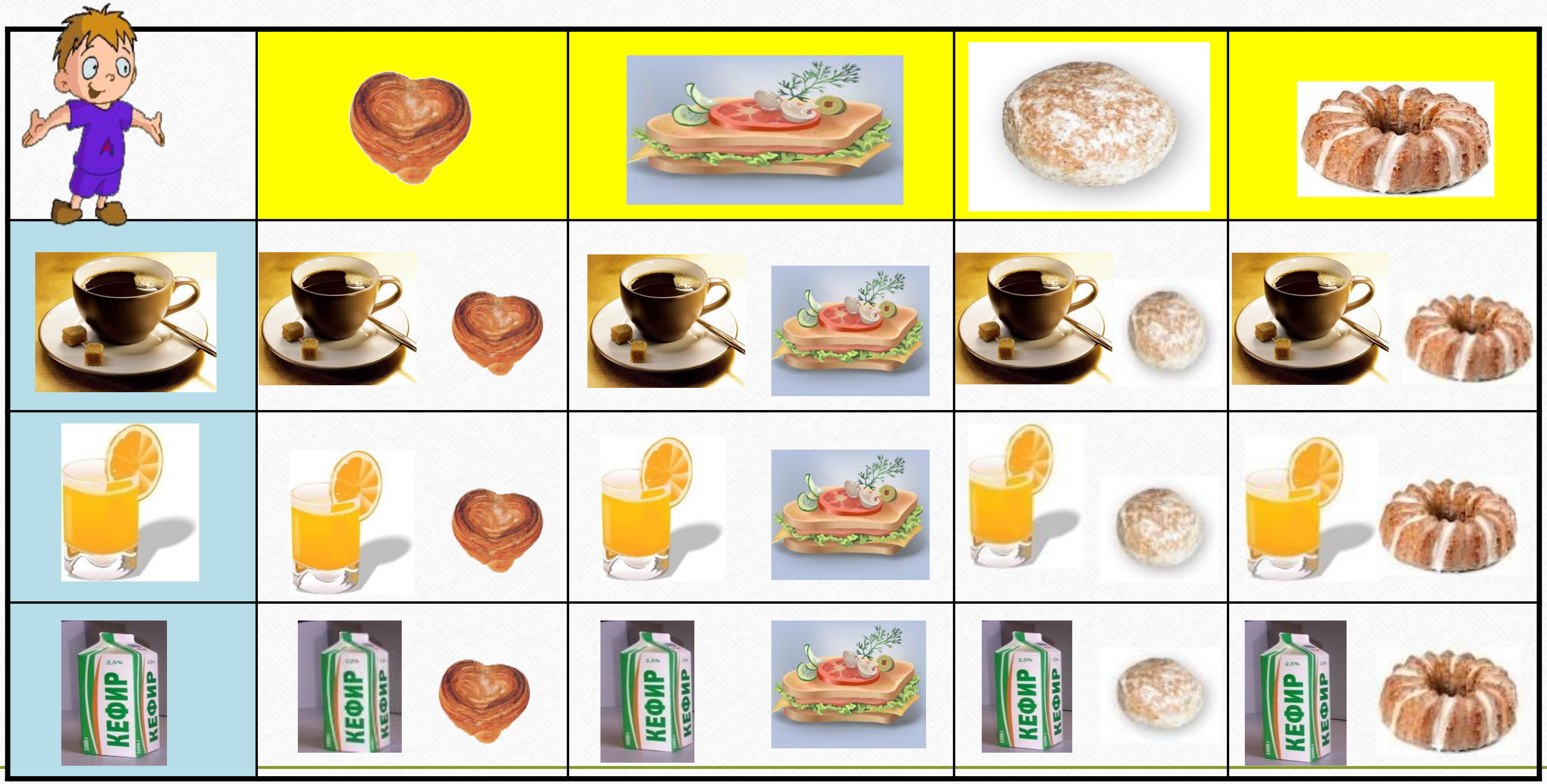
В танцевальном кружке занимаются пять девочек: Женя, Маша, Катя, Юля и Даша и
пять мальчиков: Олег, Вова, Стас, Андрей и Иван. Сколько различных танцевальных пар можно составить? Заполни таблицу.

Задачи, решаемые с помощью таблиц

	Женя	Маша	Катя	Юля	Даша
Олег	Олег Женя	Олег Маша	Олег Катя	Олег Юля	Олег Даша
Вова	Вова Женя	Вова Маша	Вова Катя	Вова Юля	Вова Даша
Стас	Стас Женя	Стас Маша	Стас Катя	Стас Юля	Стас Даша
Андрей	Андрей Женя	Андрей Маша	Андрей Катя	Андрей Юля	Андрей Даша
Иван	Иван Женя	Иван Маша	Иван Катя	Иван Юля	Иван Даша

Ответ: 25 пар

На завтрак Миша может выбрать: плюшку, бутерброд, пряник, или кекс, а запить он может: кофе, соком, кефиром. Сколько возможных вариантов завтрака?



Ответ:12 (4·3=12)

Тест «Комбинаторные задачи»

1) Сколькими способами можно расставить 3 различные книги на книжной полке?

а) 12 б) 6 в) 9 г) 4

2) В магазине "Все для чая" есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

а) 15 б) 8 в) 9 г) 12

3) Сколько двузначных чисел, все цифры которых различны, можно составить из цифр 0; 1 и 2?

а) 12 б) 4 в) 6 г) 24

4) Государственные флаги некоторых стран состоят из трёх горизонтальных полос разного цвета. Сколько существует различных вариантов флагов с белой, синей и красной полосой?

а) 3 б) 4 в) 9 г) 6

5) При встрече 4 школьника обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

а) 6 б) 8 в) 12 г) 4

Проверка !

1	2	3	4	5
б	а	б	г	а

Комбинаторные задачи.
3. Факториалы и перестановки.

Определение.

Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают n! и называют «эн факториал»: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$.

$2!= 1\cdot 2= 2$

$3!= 1\cdot 2\cdot 3= 6$

$4!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4= 24$

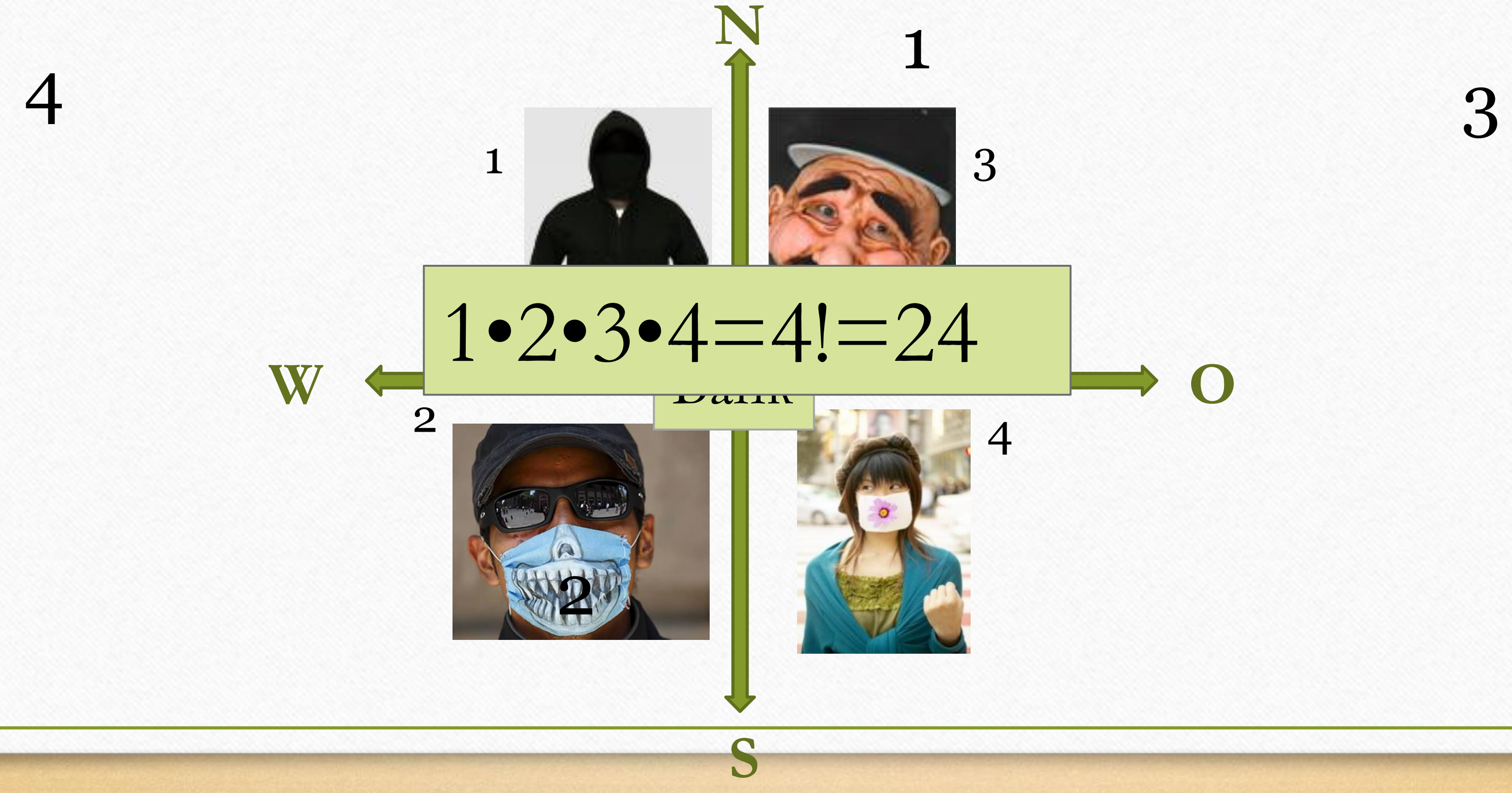
$5!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5= 120$

$6!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$

$7!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=5040$

Их разыскивает полиция…

Сколькими способами 4 вора могут по одному разбежаться на все 4 стороны.



$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24$

Расписание уроков.

В 9 классе в среду 7 уроков: алгебра, геометрия, литература, русский язык, английский язык, биология и физкультура. Сколько вариантов расписания можно составить?

Расставляем предметы по порядку

Предмет	Число вариантов
Алгебра	7
Геометрия	6
Литература	5
Русский язык	4
Английский язык	3
Биология	2
Физкультура	1

Всего вариантов расписания

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7! =$

$= 5040$

Перестановки и их число.

Определение.

Перестановкой называется множество из n элементов, записанных в определённом порядке.

Теорема о перестановках элементов конечного множества.

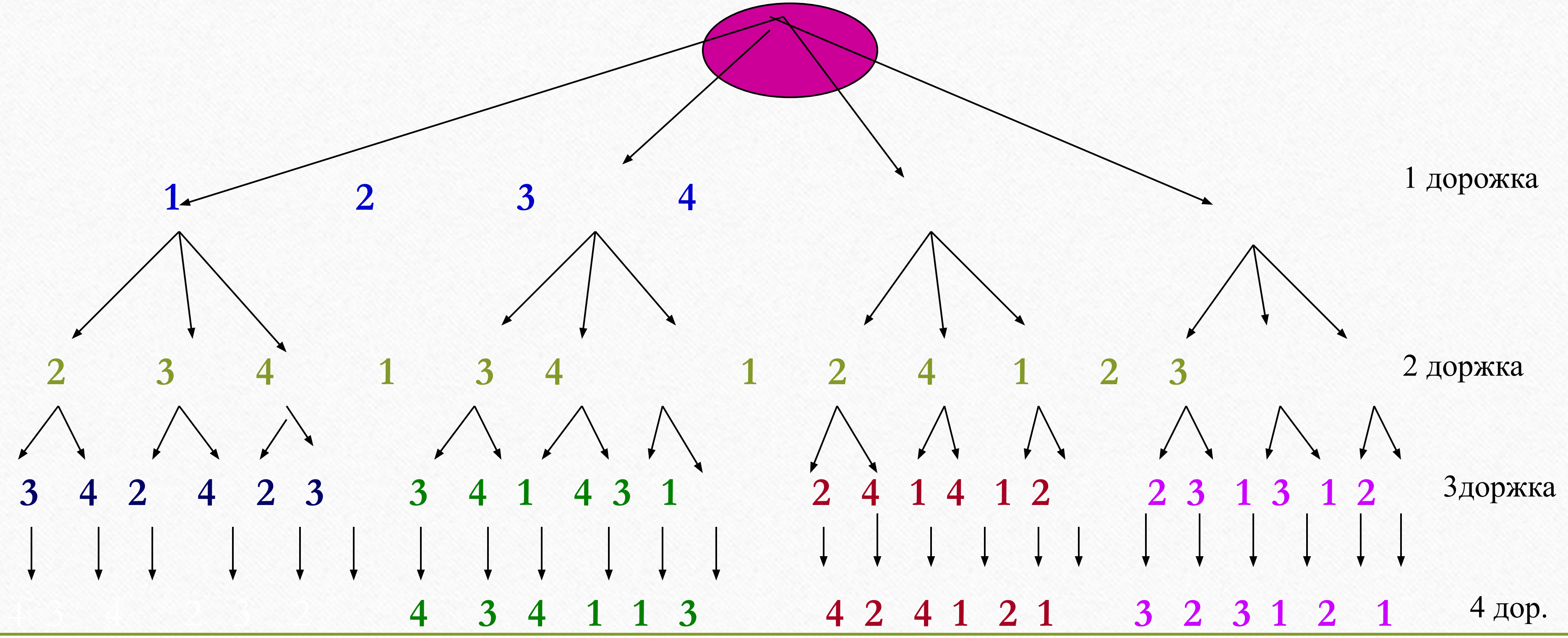
n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно n! способами.

$$P_n = n!$$

«Примеры решения комбинаторных задач: перебор вариантов, правило суммы, правило умножения».

1. Сколькими способами могут быть расставлены 4 участниц финального забега на четырёх беговых дорожках?

$P_n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа (перестановки из 4-х элементов)



Решено перебором вариантов

Перестановки

- Перестановкой из *n* - элементов называется комбинации, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов
- P_n - *число перестановок (P первая буква французского слова* ***permutation****- перестановка)*

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 = n!$$

$$P_n = n!$$

В математике принято считать $0! = 1$ и $1! = 1$

Размещения

- Пусть имеется 4 шара и 3 пустых ячейки. Обозначим шары буквами *a, b, c, d*. В пустые ячейки можно по разному разместить три шара из этого набора.
- Выбирая по-разному первый, второй и третий шары, будем получать различные <u>упорядоченные</u> тройки шаров

a	***b***	***c***

d	***b***	***c***

a	***c***	***b***

b	***a***	***c***

- Каждая <u>**упорядоченная**</u> тройка, которую можно составить из четырёх элементов называется <u>***размещением***</u> из четырёх элементов по три

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1)).$$

- Сколько же размещений можно составить из 4-х элементов (*abcd*) по три?

- **abc** **abd** **acb** **acd** **adb** **adc**
- **bac** **bad** **bca** **bcd** **bda** **bdc**
- **cab** **cad** **cba** **cbd** **cda** **cdb**
- **dab** **dac** **dba** **dbc** **dca** **dcb**

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

Решено перебором вариантов

$$\boxed{A_n^n = P_n = n!}$$

- Можно решить и не выписывая самих размещений:
- <u>*первый*</u> элемент можно выбрать четырьмя способами, так им может быть любой элемент из **четырёх**;
- для каждого первого <u>*второй*</u> можно выбрать **тремя** способами;
- для каждых первых двух можно **двумя** способами выбрать <u>*третий*</u> элемент из двух оставшихся.

Получаем $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Решено с использованием п р а в и л а у м н о ж е н и я

Сочетания

- Сочетанием из *n* элементов по *k* называют любое множество, составленное из *k* элементов, выбранных из *n* элементов

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

В отличии от размещений в сочетаниях <u>не имеет значение порядок элементов</u>. Два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом

Реши задачи:

1. На плоскости отмечено 5 точек.

Сколько получится отрезков, если соединить точки попарно?

$$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot(3!)}=\frac{3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=2\cdot5=10$$

2. На окружности отмечено n точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

$$C_n^3=\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots(n-3))}=\frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot2\cdot3}$$

Статистика: дизайн информации.

«Кто владеет информацией, тот правит миром» Ф. Бекон

- В век бесконечного потока информации крылатое выражение Ф. Бекона приобретает особый смысл. Мало владеть какой-то информацией, её нужно правильно использовать. Но часто информация трудна для восприятия: она не наглядна, занимает много места, никак не упорядочена и т.д. А значит, она не может принести пользу. Единственный разумный выход – преобразовать первоначальную информацию. Значительную часть подобного преобразования берёт на себя статистика.
- Статистика — отрасль знаний, в которой излагаются общие вопросы сбора, измерения и анализа массовых статистических (количественных или качественных) данных.
- Научимся способам первоначальной обработке информации.

Задача

В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 15, 14.

Обработайте эти данные.

Обработать данные – значит:

- упорядочить;
- группировать;
- составить таблицы распределения;
- построить график распределения;
- составить паспорт данных.

Что такое статистика?

Статистика – получение, обработка, анализ и публикация информации, характеризующей количественные закономерности жизни в обществе в неразрывной связи с их количественным содержанием.

Энциклопедический словарь.

Статистика- дизайн информации.

Задачи статистики:

1) обработка информации;

2) получение и хранение информации;

3)выработка различных прогнозов;

4)оценка достоверности прогнозов и т.д.

Статистические методы обработки информации:

1) Упорядочение и группировка измерений.

2)Составление таблиц распределения данных.

3)Построение графиков распределения данных.

4)Получение «паспорта» данных измерения, в котором собраны основные числовые характеристики полученной информации.

1. Группировка информации

Упорядочение.

В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14.

Обработайте эти данные.

Наименьшая сумма баллов равна 12 (за 4 экзамена получены «3»), наибольшая сумма – 20 (4 экзамена по «5»).

Суммы от 12 до 20 составляют **полный ряд данных.** Один из результатов измерения называется его **вариантой.**

Расположим варианты по возрастанию:

12, 13, 13, 14, 14, 14, 16, 16, 16,17, 17, 18, 19, 19, 20.

У 50 рабочих городского предприятия попросили оценить время, которое они в среднем тратят на проезд от дома до работы. Получились следующие данные в минутах (с точностью до 10 минут).

20	100	20	30	40	50	30	80	90	40
30	50	20	50	30	30	50	60	60	50
30	40	60	50	100	60	90	10	20	50
90	80	20	40	50	10	50	40	30	40
60	120	30	40	60	20	60	10	50	60

2)Заявлено ли время более 180 минут?

Группировка.

В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: <u>20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14.</u>

Обработайте эти данные.

Наименьшая сумма баллов равна 12 (за 4 экзамена получены «3»), наибольшая сумма – 20 (4 экзамена по «5»).

Суммы от 12 до 20 составляют **полный ряд данных.** Один из вариантов измерения называется его **вариантой.**

Ряд данных	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Подсчёт вариант	/	//	///		///	//	/	//	/

Зачем?

Если среди всех данных конкретного измерения одна варианта встретилась ровно *K* раз, то число *K* называют **<u>кратностью</u>** этой варианты.

Кратность	1	2	3	0	3	2	1	2	1

Общий ряд данных.

Общий ряд данных - это ряд всех значений измерения, заключённых в промежутке от наименьшего возможного до наибольшего возможного значений.

Измерение	*Общий ряд данных*
Время проезда (мин)	*10, 20, 30,…, 170, 180*

Выпишем общий ряд данных в измерениях

4)Начальные буквы в первой строке стихотворения.

2)1 3)0,1; 0,2 4)1, 2, 3,… 28, 29, 30. ; 15. 011.

Ряд данных измерения.

Ряд данных измерения- это ряд из всех его вариант.

Измерение	Общий ряд данных	Ряд данных

20	100	20	30	40	50	30	80	90	40
30	50	20	50	30	30	50	60	60	50
30	40	60	50	100	60	90	10	20	50
90	80	20	40	50	10	50	40	30	40
60	120	30	40	60	20	60	10	50	60

а, б, в, г, д, е, ё, з, и ,к, л, м, н, о, р, с, т, у, ч, ы, ь.

Группировка данных измерения.

Сгруппированный ряд данных.

3 4 6 5 10 6 9 1 2 5

1,1,2,…,2, 3,…,3, 4,…,4, 5,…,5, 6,…,6, 8,8,8, 9, 9, 10, 10, 12

6 8 7 10 8

1, 2 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

2. Табличное представление информации.

Таблицы распределения.

В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14.

Обработайте эти данные.

Наименьшая сумма баллов равна 12 (за 4 экзамена получены «3»), наибольшая сумма – 20 (4 экзамена по «5»).

Суммы от 12 до 20 составляют **полный ряд данных.** Один из вариантов измерения называется его **вариантой.**

Ряд данных	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Кратность	1	2	3	0	3	2	1	2	1

Таблица, в которой записаны варианты и их кратности, называется **таблицей распределения**.

Чтобы составить таблицы распределения, удобно сначала упорядочить или сгруппировать данные.

Таблица распределения частот.

В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14.

Обработайте эти данные.

Количество всех измерений (в задаче их 15) называют **объёмом измерения.**

Частотой варианты называют частное от деления кратности варианты на объём измерения.

Ряд данных	12	13	14	16	17	18	19	20	сумма
Кратность	1	2	3	3	2	1	2	1	15
Частота	1/15	2/15	1/5	1/5	2/15	1/15	2/15	1/15	1

Таблица, в которой записаны варианты, их кратности и их частоты, называется **таблицей распределения частот**.

Чтобы составить таблицы распределения частот, необходимо сначала вычислить кратности вариант.

Таблица распределения частот в процентах.

В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14.

Обработайте эти данные.

Количество всех измерений (в задаче их 15) называют **объёмом измерений.**
Частотой варианты называют частное от деления кратности варианты на объём измерения.

Можно выразить это частное в **процентах**.

Ряд данных	12	13	14	16	17	18	19	20	сумма
Кратность	1	2	3	3	2	1	2	1	15
Частота	1/15	2/15	1/5	1/5	2/15	1/15	2/15	1/15	1
Частота, %	6,7	13,3	20	20	13,3	6,7	13,3	6,7	100

Чтобы составить таблицы распределений частот в процентах, необходимо сначала вычислить кратности вариант и их частоты.

2)Табличное представление информации.

Таблица распределения данных

$$1,1,\underbrace{2,\ldots,2}_{6},\ \underbrace{3,\ldots,3}_{8},\ \underbrace{4,\ldots,4}_{7},\ \underbrace{5,\ldots,5}_{10},\ \underbrace{6,\ldots,6}_{8},\ 8,8,8,\ 9,\ 9,\ 10,\ 10,\ 12$$

Вариан-та	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	*Сум-ма*
Крат-ность	3	6	8	7	10	8	3	2	2	1	50

<u>Объём измерения</u> - сумма всех кратностей или количество всех данных измерения.

Частота варианты измерения.

Частотой варианты называется отношение её кратности к объёму измерения.

Таблица распределения частот измерения.

Варианта	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	*Сумма*
Кратность	3	6	8	7	10	8	3	2	2	1	50
Частота	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,06	0,04	0,04	0,02	1
Частота, %	6	12	16	14	20	16	4	6	4	2	100

3. Графическое представление информации.

График распределения.

В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14.

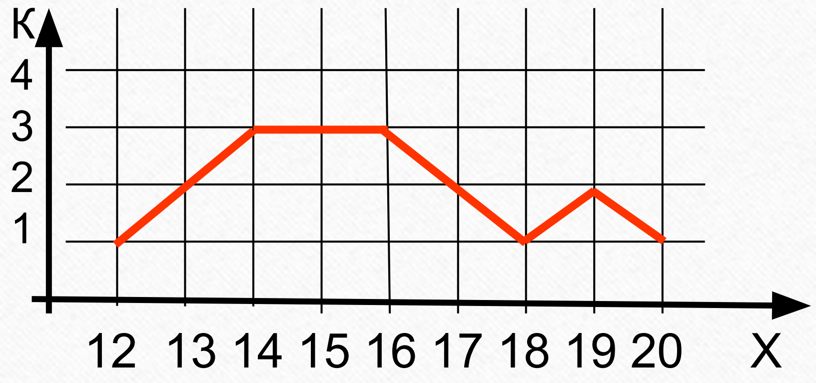
Обработайте эти данные.

Ряд данных	12	13	14	16	17	18	19	20	сумма
Кратность	1	2	3	3	2	1	2	1	15
Частота	1/15	2/15	1/5	1/5	2/15	1/15	2/15	1/15	1
Частота, %	6,7	13,3	20	20	13,3	6,7	13,3	6,7	100%

Для наглядности удобно использовать графическое представление информации.

Если по оси Х отметить варианты, по оси У – кратность, то получим ломаную, которая называется **полигоном (или многоугольником) распределения данных.**

Полигон распределения данных.



Полигон частот.

В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14.

Обработайте эти данные.

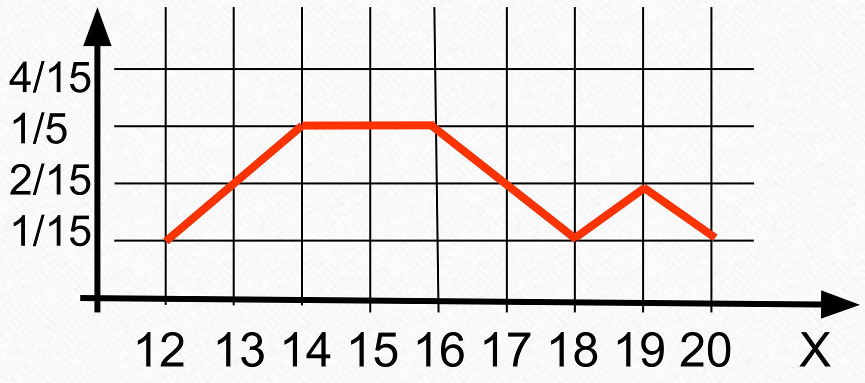
Ряд данных	12	13	14	16	17	18	19	20	сумма
Кратность	1	2	3	3	2	1	2	1	15
Частота	1/15	2/15	1/5	1/5	2/15	1/15	2/15	1/15	1
Частота, %	6,7	13,3	20	20	13,3	6,7	13,3	6,7	100%

Для наглядности удобно использовать графическое представление информации.

Если по оси X отметить варианты, по оси У – частоты, то получим ломаную, которая называется полигоном частот.

Возможно построение полигона частот в процентах.

Полигон частот.



Гистограммы.

В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14.

Обработайте эти данные.

Ряд данных	12	13	14	16	17	18	19	20	сумма
Кратность	1	2	3	3	2	1	2	1	15

При графическом представлении данных часто используют **гистограммы,** или **столбчатые диаграммы.**

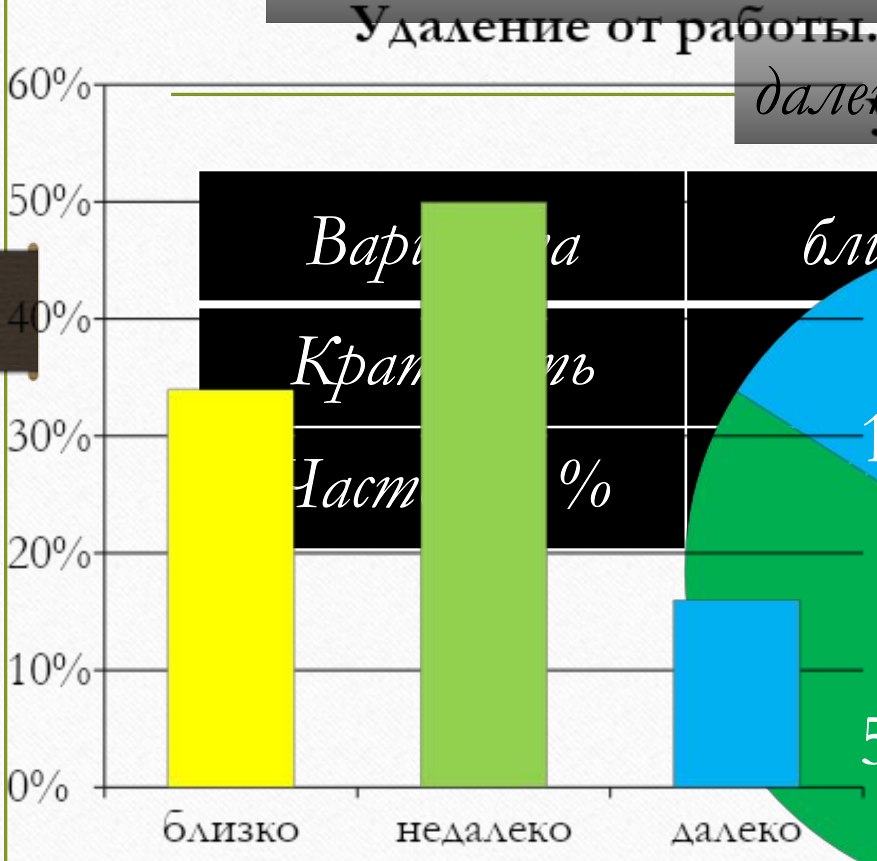
Метод приближённой группировки данных.

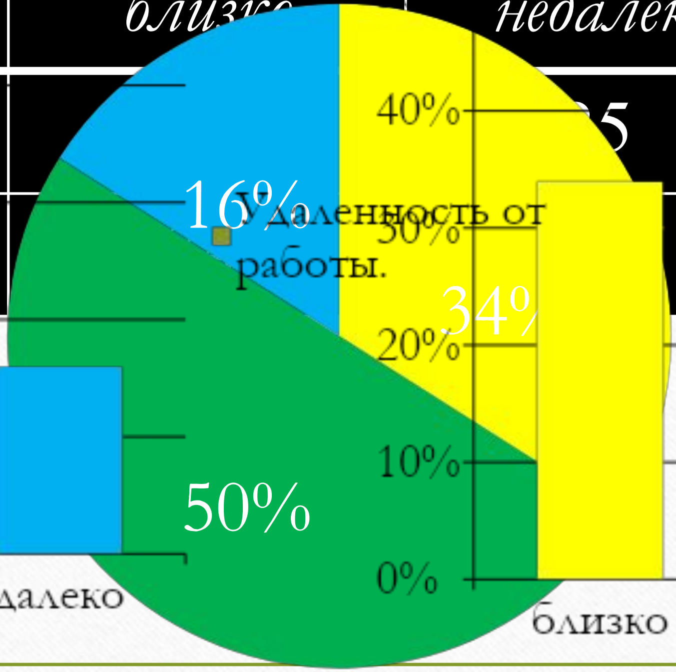
Близко- от 10 до 30 мин,

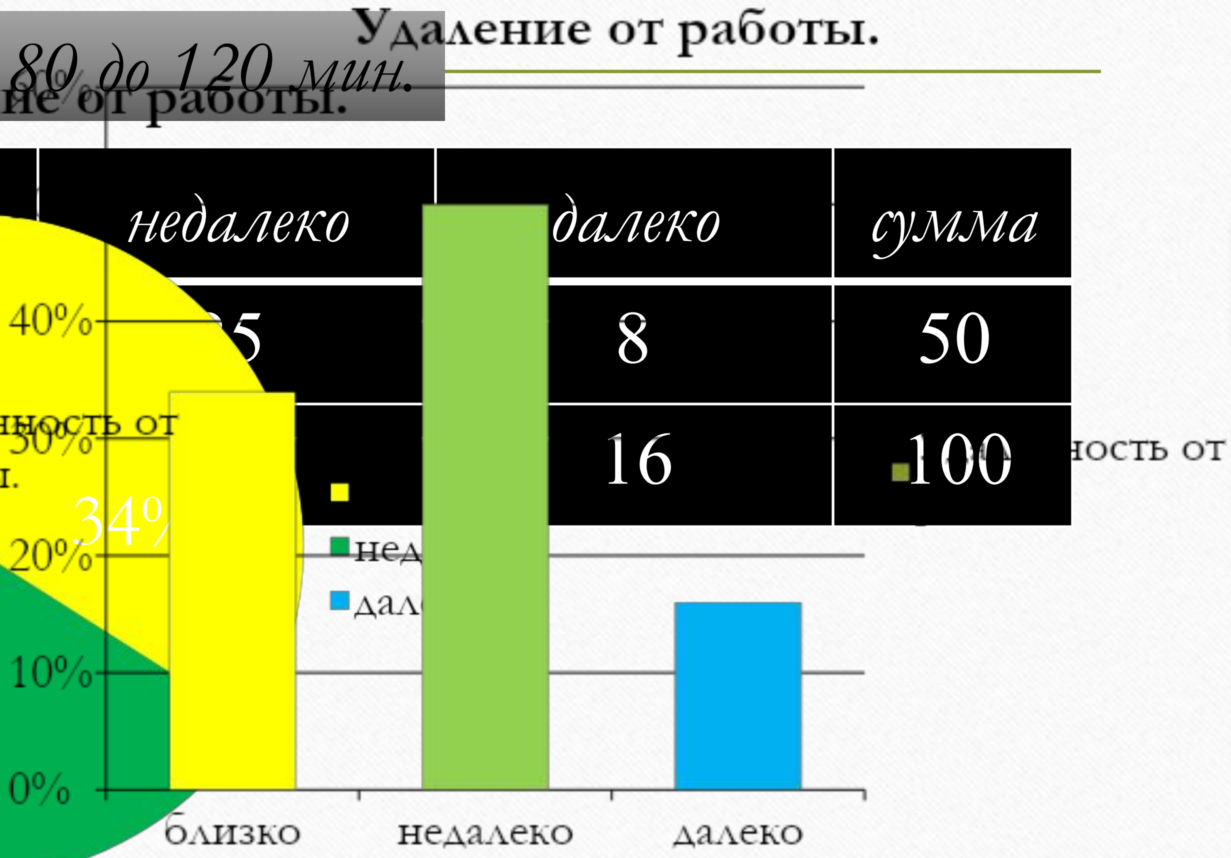
недалеко- от 40 до 60 мин,

далеко- от 80 до 120 мин.

Вари[illegible]а	*близк[illegible]*	*недалеко*	*[illegible]далеко*	*сумма*
Крат[illegible]ть	[illegible]	[illegible]5	8	50
[illegible]аст[illegible] %	[illegible]	[illegible]	16	100







4. Числовые характеристики данных измерения.

Паспорт данных по таблице распределения.

В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14.

Обработайте эти данные.

Паспорт данных состоит из набора числовых характеристик:

размах (размах – это разность между максимальной и минимальной вариантами);

мода (мода – это та варианта, которая встречалась чаще других, та, у которой наибольшая кратность);

медиана (после упорядочения по возрастанию медиана – это варианта, стоящая в середине, если вариант нечётное количество, и среднее арифметическое двух средних вариант, если вариант чётное количество);

среднее значение (среднее арифметическое значений вариант).

С помощью таблицы распределения по кратности

Ряд данных	12	13	14	16	17	18	19	20	сумма
Кратность	1	2	3	3	2	1	2	1	15

Размах: $R = 20 – 12 = 8$

Мода: $Mo_1 = 14$, $Mo_2 = 16$

Медиана: $Me = 16$ (искать не удобно)

Среднее: $(12*1+13*2+14*4+16*3+17*2+18*1+19*2+20*1)/15 \approx 15,9$

Паспорт данных по упорядоченному ряду.

В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14.

Обработайте эти данные.

Паспорт данных состоит из набора числовых характеристик:
размах (размах – это разность между максимальной и минимальной вариантами);
мода (мода – это та варианта, которая встречалась чаще других, та, у которой больше кратность);
медиана (после упорядочения по возрастанию медиана – это варианта, стоящая в середине, если вариант нечётное количество, и среднее арифметическое двух средних вариант, если вариант чётное количество);
среднее значение (среднее арифметическое значений вариант).

С помощью упорядоченного ряда данных:
12, 13, 13, 14, 14, 14, 16, 16, 16,17, 17, 18, 19, 19, 20.

Размах: $R = 20 – 12 = 8$. Мода: $Mo_1 = 14$, $Mo_2 = 16$. Медиана: $Me = 16$.

Среднее: $(12+13+13+14+14+14+16+16+16+17+17+18+19+19+20) /15 \approx 15,9$.

Некоторые числовые характеристики по графику распределения.

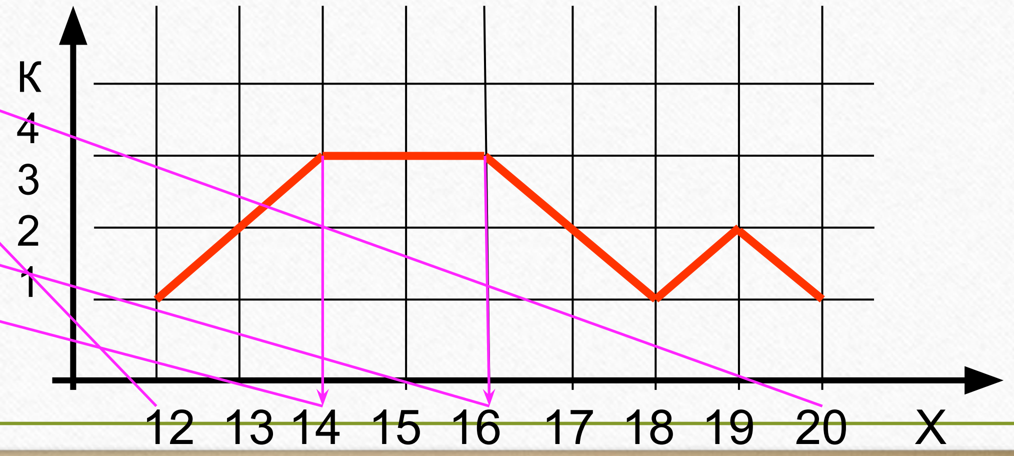
В 2009-2010 учебном году девятиклассники нашей школы сдали по 4 выпускных экзамена, набрав в сумме такие количества баллов: 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14. Обработайте эти данные.

Паспорт данных включает характеристики:
размах (размах – это разность между максимальной и минимальной вариантами);
мода (мода – это та варианта, которая встречалась чаще других, та, у которой наибольшая кратность).

Полигон распределения данных.

Размах: $R = 20 - 12 = 8$, длина области определения графика распределения.

Мода: $Mo_1 = 14$, $Mo_2 = 16$, - самые высокие точки графика распределения.



Продавец записывал вес арбузов, которые продавал, округляя до целых. Запись выглядит так:

6 5 6 7 8 6 9 8 4 10 5 6 5 6 9 6 10 12 7 10 9 4 8 6 9 10 4 5 9 8 12 9.

Найти объём измерения, составить таблицы распределения, построить график распределения данных, составить паспорт данных.

Проверка

Объём измерения (количество вариант) – 32.

Таблица распределения

Варианта	4	5	6	7	8	9	10	12
Кратность	**3**	**4**	**7**	**2**	**4**	**6**	**4**	**2**
Частота	3/32	1/8	7/32	1/16	1/8	3/16	1/8	1/16
Частота ,%	9,3	12,5	22	6,2	12,5	18,8	12,5	6,2

Таблица распределения

Варианта	4	5	6	7	8	9	10	12
Кратность	**3**	**4**	**7**	**2**	**4**	**6**	**4**	**2**

R = 12 – 4 = 8

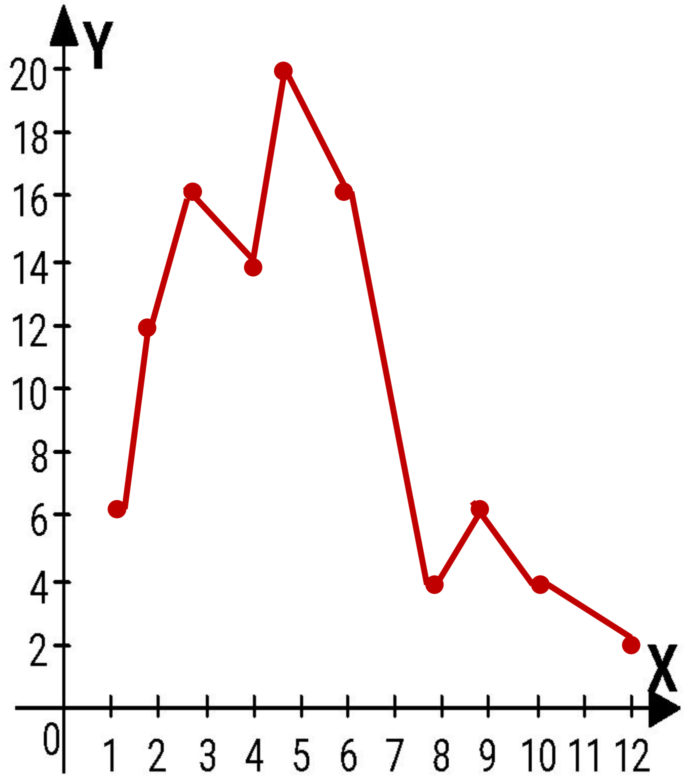
Mo = 6

Me = (7+8)/2 = 7,5

Среднее значение:
(4*3+5*4+6*7+7*2+8*4+9*6+10*4+12*2)/32=7,4

Медианой измерения называется варианта, которая стоит в ряду данных, расположенных по возрастанию, *в середине*, если количество вариант нечётно.

В случае чётности количества вариант медиана равна *среднему арифметическому двух средних* вариант ряда данных.



5, 6

12дес.-1дес.=11дес.

Мода измерения

(И)-50мин.

Медиана измерения равна (5+6):2=5,5

<u>Средним значением данных</u> называется их среднее арифметическое.

Таблица распределения частот измерения.

Вариан-та	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	Сум-ма
Часто-та	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,04	0,06	0,04	0,02	1

Для нахождения среднего значения можно:

1)каждую варианту умножить на её частоту;

2)сложить все полученные произведения.

На вступительном письменном экзамене по математике можно получить от 0 до 10 баллов. Сорок абитуриентов получили такие оценки:

6	7	7	8	9	2	10	6	5	6
7	3	7	9	9	2	3	2	6	6
6	7	8	8	2	6	7	9	7	5
9	8	2	6	6	3	7	7	6	6

а)Составить общий ряд данных и ряд данных измерения (Э); упорядочить и сгруппировать полученные оценки.

б)Составить таблицы распределения данных и распределения частот.

в)Построить графики распределения данных и распределения частот.

г)Найти размах, моду, среднее значение и медиану.

Решение задания а).

а)Составить общий ряд данных и ряд данных измерения (Э); упорядочить и сгруппировать полученные оценки.

Измерение (Э)	*Ряд данных измерения(Э)*
Экзаменационные оценки	2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Сгруппированный ряд данных.

$$\underbrace{2,\ldots,2}_{5},\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ \underbrace{6,\ldots,6}_{11},\ \underbrace{7,\ldots,\ 7}_{9},\ \underbrace{8,\ldots,8}_{4}\ \underbrace{9,\ldots,\ 9}_{5},\ 10$$

Решение задания б).

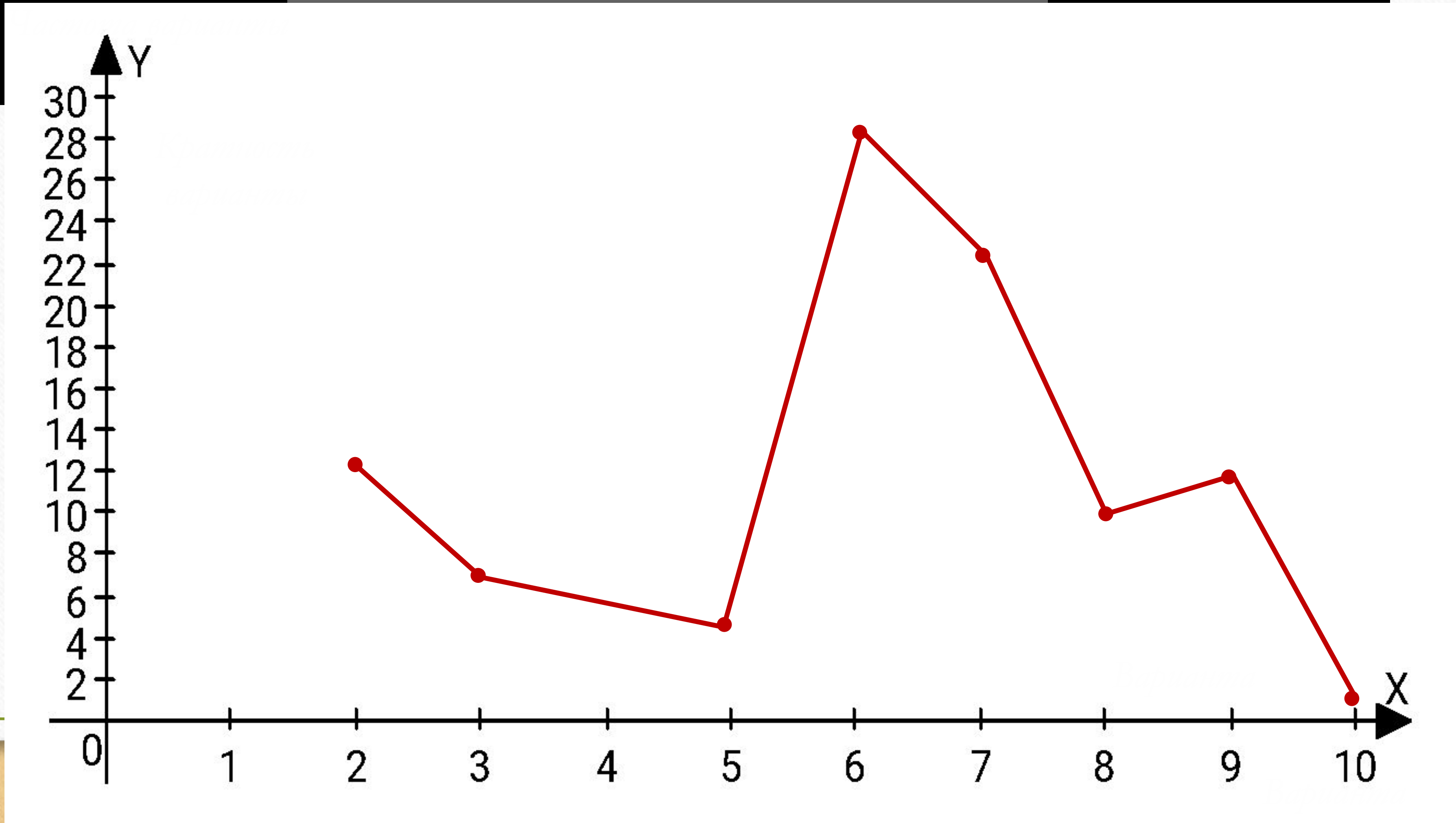
Таблица распределения данных и частот.

Вариан-та	2	3	5	6	7	8	9	10	*Сумма*
Крат-ность	5	3	2	11	9	4	5	1	40
Частота	0,125	0, 075	0,05	0,275	0,225	0,1	0,125	0,025	1
Частота %	12,5	7,5	5	27,5	22,5	10	12,5	2,5	100

Решение задания в).

в) пост… ределения

Полигон распределения частот (%).



Решение задания г).

г)Найти размах измерения, моду, среднее значение и медиану.

Размах измерения равен 10-2=8

Мода равна 6

Среднее статистическое значение

$$(2\cdot5+3\cdot3+5\cdot2+6\cdot11+7\cdot9+8\cdot4+9\cdot5+10\cdot1):40$$

$$245:40=6{,}125$$

Медиана равна (6+7):2=6,5

5. Дисперсия.

Отклонением от среднего называют разность между рассматриваемым значением случайной величины и средним значением всей совокупности

Задача

- На место токаря претендуют двое рабочих. Для каждого из них установили испытательный срок, в течение которого они должны были изготовить одинаковые детали. Результаты работы претендентов представлены в таблице:

День недели	Дневная выработка	
	1 рабочего (Х)	11рабочего (У)
Понедельник	52	61
Вторник	54	40
Среда	50	55
Четверг	48	50
Пятница	46	44

Средняя производительность труда рабочих одинаковая 50 дет. \ день

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего		Квадраты отклонений	
Понедельник	52	61	2	11	4	121
Вторник	54	40	4	-10	16	100
Среда	50	55	0	5	0	25
Четверг	48	50	-2	0	4	0
Пятница	46	44	-4	- 6	16	36
Сумма	250	250	0	0	40	282

Сумма квадратов отклонений от среднего у первого рабочего меньше чем у второго, значит первый рабочий имеет более стабильную производительность труда

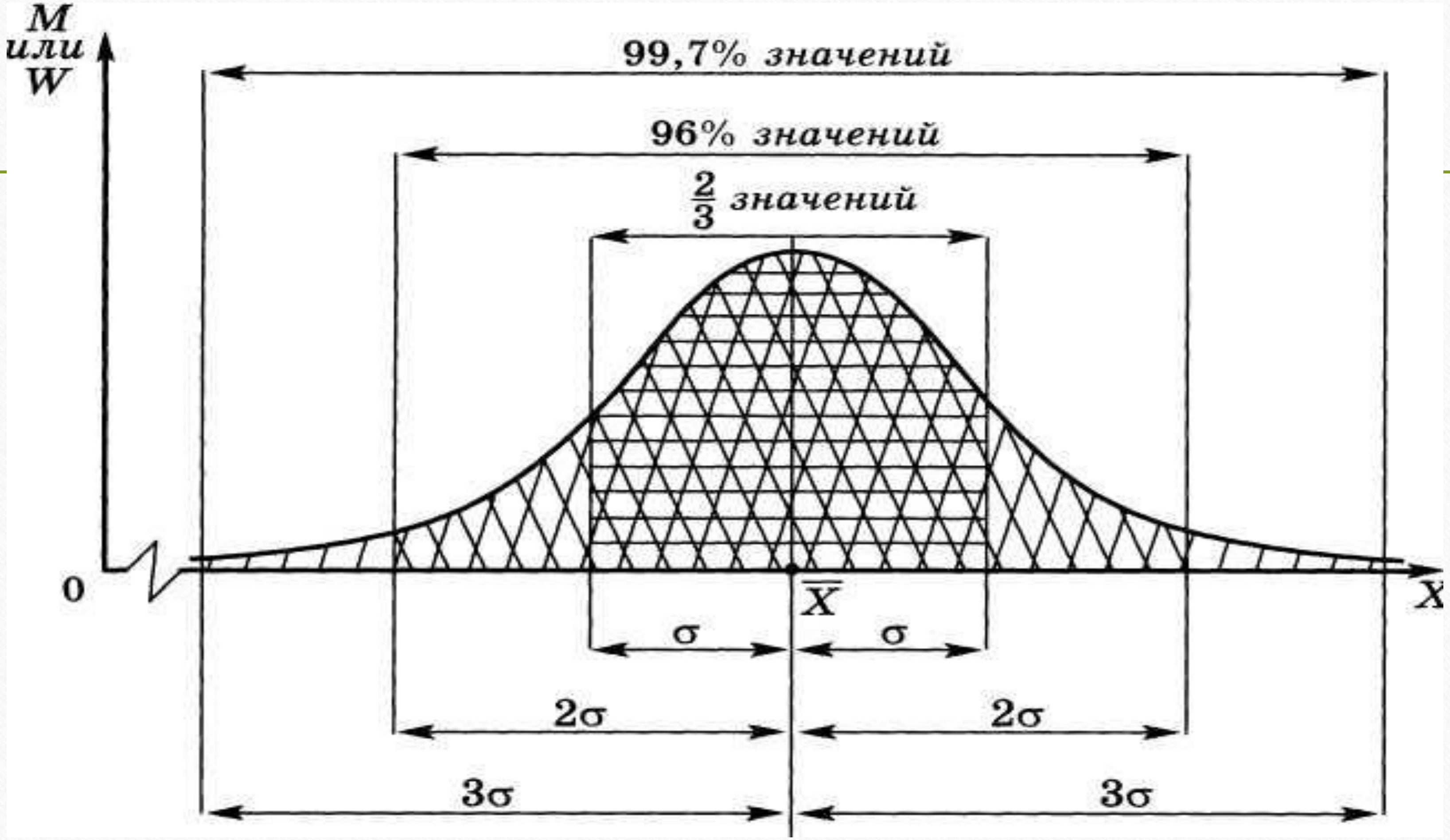
Дисперсия

- Среднее арифметическое суммы квадратов отклонений от среднего называется дисперсией (dispersus)

Корень квадратный из дисперсии называют *средним квадратичным отклонением* и обозначают σ

$$\sigma = \sqrt{D}$$

Правило трех сигм



Правило трех сигм

- ~68% (2\3) всех значений нормально распределенной случайной величины имеют отклонения от среднего по абсолютной величине не превосходящие σ;
- ~96% всех значений – не превосходящие 2σ;
- ~99,7% всех значений – не превосходящие 3σ.

Применение правила трех сигм

ЗАДАЧА.

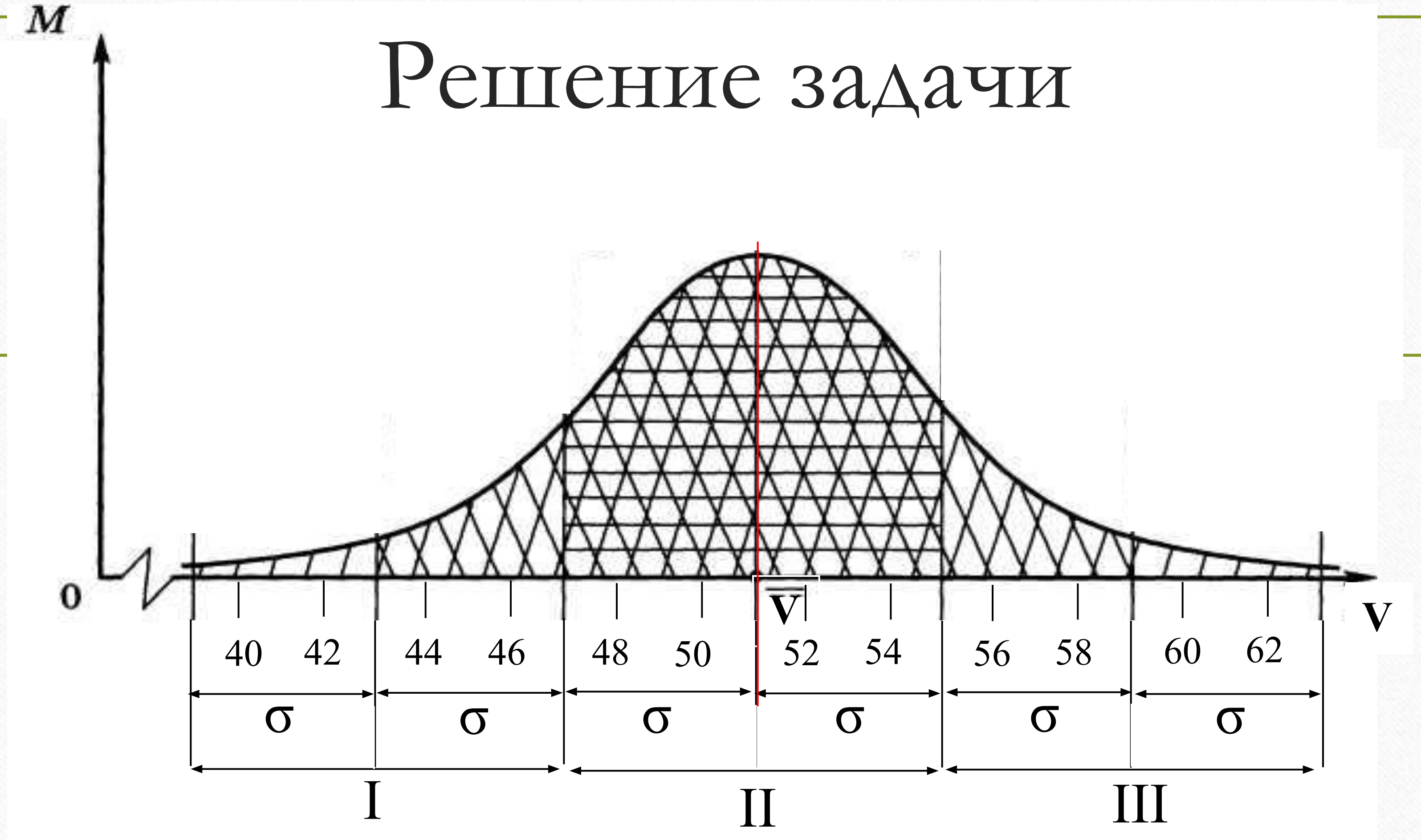
N=600 спортсменов

V от 40 до 62 размера

Условные I, II, III размеры

Сколько маек каждого из трех условных размеров следует шить?

Решение задачи



II: N*2/3 = 600*2/3 = 400

I и III: (600-400)/2 = 100

Простейшие вероятностные задачи.

Основные понятия

Познание действительности в естественных науках происходит в результате испытаний (эксперимента, наблюдений, опыта).

Испытанием или опытом называется осуществление какого-нибудь определенного комплекса условий, который может быть воспроизведено сколь угодно большое число раз.

Случайным (СС)называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта).

Таким образом, событие рассматривается как результат испытания.

Пример.

Бросание монеты – это испытание.

Появление орла при бросании – событие.

Основные понятия

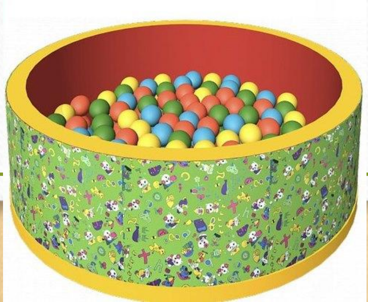
Наблюдаемые нами события различаются по степени возможности их появления и по характеру их взаимосвязи.

Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.

Пример. Получение студентом положительной или отрицательной оценки на экзамене есть **событие достоверное**, если экзамен протекает согласно обычным правилам.

Событие называется ***невозможным***, если оно не может произойти в результате данного испытания.

Пример. Извлечение из урны белого шара, в которой находятся лишь цветные (небелые) шары, есть **событие невозможное**.



Два или несколько событий называются ***равновозможными*** в данном испытании, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным или менее возможным, чем другие.

Пример. При одном бросании одной и той же игральной кости появление 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков - все это **события равновозможные**.

Два события называются ***несовместными*** в данном испытании, если появление одного из них исключает появление другого, и ***совместными*** в противном случае.

Пример. В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Берем на удачу одну деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. Эти **события несовместные**.

События А и В называются ***противоположными***, если всякое наступление события А означает ненаступление события В.

Обозначение:

А -событие А

$\bar{A}$ - событие противоположное событию А (читается «не *А*»).

Пример. Попадание и промах при одном выстреле по цели - события противоположные.

ИТАК…

Случайное событие (СС) *- это событие, которое либо произойдёт, либо нет.*

Каждое случайное событие (СС) иметь свою ***вероятность*** *произойти (сбыться, реализоваться).*

Испытание – *любое действие, которое может привести к одному или нескольким результатам.*

Исход *- конечный результат испытания. Значит испытание может иметь один или несколько исходов.*

Благоприятный исход *- желаемый исход.*

1. Подсчёт вероятностей.

- **Решение различных задач по комбинаторике и теории вероятности**

2. Классическое определение вероятности.

- Простейшие вероятностные задачи

3. События и множества.

СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

- **Определение:**

Некоторое событие (А,В,С,..) называют <u>случайным</u> по отношению к данному опыту, если при осуществлении этого опыта оно либо происходит , либо не происходит.

- **Примеры:**
- ***Выпадение орла при подбрасывании монеты.***
- ***Выпадение шестёрки при бросании игральной кости.***
- ***Выигрыш по данному лотерейному билету.***
- ***Выход из строя электролампы в течение определённого отрезка времени.***

ДОСТОВЕРНОЕ СОБЫТИЕ

- **Определение:**

Событие U называют <u>достоверным,</u> если оно обязательно наступает в результате данного опыта.

- **Примеры:**
- *Извлечение из урны , где лежат белые шары, белого шара.*
- *Выпадение одного из чисел от 1 до 6 при бросании игральной кости игральной кости.*

Невозможное событие

- **Определение:**

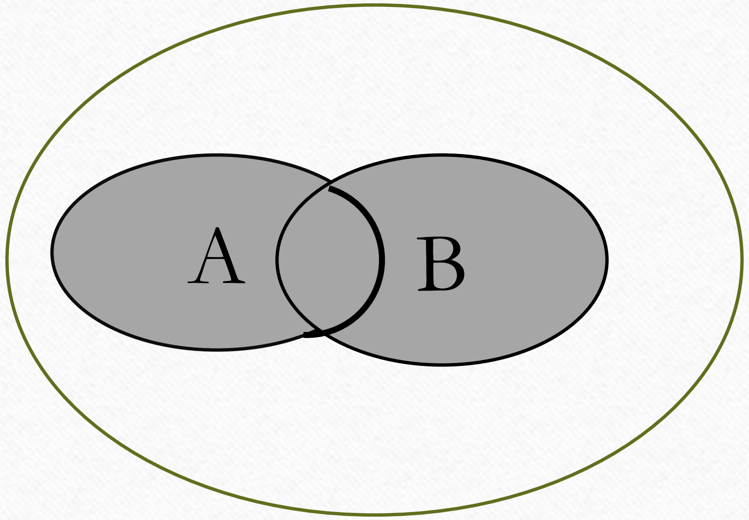
Событие V называется <u>невозможным</u>, если оно заведомо не может произойти в результате данного опыта.

- **Примеры:**
- Выпадение числа 7 при бросании игральной кости.
- Извлечение черного шара из урны с белыми шарами.

- При одном бросании игральной кости могут появиться числа 1,2,3,4,5,6. Каждое из этих событий *случайно*, т.к. оно может произойти, а может не произойти. Тот факт, что выпадет одно из чисел 1,2,3,4,5,6,- *достоверное* событие, т.к. при бросании кости оно обязательно произойдет.
- Рассмотренные события *несовместны* (появление одного из их исключает появление другого), *единственно возможны* (обязательно появится одно из чисел) и *равновозможны* (у всех чисел шансы появиться одинаковы).

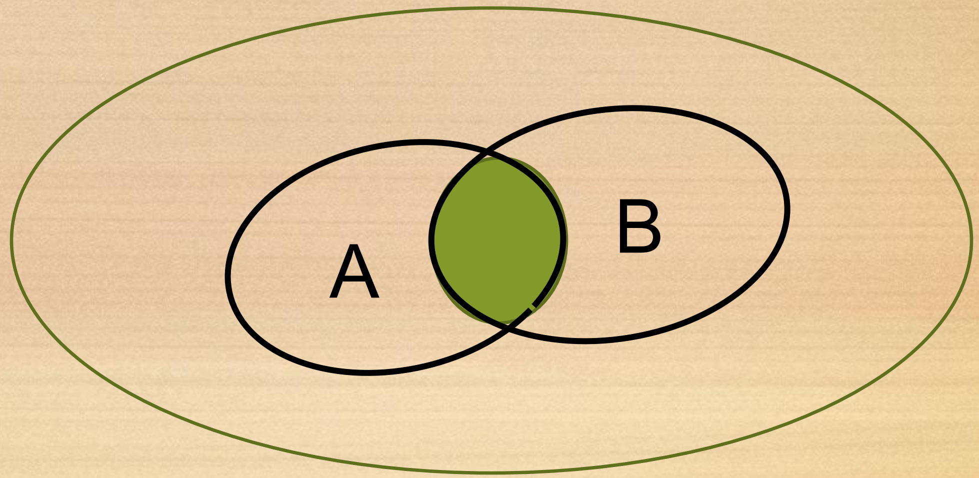
Комбинации событий

- **Суммой (*объединением*) событий А и В** называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий.

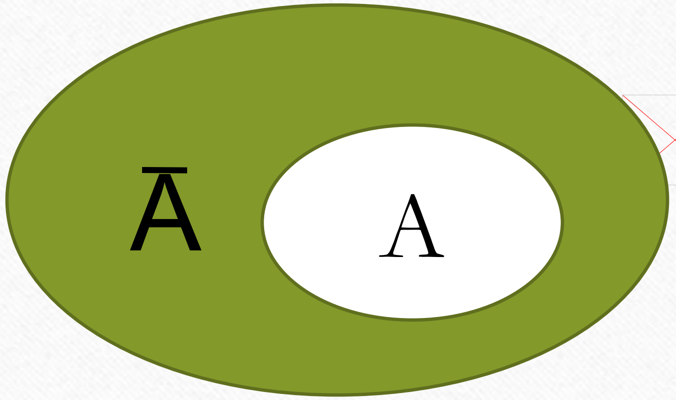


- А+В (или А $\cup$ В)

- **Произведением событий А и В** называется событие, которое считается наступившим тогда и только тогда, когда наступают оба события А и В. Произведение А и В обозначают АВ (или $A \cap B$).



- ***События А и В называют равносильными (равными)*** и пишут А=В, если событие А происходит тогда и только тогда, когда происходит событие В.
- ***Противоположное для А событие*** $\overline{A}$, которое считается наступившим тогда и только тогда, когда А не наступает.



ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

- Определение:

Вероятностью Р(А) события А в опыте с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию А, к числу всех исходов.

- n- число всех исходов
- m – число благоприятных

исходов

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

- События и множества.

4. Вероятность и геометрия.

- Вероятность и геометрия.

Экспериментальные данные и вероятности событий.

- Полученные из практики величины являются статистическими данными, а вероятность случайного события — моделью реальных ситуаций. Значительно или нет отличается абстрактная модель от практической ситуации? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим понятие **статистической устойчивости**:

если серии испытаний производятся в одних и тех же условиях, то при большом количестве независимых испытаний частота появления случайного события колеблется около некоторого постоянного числа. Это явление называют статистической устойчивостью, а указанное число — статистической вероятностью события.

Частота появления события отлична от вероятности события для каждого определённого числа повторений опыта.

- Явление статистической устойчивости обеспечивает тот факт, что с возрастанием количества повторений опыта вероятность заметного отличия частоты события от его вероятности стремится к нулю. Этот вид устойчивости характерен в случаях, когда подбрасываем монетки, вытаскиваем карты, бросаем игральные кости (кубики) и ждём выпадения конкретного числа очков и для большей части случайных событий.

  Благодаря явлению статистической устойчивости соединяются проводимые в реальности, эмпирические испытания с теоретическими моделями этих испытаний.

- Так, в истории известны случаи, когда авторство литературатурного произведения подтверждали по частоте употребления в нём оборотов речи, слов и букв.

Статистическая устойчивость показывает, что при осуществлении большого числа повторений испытания рассчитанная частота почти совпадёт с неизвестной нам вероятностью наступления события А. Следовательно, подсчитанная частота примерно равна вероятности события А.

Необходимо чётко уяснить, что частота наступления определяется для реальных событий, а вероятность — для теоретической модели этих событий.

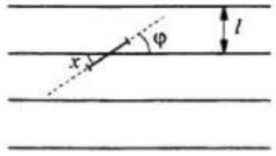
Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу практически произведённых испытаний. Таким образом, относительная частота события A определяется формулой: $W(A) = \frac{m}{n}$, где m — число появлений события, n — общее число испытаний.

Число, к которому стремится устойчивая относительная частота, называется статистической вероятностью этого события: $P(A) \approx W(A)$.

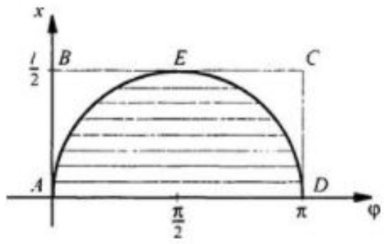
- *Пример 1*
- Разумно предположить, что вероятность выпадения орла при бросании монеты равна 0,5. Однако при небольшом числе бросаний это может и не проявиться. Например, при пяти бросаниях орел может выпасть все пять раз (а может и ни разу). Вместе с тем при очень большом числе бросаний орел выпадает примерно в половине случаев. Так в XVIII в. при бросании монеты 4040 раз орел выпал 2048 раз (вероятность 0,5069); в конце XX в. при бросании 10 000 раз - 4979 раз (вероятность 0,4979).
- Таким образом, при неограниченном увеличении числа независимых повторений одного и того же опыта в одинаковых условиях частота появления определенного результата случайного события приближается к некоторому постоянному числу. Это явление называют *статистической устойчивостью*, а указанное число - *статистической вероятностью события*.
- Результат каждого бросания монеты является случайным событием и непредсказуем. Однако явление статистической устойчивости гарантирует, что с увеличением числа повторений опыта частота события стремится к его вероятности.
- Отметим, что статистическая вероятность позволяет определять фундаментальные *математические постоянные*, например, число π.

Пример 2

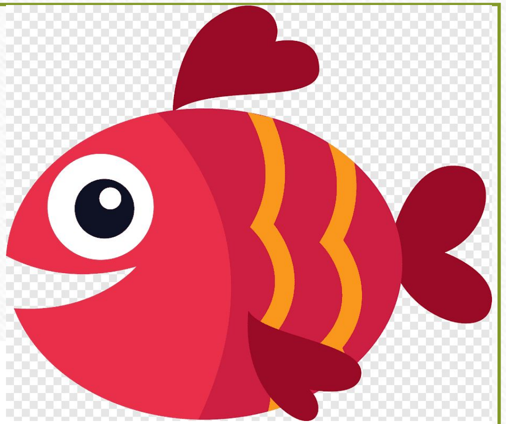
Рассмотрим известную задачу Ж. Бюффона (1707-1788). Пусть расстояние между параллельными прямыми и длина иглы равны l. Найдем вероятность того, что случайным образом брошенная игла пересечет какую-нибудь прямую.



Будем характеризовать положение иглы расстоянием x от середины иглы до ближайшей прямой и углом φ между иглой и прямой. Очевидно, что $0 \le x \le \frac{l}{2}$ и $0 \le \varphi \le \pi.$ Если игла пересекает прямую, то выполняется неравенство $0 \le x \le \frac{l}{2}\sin\varphi.$ Построим прямоугольник ABCD, который задается неравенствами $0 \le x \le \frac{l}{2}$ и $0 \le \varphi \le \pi,$ а также фигуру AED, определяемую неравенством $0 \le x \le \frac{l}{2}\sin\varphi.$ Используя понятие геометрической вероятности, получим, что вероятность пересечения иглой одной из прямых равна $P = \frac{S_{AED}}{S_{ABCD}}.$ Найдем эти площади: $S_{ABCD} = \frac{\pi l}{2},\ S_{AED} = l$ (эту величину можно найти только с помощью интегрирования). Получаем: P = 2/π, откуда π = 2/P.



Заметим, что такие эксперименты проводились. Так в 1850 г. при 5000 бросаний было получено π = 3,1596, в 1985 г. при 1120 бросаниях - π = 3,1419, в 1901 г. при 3408 бросаниях - π = 3,1416. Напомним, что точное значение π = 3,1415... . Таким образом, число я было найдено с очень высокой точностью.

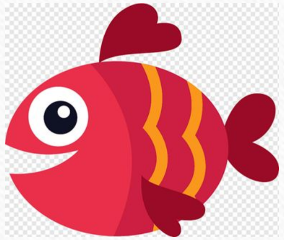


Пример 3

Как приближенно посчитать число рыб в озере?

Пусть в озере плавает x рыб. Бросаем сеть и отлавливаем n рыб. Вероятность поймать одну рыбу $P=\frac{n}{x}$. Пометим этих рыб и выпустим в озеро. Через несколько дней в ту же погоду, в том же месте ставим ту же сеть. Предположим, что поймали m рыб, из них k меченых. Меченую рыбу поймали с вероятностью $P=\frac{k}{m}$. Получаем равенство: $\frac{n}{x}=\frac{k}{m}$, откуда $x=\frac{nm}{k}$. Разумеется, точность такого эксперимента будет невысокой, но для оценки числа рыб в озере вполне допустима.

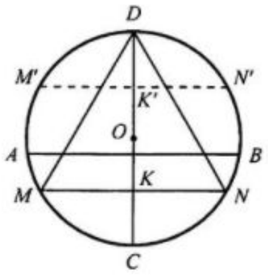
Заметим, что при решении задач по теории вероятностей важнейшее значение имеет понятие “*случайным образом*”.



Пример 4

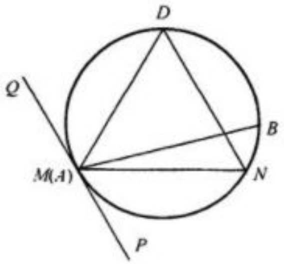
Обсудим парадокс Ж. Бертрана (1822-1900). Рассмотрим окружность и вписанный в нее правильный треугольник. Возьмем произвольную хорду окружности и найдем вероятность того, что эта хорда больше стороны треугольника. Парадокс состоит в том, что при разных способах решения будут получены разные ответы.

Первый способ. Пусть проведена хорда AB. Построим диаметр CD, перпендикулярный этой хорде. Также параллельно хорде AB построим сторону MN правильного вписанного треугольника MNDи прямую M'N', симметричную стороне MN относительно центра O окружности. Хорды AB, которые пройдут через точки отрезка KK' диаметра CD, будут длиннее MN.



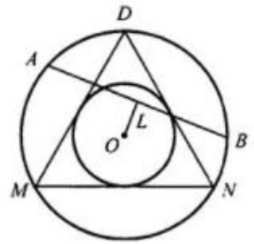
Легко показать, что $CK = \frac{1}{4}CD$ и $KK' = \frac{1}{2}CD.$ Разумно считать, что вероятность рассматриваемого события $P = \frac{KK'}{CD} = \frac{1}{2}$ (первый ответ).

Второй способ. Совместим один конец A хорды A B с вершиной M правильного треугольника MND. Хорды AB, которые попадают во внутреннюю часть угла DMN = 60°, будут больше стороны MNтреугольника.



Разумно считать, что все хорды, которые можно провести через точку M, равномерно распределены по углу QMP = 180°. Тогда вероятность рассматриваемого события $P = \frac{\angle DMN}{\angle QMP} = \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{3}$ (второй ответ).

Третий способ. Положение хорды AB можно характеризовать положением ее середины L. Если точка L будет расположена внутри окружности, вписанной в треугольник MND, то хорда AB будет больше стороны MV. Радиусы вписанной r и описанной R окружностей различаются в два раза, т. е. R = 2r. Тогда вероятность рассматриваемого события равна отношению площадей таких окружностей, т. е. $P = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$ (третий ответ).



Таким образом, в зависимости от способа решения получили три разных ответа: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. Разные результаты получили потому, что по-разному трактовалось понятие проведения хорды случайным образом. Фактически каждый раз решалась новая задача. Нам только казалось, что это одна и та же задача.