Тема: «Интеграл. Определенный интеграл. Свойства. Примеры. Применение определенного интеграла для нахождения длин, площадей и объемов».

Выполнила:

Студентка 10 группы 1 курса
Трухина Кристина

Определение интеграла

Интеграл - одно из важнейших понятий математического анализа, которое возникает при решении задач о нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, и тому подобных, а также в задаче о восстановлении функции по её производной (*неопределённый интеграл*). Упрощённо интеграл можно представить как аналог суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых. В зависимости от пространства, на котором задана подынтегральная функция, интеграл может быть — *двойной*, *тройной*, *криволинейный*, *поверхностный* и так далее; также существуют разные подходы к определению интеграла — различают интегралы *Римана*, *Лебега*, *Стилтьеса* и другие

Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Выполним следующие операции:

1) разобьем $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{i-1}, x_i]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$;

2) в каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots n$, выберем произвольную точку и вычислим значение функции в этой точке: $f(z_i)$;

3) найдем произведения $f(z_i) \cdot \Delta x_i$, где – длина частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots n$;

4) составим интегральную сумму функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

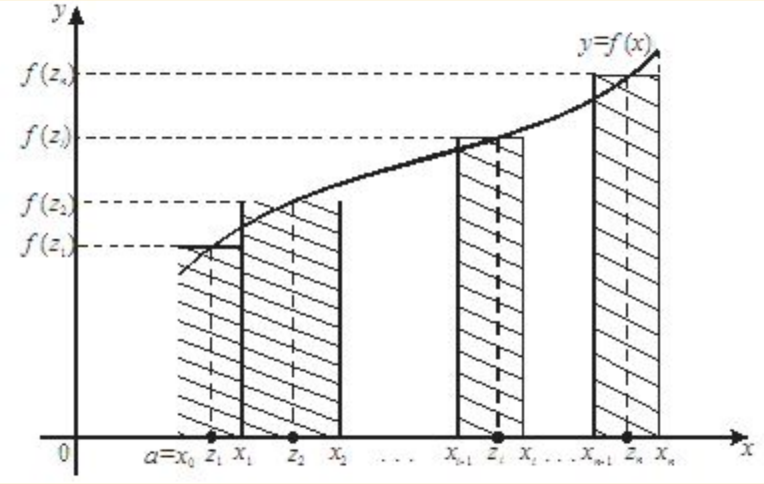
$$\sigma = f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \ldots + f(z_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Понятие определенного интеграла

С геометрической точки зрения эта сумма σ представляет собой сумму площадей прямоугольников, основания которых – частичные отрезки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{i-1}, x_i]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, а высоты равны $f(z_1)$, $f(z_2)$, ..., $f(z_n)$ соответственно (рис. 1). Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка:

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i ;$$

5) найдем предел интегральной суммы, когда $\lambda \to 0$.



Понятие определенного интеграла

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы (1) и он не зависит ни от способа разбиения отрезка [*a*, *b*] на частичные отрезки, ни от выбора точек z_i в них, то этот предел называется **определенным интегралом** от функции *y* = *f*(x) на отрезке [*a*, *b*] и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i .$$

В этом случае функция *f*(x) называется **интегрируемой** на [*a*, *b*]. Числа *a* и *b* называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, *f*(x) – подынтегральной функцией, *f*(x)*dx* – подынтегральным выражением, *x* – переменной интегрирования; отрезок [*a*, *b*] называется промежутком интегрирования.

Понятие определенного интеграла

Теорема 1. Если функция *y* = *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*, *b*], то она интегрируема на этом отрезке.
Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Если *a* > *b*, то, по определению, полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Основные свойства определенного интеграла

1. Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt = \dots.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Основные свойства определенного интеграла

4. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $a < b < c$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. (**теорема о среднем**). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка , такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Пример решений

Пример 1

Вычислить определенный интеграл

Решение:

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы

Появившуюся константу целесообразно отделить от и вынести за скобку.

Пример решений

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница

Сначала подставляем в верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

<u>Пример 2</u>

Вычислить определенный интеграл

Решение:

Пример решений

(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница:

Вычисление длин дуг с помощью определённого интеграла

Если [illegible] - параметрические уравнения гладкой кривой, то длина ее дуги равна [illegible] , где [illegible] и [illegible] - производные функций [illegible] и [illegible] соответственно, по параметру [illegible].

[illegible]

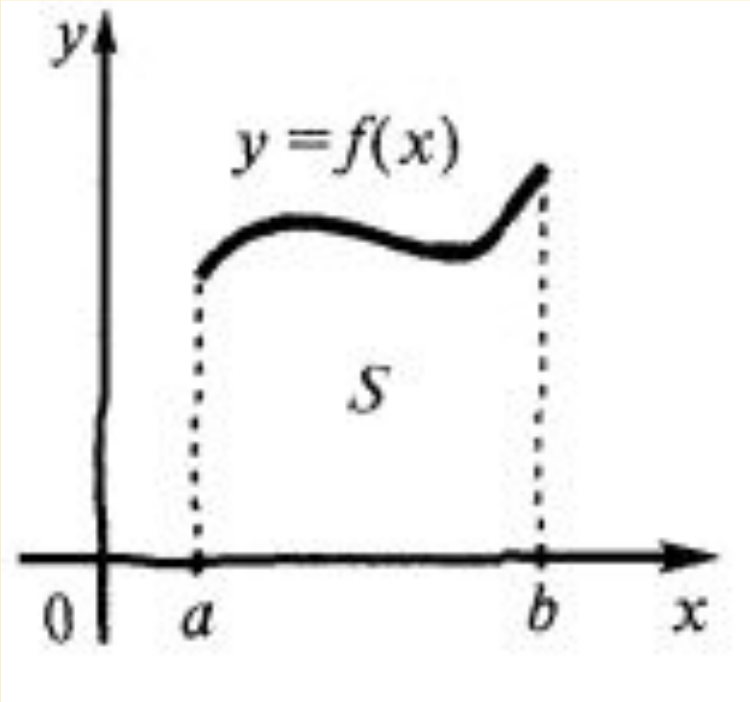
Существует аналогичная формула для длины дуги пространственной гладкой кривой:

[illegible] [illegible]

Вычисление площадей с помощью определенного интеграла

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, равен

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



Вычисление объемов с помощью определенного интеграла

Если тело заключено между двумя перпендикулярными к оси Ox плоскостями, проходящими через точки $x = a$ и $x = b$, то

$$V = \int_a^b S(x)\, dx$$

Где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, которая проходит через точку $x \in [a; b]$ и перпендикулярна к оси Ox