

**Тема: «Интеграл. Определенный интеграл.
Свойства. Примеры. Применение
определенного интеграла для нахождения
длин, площадей и объемов».**

Выполнила:

Студентка 10 группы 1 курса
Трухина Кристина

Определение интеграла

Интеграл - одно из важнейших понятий математического анализа, которое возникает при решении задач о нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, и тому подобных, а также в задаче о восстановлении функции по её производной (*неопределённый интеграл*). Упрощённо интеграл можно представить как аналог суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых. В зависимости от пространства, на котором задана подынтегральная функция, интеграл может быть — *двойной, тройной, криволинейный, поверхностный* и так далее; также существуют разные подходы к определению интеграла — различают интегралы *Римана, Лебега, Стильеса* и другие

Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Выполним следующие операции:

1) разобьем $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{i-1}, x_i]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$;

2) в каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, выберем произвольную точку и вычислим значение функции в этой точке: $f(z_i)$;

3) найдем произведения $f(z_i) \cdot \Delta x_i$, где Δx_i — длина частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$;

4) составим интегральную сумму функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

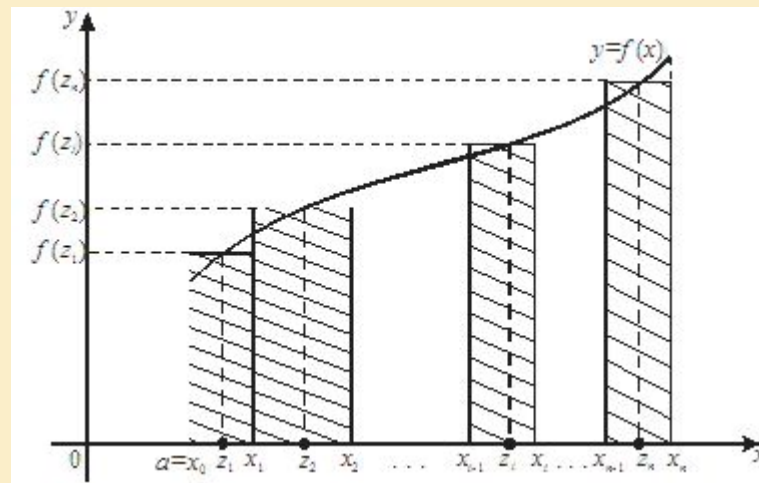
$$\sigma = f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \dots + f(z_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(z_i)\Delta x_i \quad (1)$$

Понятие определенного интеграла

С геометрической точки зрения эта сумма σ представляет собой сумму площадей прямоугольников, основания которых – частичные отрезки $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, а высоты равны $f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_n)$ соответственно (рис. 1). Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка:

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i;$$

5) найдем предел интегральной суммы, когда $\lambda \rightarrow 0$.



Понятие определенного интеграла

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы (1) и он не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек z_i в них, то этот предел называется **определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i.$$

В этом случае функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x) dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования; отрезок $[a, b]$ называется промежутком интегрирования.

Понятие определенного интеграла

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Если $a > b$, то, по определению, полагаем

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Основные свойства определенного интеграла

1. Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt = \dots$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Основные свойства определенного интеграла

4. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $a < b < c$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

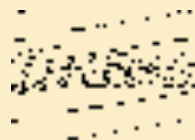
5. (**теорема о среднем**). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка c , такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

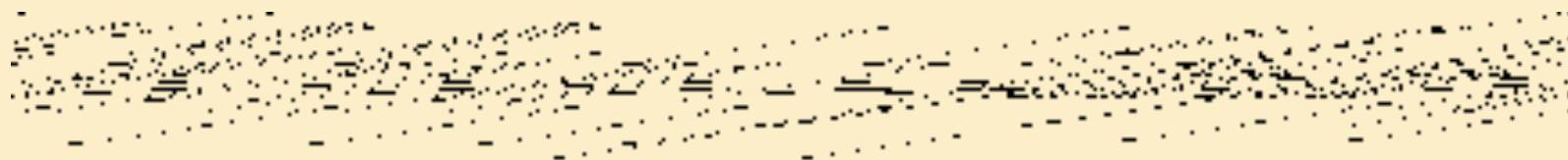
Пример решений

Пример 1

Вычислить определенный интеграл

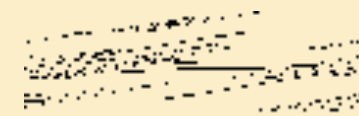


Решение:



(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы



Появившуюся константу $\frac{1}{\sqrt{a}}$ целесообразно отделить от \sqrt{a} и вынести за скобку.

Пример решений

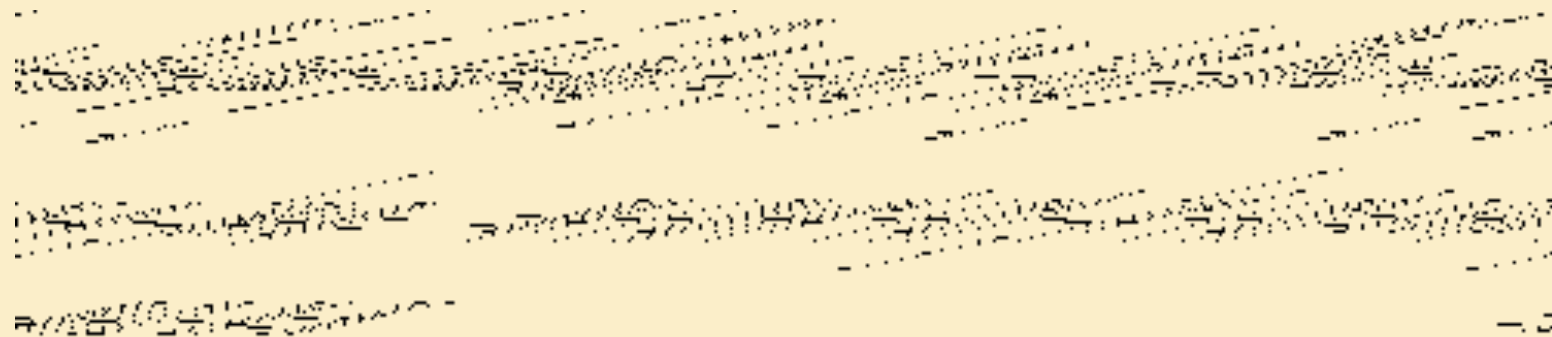
(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница

Сначала подставляем в $\int_a^b f(x) dx$ верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Пример 2

Вычислить определенный интеграл

Решение:



The image shows a handwritten mathematical solution for Example 2. It begins with the integral $\int_0^1 (x^2 + 2x - 1) dx$. The solution proceeds by finding the antiderivative: $\int (x^2 + 2x - 1) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - x + C$. Then, the definite integral is evaluated by substituting the upper limit (1) and the lower limit (0): $\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x \right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 1^2 - 1 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0^2 - 0 \right) = \left(\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) - 0 = \frac{1}{3}$. The final answer is $\frac{1}{3}$.

Пример решений

- (1) Используем свойства линейности определенного интеграла.
- (2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.
- (3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^1 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{7}{3}$$

Вычисление длин дуг с помощью определённого интеграла

Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ - параметрические уравнения гладкой кривой, то длина ее дуги равна $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$, где $x'(t)$ и $y'(t)$ - производные функций $x(t)$ и $y(t)$ соответственно, по параметру t .

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Существует аналогичная формула для длины дуги пространственной гладкой кривой:

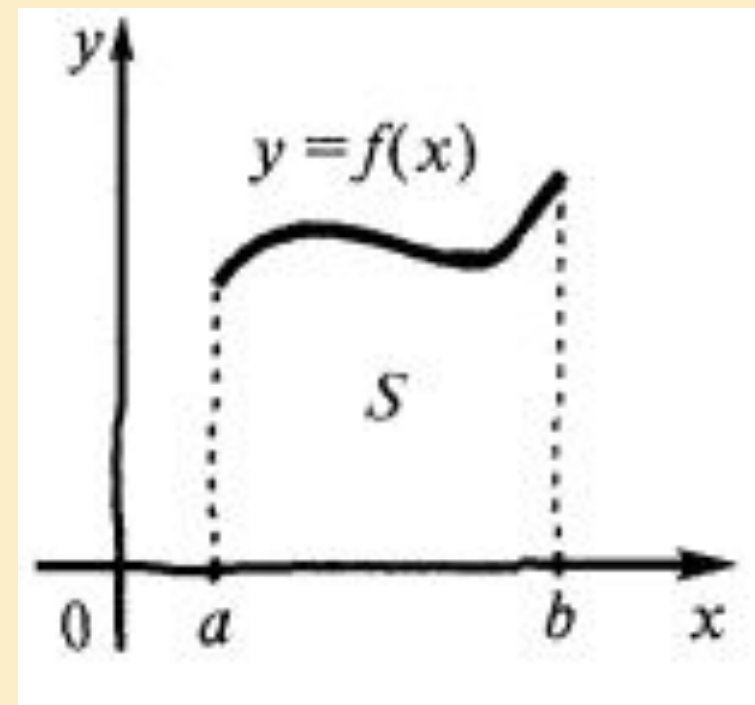
$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Вычисление площадей с помощью определенного интеграла

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, равен

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Вычисление объемов с помощью определенного интеграла

Если тело заключено между двумя перпендикулярными к оси Ox плоскостями, проходящими через точки $x = a$ и $x = b$, то

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, которая проходит через точку $x \in [a; b]$ и перпендикулярна к оси Ox

