Математическое моделирование

Теория ошибок

Свойства случайных погрешностей

- количество ошибок со знаком плюс **почти равно** числу ошибок со знаком минус, причем это правило выполняется тем лучше, чем больше произведено измерений;
- крупные ошибки встречаются реже мелких;
- величина наиболее крупных ошибок не превышает некоторой определенной величины, зависящей от точности измерений - **предельной ошибки**;
- для большой выборки измерений справедливо приближенное равенство $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \approx 0$

Вероятнейшие ошибки

- Пусть имеется ряд равноточных измерений

$$a_1, a_2, \ldots a_n.$$

Найдем среднеарифметическое

$$a = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n}$$

и подсчитаем разности

$$v_1 = a - a_1, v_2 = a - a_2, \ldots v_n = a - a_n$$

Сложим равенства почленно

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = na - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Так как правая часть равна нулю, то $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0$

Вероятнейшие ошибки

- *Случайные (истинные) ошибки не обладают этим свойством!*

Вероятнейшие ошибки составляют **основу** математической обработки результатов измерений, только по ним определяют предельную абсолютную ошибку Δa среднеарифметического a для оценки точности итогового результата измерений.

Средняя квадратичная ошибка отдельного измерения

- Если сумму квадратов всех случайных ошибок разделить на общее количество ошибок получим средний квадрат случайной ошибки.

Корень квадратный из этой величины называют *средней квадратичной ошибкой отдельного измерения*

$$S_n = \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}{n}}$$

Средняя квадратичная ошибка отдельного измерения

- В математической теории случайных ошибок [1] для большого количества измерений справедливо следующее равенство

$$S_n = \sqrt{\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{n}}=\sqrt{\frac{{v_1}^2+{v_2}^2+\cdots+{v_n}^2}{n-1}}$$

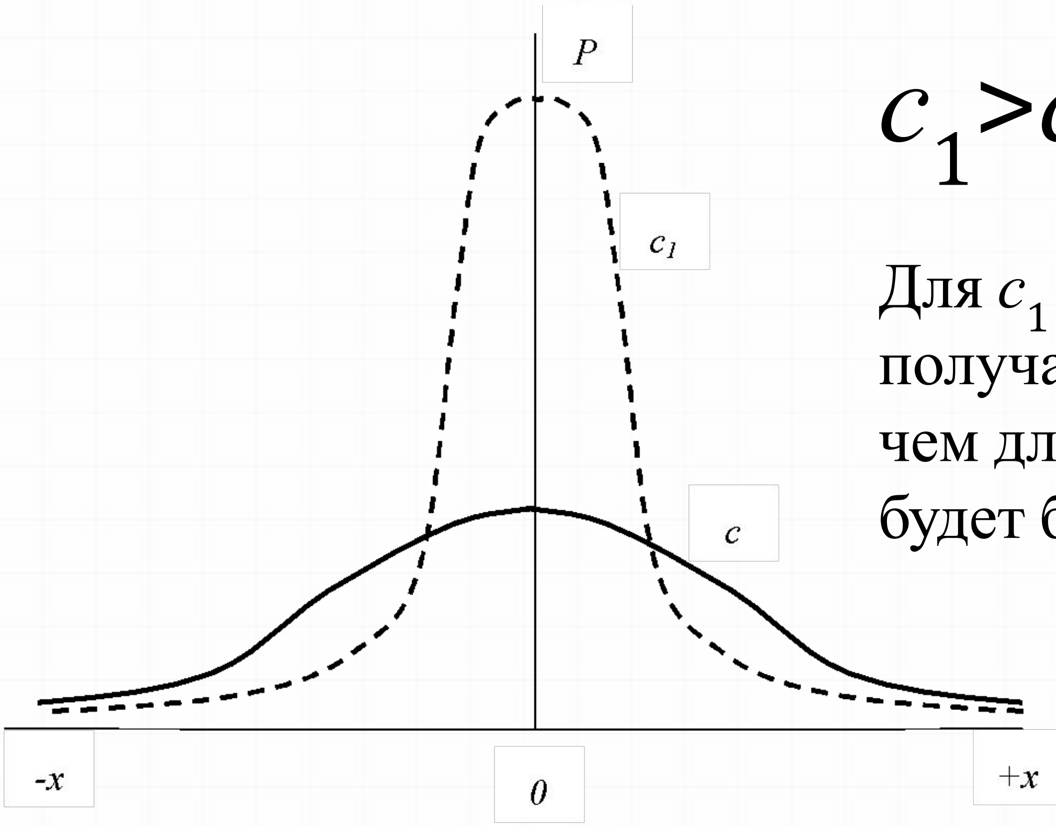
Таким образом, можно вычислить среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения S_n, не зная самих истинных ошибок

Кривая Гаусса

- Свойства случайных ошибок показывают, что частота P появления случайной погрешности величиной x будет тем меньше, чем больше сама эта ошибка. Иначе, частота или вероятность появления случайных ошибок есть убывающая функция их величины $P = \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 x^2}$.

Здесь c – некоторая константа, называемая мерой точности измерений

Кривая Гаусса



$c_1 > c$

Для c_1 кривая получается более узкая, чем для c. Такой ряд будет более точный.

Кривая Гаусса

При большом числе наблюдений величина S_n стремится к постоянному значению

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Параметр σ (стандартная погрешность) определяет ширину распределения, связанную с мерой точности c соотношением

$$c = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$

Тогда формула Гаусса преобразуется к более распространенному виду

$$f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \frac{1}{2\sigma^2}}$$

Средняя среднеквадратичная ошибка окончательного результата измерений

- Поскольку истинную абсолютную ошибку x окончательного результата измерений найти невозможно, вычисляют оценку этой ошибки – среднеквадратичную ошибку среднеарифметического. Согласно теории случайных ошибок, ее можно определить по формуле

$$S = \sqrt{\frac{{v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots + {v_n}^2}{(n-1)n}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Таким образом повысить точность вычислений можно увеличением числа наблюдений, это фундаментальный закон теории ошибок.

Предельная случайная ошибка

Предельной случайной ошибкой $x_{\text{пр}}$ называют самую большую из всех случайных ошибок в данном ряду равноточных измерений.

Случайные ошибки распределяются по отношению к средней квадратичной ошибке отдельного измерения следующим образом:

- 68,3 % случайных ошибок меньше S_n;
- 95,7 % этих ошибок меньше $2S_n$;
- 99,7 % – меньше $3S_n$.

Таким образом, принимают, что для всякого рода равноточных измерений предельная случайная ошибка с вероятностью, близкой к 100 %, равна $3S_n$

Предельная случайная ошибка

- Предельная абсолютная ошибка эксперимента

$$\Delta a = 3\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Предельная абсолютная ошибка среднеарифметического не является достаточной характеристикой качества измерений, оно лучше характеризуется предельной относительной ошибкой

$$E = \frac{\Delta a}{a}$$

Здесь a – среднеарифметическое

Запись окончательного результата измерений будет иметь следующий вид

$$X = a \pm \Delta a$$

Доверительный интервал

Предыдущая запись справедлива при достаточно большом числе измерений.

В 1908 году Уильям Сили Госсет (псевдоним Стьюдент), применил статистический подход при определении ошибок для небольшого числа измерений (менее 30). При этом в случае $n \to \infty$, распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса.

Если существует величина α вероятности отличия результата измерений от истинного значения на величину не более, чем $\Delta a_{сл}$, она называется доверительной вероятностью, а интервал значений от $X - \Delta a_{сл}$ до $X + \Delta a_{сл}$ называется доверительным интервалом.

Доверительный интервал

0 Абсолютная ошибка при малом количестве измерений определяется при помощи специального коэффициента, зависящего от надежности P и числа измерений n (коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n}$).

Для небольшого числа измерений n при доверительной вероятности P, полуширина доверительного интервала определяется в виде

$$\Delta a_{сл} = t_{\alpha,n} S$$

Практическое занятие №1

Задание 2.

- Найти среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения S_n и среднюю среднеквадратичную ошибку S результатов 50-ти измерений маятника №1 по зависимостям

$$S_n = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - t_{cp}\right)^2}{(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50}\left(t_i - t_{cp}\right)^2}{(50-1)}}$$

$$S = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - t_{cp}\right)^2}{n(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50}\left(t_i - t_{cp}\right)^2}{50(50-1)}}$$

Практическое занятие №1

Задание 2.

- Определить абсолютную погрешность в определении периода колебаний

$$\Delta t = \pm 3S$$

и предельные случайные ошибки измерений

$$t_{min} = -3S_n; t_{max} = +3S_n.$$

Проверить 99,7% попадание всех измерений в этот промежуток.

Практическое занятие №1

Задание 2.

- Определить доверительную погрешность (полуширину доверительного интервала)

$$\Delta t_{\text{сл}} = t_{\alpha,n} S$$

для доверительной вероятности P=0,95.

Значение критерия Стьюденда $t_{\alpha,n}$ взять для n=50 ($t_{0,95;50}$=2,011).

Сравнить полученное значение с абсолютной погрешностью Δt.

Практическое занятие №1

Задание 2.

- Повторить вычисления пунктов 1-3 для маятников №3, №4. Для маятника №2 взять среднеквадратичную ошибку S_n и значение $t_{\alpha,n}$ из результатов для маятника №1, так как эксперимент проводится в одних и тех же условиях, одним и тем же экспериментатором.
- Записать результаты измерений для всех маятников и сделать выводы. При этом учитывать число **верных знаков** в результатах измерений.

Список литературы

1. Колесников А.Ф. Основы математической обработки результатов измерений / А.Ф. Колесников. г. Томск, изд-во Томского университета, 1963. 49 с.