A bright yellow sticky note is partially visible on the left side of the image, overlapping the white card.

# Математическое моделирование

Теория ошибок

# Свойства случайных погрешностей

- ∅ количество ошибок со знаком плюс **почти равно** числу ошибок со знаком минус, причем это правило выполняется тем лучше, чем больше произведено измерений;
- ∅ крупные ошибки встречаются реже мелких;
- ∅ величина наиболее крупных ошибок не превышает некоторой определенной величины, зависящей от точности измерений - **предельной ошибки**;
- ∅ для большой выборки измерений справедливо приближенное равенство  $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \approx 0$

# Вероятнейшие ошибки

Пусть имеется ряд равноточных измерений

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Найдем среднеарифметическое

$$a = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n}$$

и подсчитаем разности

$$v_1 = a - a_1, v_2 = a - a_2, \dots, v_n = a - a_n$$

Сложим равенства почленно

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = na - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Так как правая часть равна нулю, то  $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$

# Вероятнейшие ошибки

*Случайные (истинные) ошибки не обладают этим свойством!*

Вероятнейшие ошибки составляют **основу** математической обработки результатов измерений, только по ним определяют предельную абсолютную ошибку  $\Delta a$  среднеарифметического  $a$  для оценки точности итогового результата измерений.

# *Средняя квадратичная ошибка отдельного измерения*

Если сумму квадратов всех случайных ошибок разделить на общее количество ошибок получим средний квадрат случайной ошибки.

Корень квадратный из этой величины называют *средней квадратичной ошибкой отдельного измерения*

$$S_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

# *Средняя квадратичная ошибка отдельного измерения*

В математической теории случайных ошибок [1] для большого количества измерений справедливо следующее равенство

$$S_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n-1}}$$

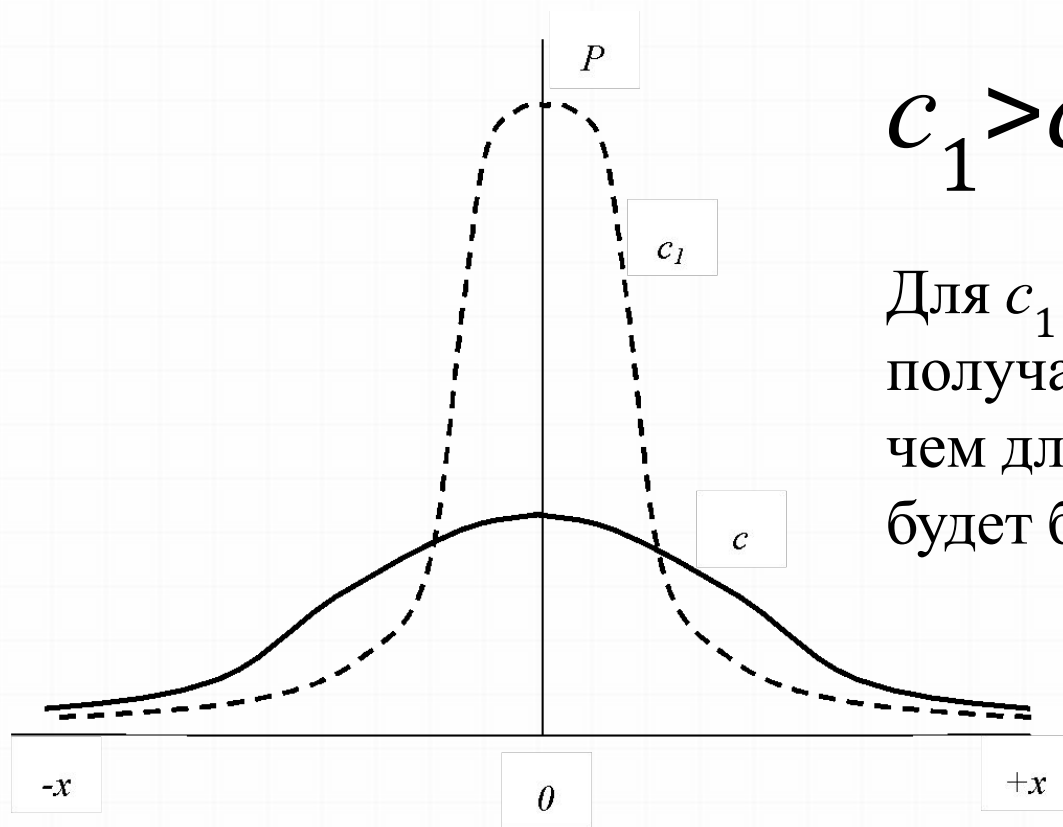
Таким образом, можно вычислить среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения  $S_n$ , не зная самих истинных ошибок

# Кривая Гаусса

Свойства случайных ошибок показывают, что частота  $P$  появления случайной погрешности величиной  $x$  будет тем меньше, чем больше сама эта ошибка. Иначе, частота или вероятность появления случайных ошибок есть убывающая функция их величины  $P = \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 x^2}$ .

Здесь  $c$  – некоторая константа, называемая мерой точности измерений

# Кривая Гаусса



$$c_1 > c$$

Для  $c_1$  кривая  
получается более узкая,  
чем для  $c$ . Такой ряд  
будет более точный.



# Кривая Гаусса

При большом числе наблюдений величина  $S_n$  стремится к постоянному значению

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Параметр  $\sigma$  (стандартная погрешность) определяет ширину распределения, связанную с мерой точности  $c$  соотношением

$$c = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$

Тогда формула Гаусса преобразуется к более распространенному виду

$$f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \frac{1}{2\sigma^2}}$$

## *Средняя среднеквадратичная ошибка окончательного результата измерений*

Поскольку истинную абсолютную ошибку  $x$  окончательного результата измерений найти невозможно, вычисляют оценку этой ошибки – среднеквадратичную ошибку среднеарифметического. Согласно теории случайных ошибок, ее можно определить по формуле

$$S = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{(n-1)n}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Таким образом повысить точность вычислений можно увеличением числа наблюдений, это фундаментальный закон теории ошибок.

## *Предельная случайная ошибка*

Предельной случайной ошибкой  $x_{\text{пр}}$  называют самую большую из всех случайных ошибок в данном ряду равноточных измерений.

Случайные ошибки распределяются по отношению к средней квадратичной ошибке отдельного измерения следующим образом:

- 0 68,3 % случайных ошибок меньше  $S_n$ ;
- 0 95,7 % этих ошибок меньше  $2S_n$ ;
- 0 99,7 % – меньше  $3S_n$ .

Таким образом, принимают, что для всякого рода равноточных измерений предельная случайная ошибка с вероятностью, близкой к 100 %, равна  $3S_n$

# Предельная случайная ошибка

Предельная абсолютная ошибка эксперимента

$$\Delta a = 3 \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Предельная абсолютная ошибка среднеарифметического не является достаточной характеристикой качества измерений, оно лучше характеризуется предельной относительной ошибкой

$$E = \frac{\Delta a}{a}$$

Здесь  $a$  – среднеарифметическое

Запись окончательного результата измерений будет иметь следующий вид

$$X = a \pm \Delta a$$

## *Доверительный интервал*

Предыдущая запись справедлива при достаточно большом числе измерений.

В 1908 году Уильям Сили Госсет (псевдоним Стьюдент), применил статистический подход при определении ошибок для небольшого числа измерений (менее 30). При этом в случае  $n \rightarrow \infty$ , распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса.

Если существует величина  $\alpha$  вероятности отличия результата измерений от истинного значения на величину не более, чем  $\Delta a_{\text{сл}}$ , она называется доверительной вероятностью, а интервал значений от  $X - \Delta a_{\text{сл}}$  до  $X + \Delta a_{\text{сл}}$  называется доверительным интервалом.

## *Доверительный интервал*

Абсолютная ошибка при малом количестве измерений определяется при помощи специального коэффициента, зависящего от надежности  $P$  и числа измерений  $n$  (коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha,n}$ ).

Для небольшого числа измерений  $n$  при доверительной вероятности  $P$ , полуширина доверительного интервала определяется в виде

$$\Delta a_{\text{сл}} = t_{\alpha,n} S$$

# Практическое занятие №1

## Задание 2.

- 0 Найти среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения  $S_n$  и среднюю среднеквадратичную ошибку  $S$  результатов 50-ти измерений маятника №1 по зависимостям

$$S_n = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{cp})^2}{(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} (t_i - t_{cp})^2}{(50-1)}}$$

$$S = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{cp})^2}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} (t_i - t_{cp})^2}{50(50-1)}}$$

# Практическое занятие №1

## Задание 2.

- Определить абсолютную погрешность в определении периода колебаний

$$\Delta t = \pm 3S$$

и предельные случайные ошибки измерений

$$t_{min} = -3S_n; t_{max} = +3S_n.$$

Проверить 99,7% попадание всех измерений в этот промежуток.



# Практическое занятие №1

## Задание 2.

- Определить доверительную погрешность (полуширину доверительного интервала)

$$\Delta t_{\text{сл}} = t_{\alpha, n} S$$

для доверительной вероятности  $P=0,95$ .

Значение критерия Стьюдента  $t_{\alpha, n}$  взять для  $n=50$  ( $t_{0,95;50}=2,011$ ).

Сравнить полученное значение с абсолютной погрешностью  $\Delta t$ .

# Практическое занятие №1

## *Задание 2.*

- 0 Повторить вычисления пунктов 1-3 для маятников №3, №4. Для маятника №2 взять среднеквадратичную ошибку  $S_n$  и значение  $t_{\alpha, n}$  из результатов для маятника №1, так как эксперимент проводится в одних и тех же условиях, одним и тем же экспериментатором.
- 0 Записать результаты измерений для всех маятников и сделать выводы. При этом учитывать число **верных знаков** в результатах измерений.

# Список литературы

1. Колесников А.Ф. Основы математической обработки результатов измерений / А.Ф. Колесников. г. Томск, изд-во Томского университета, 1963. 49 с.