Системы счисления

Система счисления — ***способ записи чисел с помощью заданного набора специальных символов. Это могут быть как цифры, так и буквы.***

В вычислительной технике применяются **позиционные системы счисления**, *в которых значение символа* зависит *от его положения в числе*.

Позиционные системы счисления отличаются друг от друга **алфавитом** — *множеством используемых символов.*

Размер алфавита *(число символов) называется* **основанием системы счисления**.

Позиция символа *в изображении числа называется* **разрядом.**

Любое число **C** в позиционной системе счисления можно представить в развернутой форме
т.е. в виде суммы разрядных слагаемых

$$C = c_n c_{n-1} \dots c_1 \, c_0 = c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p^1 + c_0 p^0$$

p — основание системы счисления, целое положительное число;

c —цифра числа;

n — номер старшего разряда числа.

Например.

Десятичные числа в развернутой форме будут имеет вид:

$C_{10} = 4718{,}63_{10} = 4*10^3 + 7*10^2 + 1*10^1 + 8*10^0 + 6*10^{-1} + 3*10^{-2}$

$C_{10} = 589_{10} \rightarrow 500 + 80 + 9 = 5*100 + 8*10 + 9*1 = 5*10^2+8*10^1 + 9*10^0$

- последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием P – это остаток от деления этого числа на P

- две последние цифры – это остаток от деления на P^2, и т.д.

ВАЖНО!!!

Последняя цифра числа – это остаток от деления этого числа на основание системы счисления.

Последние две цифры числа – это остаток от деления числа на основание системы счисления в квадрате.

Например.

Рассмотрим десятичное число 249.

Последняя цифра числа (9) – это остаток от деления числа 249 на 10.

Последние две цифры образуют число 49 – это остаток от деления числа 249 на 100.

Троичная система счисления

$212_3=2+1*3+2*3^2=23_{10}$

Разделим 23 на основание системы 3, получим 7 и 2 в остатке

(2 – это последняя цифра числа в троичной системе).

Разделим 23 на 9 (основание в квадрате), получим 18 и 5 в остатке ($5=12_3$).

Аналогичные утверждения справедливы для любой системы счисления.

p=2 → алфавит двоичной системы счисления - 0, 1.

В развёрнутой форме двоичное число 101101_2 можно записать так:

$$101101_2 = 1*2^5+0*2^4+1*2^3+1*2^2+0*2^1+1*2^0$$

p=8 → алфавит восьмеричной системы счисления - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

В развёрнутой форме восьмеричное число 734_8 можно записать так:

$$734_8=7*8^2+3*8^1+4*8^0$$

p=16 → алфавит шестнадцатеричной системы счисления

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

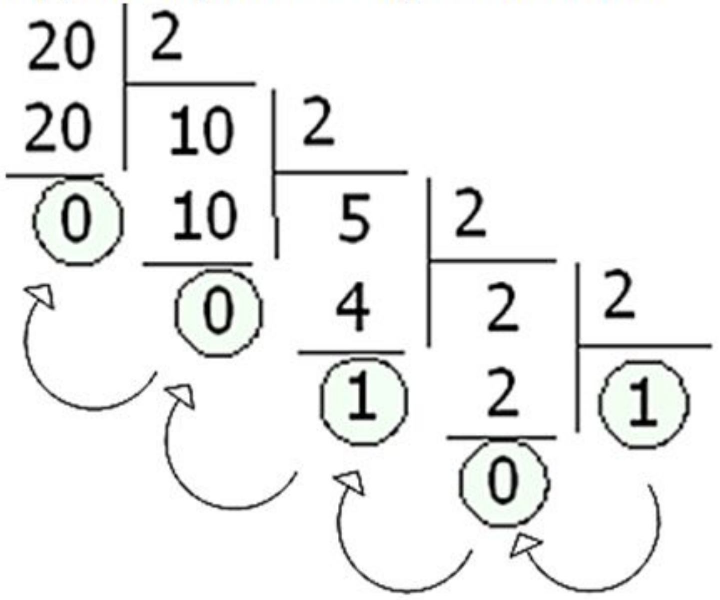
В развёрнутой форме шестнадцатеричное число можно записать так:

$$E7F8_{16}=E*16^3+7*16^2+F*16^1+8*16^0$$

Перевод целых чисел из десятичной системы счисления в другую.

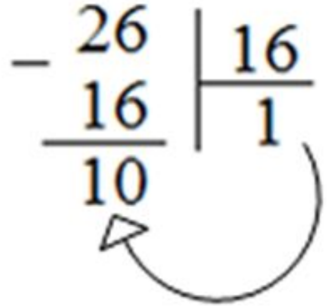
Для перевода числа из десятичной системы счисления в любую другую надо последовательно делить нацело десятичное число на основание новой системы счисления и записывать остатки от деления. Деление производится до тех пор, пока частное от деления не будет меньше нового основания системы. Число в новой системе счисления записывается в виде остатков от деления

Перевести число 20_{10} в двоичную систему счисления.



Ответ: $20_{10} = 10100_2$

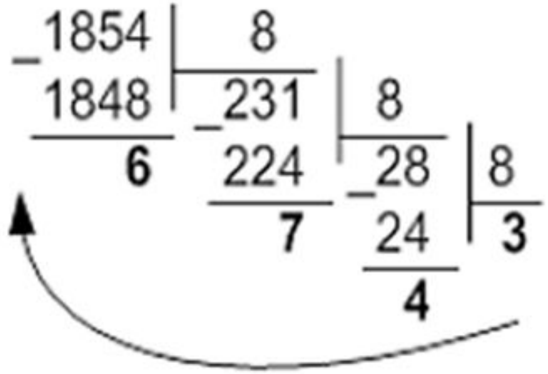
Перевести число 26_{10} в шестнадцатеричную систему счисления.



Казалось бы, что полученное число надо записать как 110_{16}, но в шестнадцатеричной системе десятичное число $10_{10} = A_{16}$, поэтому правильный ответ $1A_{16}$.

Ответ: $26_{10} = 1A_{16}$

Перевести число 1854_{10} в восьмеричную систему счисления.



Ответ: $1854_{10} = 3476_8$

Лайфхак. Быстрый перевод в двоичную систему.

Любое целое десятичное число можно представить в виде суммы степеней двойки.
(Степени двойки надо знать наизусть!)

В этой сумме слагаемые выстраиваются от большего к меньшему и по порядку.

Затем те степени двойки, которые присутствуют - заменяются на 1,

а которые отсутствуют на 0.

Нет степени

6 4 1

6 4 1

$$173_{10}=128+32+8+4+1=2^7+2^5+2^3+2^2+2^0=10101101_2$$

Для перевода чисел, записанных в восьмеричной системе в двоичный код, необходимо каждую цифру восьмеричного числа представить **триадой** двоичных символов. Лишние нули в старших разрядах отбрасываются.

Например: $12345667_8 = 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 110\ 111_2 = 1\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 110\ 111_2$

Для получения двоичной триады, эквивалентной восьмеричной цифре, можно использовать правило «421», в основе которого лежит представление числа в виде суммы степеней двойки.

В триаде необходимо записать единицы на местах тех цифр (4,2,1), сумма которых даёт значение восьмеричной цифры. На месте остальных цифр записать 0.

Примеры.

$7_8 = 4+2+1 = 111_2$

$3_8 = 2+1 = 011_2$

$6_8 = 4+2 = 110_2$

$5_8 = 4+1 = 101_2$

Для перевода чисел, записанных в шестнадцатеричной системе в двоичный код, необходимо каждую цифру шестнадцатеричного числа представить **тетрадой** двоичных символов. Лишние нули в старших разрядах отбрасываются.

Для получения двоичной триады, эквивалентной шестнадцатеричной цифре, можно использовать правило «8421», в основе которого лежит представление числа в виде суммы степеней двойки.

В тетраде необходимо записать единицы на местах тех цифр (8,4,2,1), сумма которых даёт значение шестнадцатеричной цифры. На месте остальных цифр записать 0.

Примеры.

$F_{16} = 15_{10} = 8+4+2+1 = 1111_2$

$C_{16} = 12_{10} = 8+4 = 1100_2$

$D_{16} = 13_{10} = 8+4+1 = 1101_2$

$9_{16} = 9_{10} = 8+1 = 1001_2$

Перевод целых чисел из любой системы счисления в десятичную систему счисления .

Для перевода чисел из любой системы счисления в десятичную необходимо записать это число в развёрнутой форме и вычислить его значение.

Примеры.

$112_8 = 1*8^2 + 1*81 + 2*8^0 = 64 + 8 + 2 = 74_{10}$

$BF_{16} = 11*16^1 + 15*16^0 = 176 + 15 = 191_{10}$, т.к. $B_{16} = 11_{10}$ и $F_{16} = 15_{10}$

$19F_{16} = 1*16^2 + 9*16^1 + F*16^0 = 1*256 + 9*16 + 15*1 = 415_{10}$

$10110_2 = 1*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 = 16 + 0 + 4 + 2 + 0 = 22_{10}$

ТИП №1

№1. Укажите в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых число 17 заканчивается на 2?

Решение.

Последняя цифра в записи числа - это первый остаток от деления числа на основание СС.

Следовательно 17-2=15. И надо найти все делители числа 15. Это 3, 5, 15.

Проверим: $17_{10} = 122_3 = 32_5 = 12_{15}$

№2 . Укажите в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых число22 заканчивается на 4?

Решение.

Последняя цифра в записи числа - это первый остаток от деления числа на основание СС.

Раз число заканчивается на 4, то основание системы счисления больше 3, т.к. в системе счисления с основанием 3 последняя цифра не может быть 4.

Следовательно 22- 4=18. Делители числа 18 - 3, 6, 9, 18.

Учитывая условие задачи это 6, 9,18.

Самостоятельно.

№3 .Укажите в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых число 40 заканчивается на 4?

№4. В некоторой системе счисления записи десятичных чисел 66 и 40 заканчиваются на 1. Определите основание системы счисления.

№5. Укажите в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых число 25 заканчивается на 7?

№6 В некоторой системе счисления записи десятичных чисел 56 и 124 заканчиваются на 5. Определите основание системы счисления.

Ответ
ы

№3 – 6, 9, 12, 18, 36

№4 - 13

№5 – 9, 18

№6 – 17

ТИП №2

Запись числа 67_{10} в системе счисления с основанием N заканчивается на 1 и содержит 4 цифры. Найти основание системы счисления?

Решение.

В P=2 для хранения числа 67 необходимо 7 цифр, т.к. $64 < 67 < 128$ или $2^6 < 67 < 2^7$

В P=3 для хранения числа 67 необходимо 4 цифры, т.к. $27 < 67 < 81$ или $3^3 < 67 < 3^4$

Проверим условие «*заканчивается на 1*».

Переведём 67 в P=3 , причём нам нужен только первый остаток (именно на него заканчивается число)

67/3=22 и 1 в остатке

Следовательно, основание СС P= 3 .

Запись числа N в системе счисления **с основанием 6 содержит две цифры,**
запись этого числа в системе счисления **с основанием 5 содержит три цифры,**
а запись в системе счисления **с основанием 11 заканчивается на 1**. Чему равно N?
Запишите ответ в десятичной системе счисления.

Решение.

Запись числа N в системе счисления с основанием 6 содержит две цифры:

$\mathbf{6 \leq N < 36}$ $(6_{10}=10_6)$

запись числа в системе счисления с основанием 5 содержит три цифры:

$\mathbf{25 \leq N < 125}$ $(25_{10}=100_5)$

Объединим неравенства и получим $\mathbf{25 \leq N < 36}$

N в системе счисления с основанием 11 заканчивается на 1, т.е. N можно представить как 11*k +1.

$$\mathbf{25 \leq 11*k +1 < 36}$$

$$\mathbf{24 \leq 11*k < 35}$$

Целое k, которое удовлетворяет условию = 3.
Отсюда N=11*k +1=33+1=34
Ответ: 34

Самостоятельно.

Задача №1

Запись числа 68_{10} в системе счисления с основанием N заканчивается на 2 и содержит 3 цифры. Чему равно основание этой системы счисления N?

Задача №2

Запись числа 63_{10} в системе счисления с основанием N заканчивается на 3 и содержит 3 цифры. **В скольких системах счисления это имеет место**?

Задача №3

Запись числа N в системе счисления с основанием 7 содержит две цифры, запись этого числа в системе счисления с основанием 6 содержит три цифры, а запись в системе счисления с основанием 13

Задача №1

Решение.

В Р=2 для хранения числа 68 необходимо 7 цифр, т.к. 64 < 68 <128 или $2^6 < 68 < 2^7$

В Р=3 для хранения числа 68 необходимо 4 цифры, т.к. 27 < 68 <81 или $3^3 < 68 < 3^4$

В Р=4 для хранения числа 68 тоже необходимо 4 цифры, т.к.64< 68 <256 или $4^3 < 68 < 4^4$

В Р=5 для хранения числа 68 необходимо 3 цифры, т.к.25< 68 < 125 или $5^2 < 68 < 5^3$, но при переводе числа 68 в Р=5 число заканчивается на 3, а не на 2 по условию.

В Р=6 для хранения числа 68 необходимо тоже 3 цифры, т.к.36< 68 < 216 или $6^2 < 68 < 6^3$

Проверим условие «*заканчивается на 2*».

Переведём 68 в Р=6 , причём нам нужен только первый остаток (именно на него заканчивается число)

Задача №2

Решение.

В Р=2 для хранения числа 63 необходимо 6 цифр, т.к. 32 < 63 <64 или $2^5 < 63 < 2^6$

В Р=3 для хранения числа 63 необходимо 4 цифры, т.к. 27 < 63 <81 или $3^3 < 63 < 3^4$

В **Р=4** для хранения числа 63 необходимо 3 цифры, т.к. 16< 63 <64 или $4^2 < 63 < 4^3$

Проверим условие «*заканчивается на 3*». 63/4=15 и 3 в остатке. **Подходит СС.**

В **Р=5** для хранения числа 63 тоже необходимо 3 цифры, т.к.25< 63 < 125 или $5^2 < 63 < 5^3$, и при переводе числа 63 в Р=5 число заканчивается на 3. **Подходит СС.**

В **Р=6** для хранения числа 63 тоже необходимо 3 цифры, т.к.36< 63 < 216 или $6^2 < 63 < 6^3$, и при переводе числа 63 в Р=6 число заканчивается на 3. **Подходит СС.**

В **Р=7** для хранения числа 63 тоже необходимо 3 цифры, т.к.49< 63 < 343 или $7^2 < 63 < 7^3$ но при переводе числа 63 в Р=7 число заканчивается на 0, а не на 3 по условию.

Задача №3

Решение.

Запись числа N в системе счисления с основанием 7 содержит две цифры: **7 ≤ N < 49**

Запись числа N в системе счисления с основанием 6 содержит три цифры: **36 ≤ N < 1296**

Объединяем неравенства ⇒ **36 ≤ N < 49**

Остаток от деления на 13 равен 3, т.е. N можно представить как 13*k +3.

Целое k, которое удовлетворяет условию = 3.

Отсюда N=13*k +3=39+3=42

При k=4

N=13*4 + 3 = 55 > 49

ТИП №3

№1. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 17 записывается в виде 101. Укажите это основание.

Решение.

Любое число в СС можно записать в развёрнутом виде

$$C = c_n c_{n-1} \dots c_1 \, c_0 \; = \; c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p^1 + c_0 p^0$$

p — основание системы счисления, целое положительное число;

c —цифра числа;

n — номер старшего разряда числа.

Следовательно, **17=101p**

101p = 1*p^2 +0*p^1 +1*p^0 = p^2 + 1

17 = p^2 +1; 16= p^2 ; p = 4

Ответ: 4

Самостоятельно:

№2 В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 57 записывается в виде 212. Укажите это основание.

№3 В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 71 записывается в виде 78. Укажите это основание.

№4 В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 129 записывается в виде 1004. Укажите это основание.

Ответы

№2 - 5

№3 - 9

№4 - 5

Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 20, запись которых в системе счисления с основанием 5 оканчивается на 3?

Решение.

Переведем число 20 в систему счисления с основанием 5.

Получим $20_{10} = 40_5$

Выпишем все числа в системе счисления 5, которые не превышают 40 и

оканчиваются на 3.

Это числа 3, 13, 23 и 33. Это числа в пятеричной системе.

Переводим в десятичную: $13_5 = 8_{10}$; $23_5 = 13_{10}$; $33_5 = 18_{10}$

Ответ: 3, 8, 13, 18

Самостоятель но.

№1. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на 21?

№2. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 100, запись которых в пятеричной системе счисления оканчивается на 11?

Ответ
ы

№1 – 7, 16, 25

№2 – 6, 31, 56, 81

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 75 оканчивается на 13.

Решение.

1. Число 75_{10} в каких-то системах x1...xn заканчивается на 13, а значит, оно, заканчивается и на 3. Вычтем эту тройку из 75. Тогда получаем, что 72_{10} в этих системах заканчивается нулём, то есть 72_{10} делится на основания этих систем, следовательно, решение надо искать среди делителей числа 72.
2. Делителями числа 72 являются: 2,3,4,6,8,9,12,18,24,36 и 72. Сразу отбрасываем 2 и 3, т.к. в этих системах нет цифры 3. Остаются числа 4,6,8,9,12,18,24,36 и 72.
3. Максимальная система счисления получается тогда, когда $75_{10}=13_x$

   1*x+3=75   **x=72.**

Это первое решение, в остальных случаях запись числа 75 будет уже не двузначным числом

(113, 213. 313 и т. д.).

4. Для трёхзначного числа имеем: $A*x^2+1*x+3=75 \Rightarrow A*x^2+x=72$

   Из уравнения видно, что x не может быть больше 8, иначе левая часть станет больше правой. Значит остальные решения надо искать среди чисел 4,6,8.

5. **Число A** должно быть целым, подставляя последовательно в это уравнение числа 4,6,8, видим, что решением будет только число 8, в остальных случаях **A** получается дробным.

6. Итого имеем 2 решения 8,72.

Ответ: 8,72

Решение уравнений в различных системах счисления.

Решите уравнение:

$$101_{N+1} = 101_N + 15_8$$

Ответ запишите в десятичной системе счисления.

Решение.

Переводим все числа в десятичную СС:

$101_{N+1} = (1*(N+1)^2 + 0*(N+1)^1 + 1*(N+1)^0)_{10} = ((N+1)^2 + 1)_{10}$

$101_N = (N^2 + 1)_{10}$; $15_8 = 13_{10}$

Записываем уравнение в десятичной СС:

$(N+1)^2 + 1 = (N^2 + 1) + 13$

$N^2 + 2N + 1 + 1 = N^2 + 14$

$2N = 12$; $N=6$

Ответ: 6

Самостоятельно

№1. Решите уравнение:

$101_{N+1} = 101_N + 11_{16}$

Ответ запишите в десятичной системе счисления.

№2. Решите уравнение:

$161_N = 134_{N+1}$.

Ответ запишите в десятичной системе счисления.

№3. Решите уравнение:

$44_{\mathbf{X+5}} - 44_{\mathbf{5}} = 52_{\mathbf{10}}$

Ответ запишите в десятичной системе счисления.

Ответы:

№1 – N=8

№2 – N=7

№3 – X=13