

Системы счисления

Система счисления — способ записи чисел с помощью заданного набора специальных символов. Это могут быть как цифры, так и буквы.

В вычислительной технике применяются **позиционные системы счисления**, в которых значение символа зависит от его положения в числе.

Позиционные системы счисления отличаются друг от друга **алфавитом** — *множеством используемых символов.*

Размер алфавита (число символов) называется **основанием системы счисления.**

Позиция символа в изображении числа называется **разрядом.**

Любое число **C** в позиционной системе счисления можно представить в развернутой форме

т.е. в виде суммы разрядных слагаемых

$$C = c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p^1 + c_0 p^0$$

p — основание системы счисления, целое положительное число;

c — цифра числа;

n — номер старшего разряда числа.

Например.

Десятичные числа в развернутой форме будут имеет вид:

$$C_{10} = 4718,63_{10} = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

$$C_{10} = 589_{10} \rightarrow 500 + 80 + 9 = 5 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 1 = 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

□ **последняя цифра** записи числа в системе счисления с основанием P — это остаток от деления этого числа на P

□ **две последние цифры** — это остаток от деления на P^2 , и т.д.

ВАЖНО!

Последняя цифра числа – это остаток от деления этого числа на основание системы счисления.

Последние две цифры числа – это остаток от деления числа на основание системы счисления в квадрате.

Наприме

р Рассмотрим десятичное число 249.

Последняя цифра числа (9) – это остаток от деления числа 249 на 10.

Последние две цифры образуют число 49 – это остаток от деления числа 249 на 100.

Троичная система счисления

$$212_3 = 2 + 1 * 3 + 2 * 3^2 = 23_{10}$$

Разделим 23 на основание системы 3, получим 7 и 2 в остатке

(2 – это последняя цифра числа в троичной системе).

Разделим 23 на 9 (основание в квадрате), получим 18 и 5 в остатке ($5 = 12_3$).

Аналогичные утверждения справедливы для любой системы счисления.

p=2 → алфавит двоичной системы счисления - 0, 1.

В развёрнутой форме двоичное число 101101_2 можно записать так:

$$101101_2 = 1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0$$

p=8 → алфавит восьмеричной системы счисления - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

В развёрнутой форме восьмеричное число 734_8 можно записать так:

$$734_8 = 7*8^2 + 3*8^1 + 4*8^0$$

p=16 → алфавит шестнадцатеричной системы счисления

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

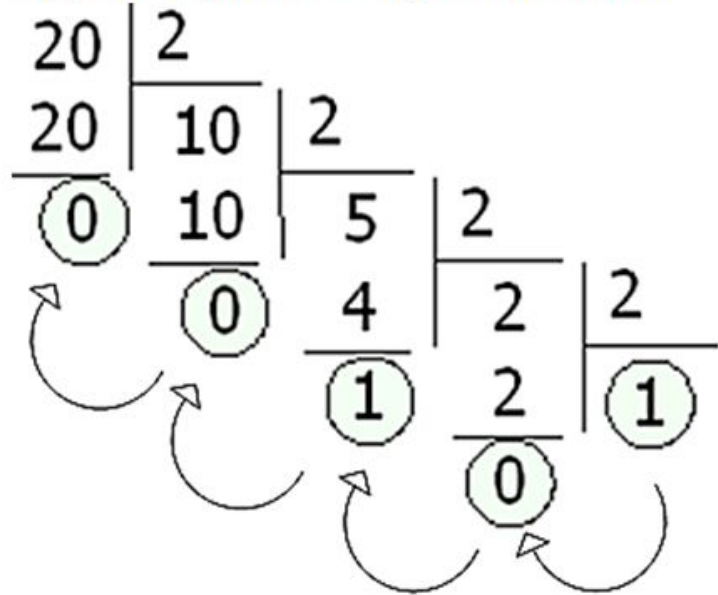
В развёрнутой форме шестнадцатеричное число можно записать так:

$$E7F8_{16} = E*16^3 + 7*16^2 + F*16^1 + 8*16^0$$

Перевод целых чисел из десятичной системы счисления в другую.

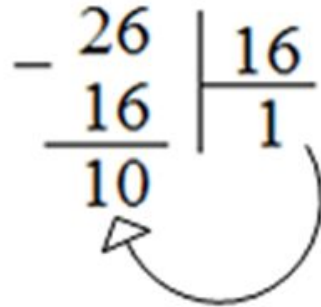
Для перевода числа из десятичной системы счисления в любую другую надо последовательно делить нацело десятичное число на основание новой системы счисления и записывать остатки от деления. Деление производится до тех пор, пока частное от деления не будет меньше нового основания системы. Число в новой системе счисления записывается в виде остатков от деления

Перевести число 20_{10}
в двоичную систему счисления.



Ответ: $20_{10} = 10100_2$

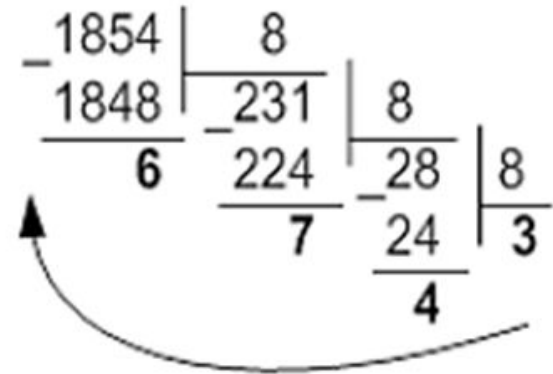
Перевести число 26_{10}
в шестнадцатеричную систему счисления.



Казалось бы, что полученное число надо записать как 110_{16} , но в шестнадцатеричной системе десятичное число $10_{10} = A_{16}$, поэтому правильный ответ $1A_{16}$.

Ответ: $26_{10} = 1A_{16}$

Перевести число 1854_{10}
в восьмеричную систему счисления.



Ответ: $1854_{10} = 3476_8$

Лайфхак. Быстрый перевод в двоичную систему.

Любое целое десятичное число можно представить в виде суммы степеней двойки.

(Степени двойки надо знать наизусть!)

В этой сумме слагаемые выстраиваются от большего к меньшему и по порядку.

Затем те степени двойки, которые присутствуют - заменяются на 1,

а которые отсутствуют на 0.

$$173_{10} = 128 + 32 + 8 + 4 + 1 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 10101101_2$$

Нет степени

6 4 1

6 4 1

Для перевода чисел, записанных в восьмеричной системе в двоичный код, необходимо каждую цифру восьмеричного числа представить триадой двоичных символов. Лишние нули в старших разрядах отбрасываются.

Например: $12345667_8 = 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 110\ 111_2 = 1\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 110\ 111_2$

Для получения двоичной триады, эквивалентной восьмеричной цифре, можно использовать правило «421», в основе которого лежит представление числа в виде суммы степеней двойки.

В триаде необходимо записать единицы на местах тех цифр (4,2,1), сумма которых даёт значение восьмеричной цифры. На месте остальных цифр записать 0.

Примеры.

$$7_8 = 4+2+1 = 111_2$$

$$3_8 = 2+1 = 011_2$$

$$6_8 = 4+2 = 110_2$$

$$5_8 = 4+1 = 101_2$$

Для перевода чисел, записанных в шестнадцатеричной системе в двоичный код, необходимо каждую цифру шестнадцатеричного числа представить **тетрадой** двоичных символов. Лишние нули в старших разрядах отбрасываются.

Для получения двоичной триады, эквивалентной шестнадцатеричной цифре, **можно использовать правило «8421»**, в основе которого лежит представление числа в виде суммы степеней двойки.

В тетраде необходимо записать единицы на местах тех цифр (8,4,2,1), сумма которых даёт значение шестнадцатеричной цифры. На месте остальных цифр записать 0.

Примеры.

$$F_{16} = 15_{10} = 8+4+2+1 = 1111_2$$

$$C_{16} = 12_{10} = 8+4 = 1100_2$$

$$D_{16} = 13_{10} = 8+4+1 = 1101_2$$

$$9_{16} = 9_{10} = 8+1 = 1001_2$$

Перевод целых чисел из любой системы счисления в десятичную систему счисления .

Для перевода чисел из любой системы счисления в десятичную необходимо записать это число в развёрнутой форме и вычислить его значение.

Примеры.

$$112_8 = 1 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 64 + 8 + 2 = 74_{10}$$

$$BF_{16} = 11 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 176 + 15 = 191_{10}, \text{ т.к. } B_{16} = 11_{10} \text{ и } F_{16} = 15_{10}$$

$$19F_{16} = 1 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16^1 + F \cdot 16^0 = 1 \cdot 256 + 9 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = 415_{10}$$

$$10110_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 0 + 4 + 2 + 0 = 22_{10}$$

ТИП

№1. Укажите в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых число 17 заканчивается на 2?

Решение.

Последняя цифра в записи числа - это первый остаток от деления числа на основание СС.

Следовательно $17 - 2 = 15$. И надо найти все делители числа 15. Это 3, 5, 15.

Проверим: $17_{10} = 122_3 = 32_5 = 12_{15}$

№2 . Укажите в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых число 22 заканчивается на 4?

Решение.

Последняя цифра в записи числа - это первый остаток от деления числа на основание СС.

Раз число заканчивается на 4, то основание системы счисления больше 3, т.к. в системе счисления с основанием 3 последняя цифра не может быть 4.

Следовательно $22 - 4 = 18$. Делители числа 18 - 3, 6, 9, 18.

Учитывая условие задачи это 6, 9, 18.

Самостоятельно.

- №3** .Укажите в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых число 40 заканчивается на 4?
- №4.** В некоторой системе счисления записи десятичных чисел 66 и 40 заканчиваются на 1. Определите основание системы счисления.
- №5.** Укажите в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых число 25 заканчивается на 7?
- №6** В некоторой системе счисления записи десятичных чисел 56 и 124 заканчиваются на 5. Определите основание системы счисления.

Ответ ы

№3 – 6, 9, 12, 18, 36

№4 - 13

№5 – 9, 18

№6 – 17

ТИП №2

Запись числа 67_{10} в системе счисления с основанием N заканчивается на 1 и содержит 4 цифры. Найти основание системы счисления?

Решение.

В $P=2$ для хранения числа 67 необходимо 7 цифр, т.к. $64 < 67 < 128$ или $2^6 < 67 < 2^7$

В $P=3$ для хранения числа 67 необходимо 4 цифры, т.к. $27 < 67 < 81$ или $3^3 < 67 < 3^4$

Проверим условие «заканчивается на 1».

Переведём 67 в $P=3$, причём нам нужен только первый остаток (именно на него заканчивается число)

$67/3=22$ и **1** в остатке

Следовательно, основание СС $P=3$.

Запись числа N в системе счисления с **основанием 6** содержит **две цифры**, запись этого числа в системе счисления с **основанием 5** содержит **три цифры**, а запись в системе счисления с **основанием 11** **заканчивается на 1**. Чему равно N ?
Запишите ответ в десятичной системе счисления.

Решение.

Запись числа N в системе счисления с основанием 6 содержит две цифры:

$$6 \leq N < 36 \quad (6_{10} = 10_6)$$

запись числа в системе счисления с основанием 5 содержит три цифры:

$$25 \leq N < 125 \quad (25_{10} = 100_5)$$

Объединим неравенства и получим **$25 \leq N < 36$**

N в системе счисления с основанием 11 заканчивается на 1, т.е. N можно представить как $11 \cdot k + 1$.

$$25 \leq 11 \cdot k + 1 < 36$$

$$24 \leq 11 \cdot k < 35$$

Целое k , которое удовлетворяет условию = 3.

Отсюда $N = 11 \cdot k + 1 = 33 + 1 = 34$

Ответ: 34

Самостоятель

но.

Задача №1

Запись числа 68_{10} в системе счисления с основанием N заканчивается на 2 и содержит 3 цифры. Чему равно основание этой системы счисления N ?

Задача №2

Запись числа 63_{10} в системе счисления с основанием N заканчивается на 3 и содержит 3 цифры. **В скольких системах счисления это имеет место?**

Задача №3

Запись числа N в системе счисления с основанием 7 содержит две цифры, запись этого числа в системе счисления с основанием 6 содержит три цифры, а запись в системе счисления с основанием 13

Задача

№1

Решение.

В $P=2$ для хранения числа 68 необходимо 7 цифр, т.к. $64 < 68 < 128$ или $2^6 < 68 < 2^7$

В $P=3$ для хранения числа 68 необходимо 4 цифры, т.к. $27 < 68 < 81$ или $3^3 < 68 < 3^4$

В $P=4$ для хранения числа 68 тоже необходимо 4 цифры, т.к. $64 < 68 < 256$ или $4^3 < 68 < 4^4$

В $P=5$ для хранения числа 68 необходимо 3 цифры, т.к. $25 < 68 < 125$ или $5^2 < 68 < 5^3$, но при переводе числа 68 в $P=5$ число заканчивается на 3, а не на 2 по условию.

В $P=6$ для хранения числа 68 необходимо тоже 3 цифры, т.к. $36 < 68 < 216$ или $6^2 < 68 < 6^3$

Проверим условие «заканчивается на 2».

Переведём 68 в $P=6$, причём нам нужен только первый остаток (именно на него заканчивается число)

Задача

№2

Решение.

В $P=2$ для хранения числа 63 необходимо 6 цифр, т.к. $32 < 63 < 64$ или $2^5 < 63 < 2^6$

В $P=3$ для хранения числа 63 необходимо 4 цифры, т.к. $27 < 63 < 81$ или $3^3 < 63 < 3^4$

В $P=4$ для хранения числа 63 необходимо 3 цифры, т.к. $16 < 63 < 64$ или $4^2 < 63 < 4^3$

Проверим условие «заканчивается на 3». $63/4=15$ и 3 в остатке. **Подходит СС.**

В $P=5$ для хранения числа 63 тоже необходимо 3 цифры, т.к. $25 < 63 < 125$ или $5^2 < 63 < 5^3$, и при переводе числа 63 в $P=5$ число заканчивается на 3. **Подходит СС.**

В $P=6$ для хранения числа 63 тоже необходимо 3 цифры, т.к. $36 < 63 < 216$ или $6^2 < 63 < 6^3$, и при переводе числа 63 в $P=6$ число заканчивается на 3. **Подходит СС.**

В $P=7$ для хранения числа 63 тоже необходимо 3 цифры, т.к. $49 < 63 < 343$ или $7^2 < 63 < 7^3$ но при переводе числа 63 в $P=7$ число заканчивается на 0, а не на 3 по условию.

Задача №3

Решение.

Запись числа N в системе счисления с основанием 7 содержит две цифры: $7 \leq N <$

49

Запись числа N в системе счисления с основанием 6 содержит три цифры: $36 \leq N <$

1296

Объединяем неравенства $\Rightarrow 36 \leq N < 49$

Остаток от деления на 13 равен 3, т.е. N можно представить как $13*k + 3$.

Целое k , которое удовлетворяет условию $= 3$.

Отсюда $N=13*k + 3=39+3=42$

При $k=4$

$N=13*4 + 3 = 55 > 49$

ТИП

№3

№1. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 17 записывается в виде 101. Укажите это основание.

Решение.

Любое число в СС можно записать в развёрнутом виде

$$C = c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0 = c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p^1 + c_0 p^0$$

p — основание системы счисления, целое положительное число;

c — цифра числа;

n — номер старшего разряда числа.

Следовательно, **17=101 p**

$$101p = 1 * p^2 + 0 * p^1 + 1 * p^0 = p^2 + 1$$

$$17 = p^2 + 1; 16 = p^2; p = 4$$

Ответ: 4

Самостоятель

- №2** В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 57 записывается в виде 212. Укажите это основание.
- №3** В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 71 записывается в виде 78. Укажите это основание.
- №4** В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 129 записывается в виде 1004. Укажите это основание.

Отвeты

№2 - 5

№3 - 9

№4 - 5

Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 20, запись которых в системе счисления с основанием 5 оканчивается на 3?

Решение.

Переведем число 20 в систему счисления с основанием 5.

Получим $20_{10} = 40_5$

Выпишем все числа в системе счисления 5, которые не превышают 40 и оканчиваются на 3.

Это числа 3, 13, 23 и 33. Это числа в пятеричной системе.

Переводим в десятичную: $13_5 = 8_{10}$; $23_5 = 13_{10}$; $33_5 = 18_{10}$

Ответ: 3, 8, 13, 18

Самостоятель

но.

№1. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на 21?

№2. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 100, запись которых в пятеричной системе счисления оканчивается на 11?

**Ответ
ы**

№1 – 7, 16, 25

№2 – 6, 31, 56, 81

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 75 оканчивается на 13.

Решение.

1. Число 75_{10} в каких-то системах $x_1 \dots x_n$ заканчивается на 13, а значит, оно, заканчивается и на 3. Вычтем эту тройку из 75. Тогда получаем, что 72_{10} в этих системах заканчивается нулём, то есть 72_{10} делится на основания этих систем, следовательно, решение надо искать среди делителей числа 72.
2. Делителями числа 72 являются: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 и 72. Сразу отбрасываем 2 и 3, т.к. в этих системах нет цифры 3. Остаются числа 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 и 72.
3. Максимальная система счисления получается тогда, когда $75_{10} = 13_x$
 $1 \cdot x + 3 = 75 \quad x = 72.$

Это первое решение, в остальных случаях запись числа 75 будет уже не двузначным числом

(113, 213, 313 и т. д.).

4. Для трёхзначного числа имеем: $A \cdot x^2 + 1 \cdot x + 3 = 75 \Rightarrow A \cdot x^2 + x = 72$

Из уравнения видно, что x не может быть больше 8, иначе левая часть станет больше правой. Значит остальные решения надо искать среди чисел 4,6,8.

5. **Число A** должно быть целым, подставляя последовательно в это уравнение числа 4,6,8, видим, что решением будет только число 8, в остальных случаях **A** получается дробным.

6. Итого имеем 2 решения 8,72.

Ответ: 8,72

Решение уравнений в различных системах

счисления.
Решите уравнение:

$$101_{N+1} = 101_N + 15_8$$

Ответ запишите в десятичной системе счисления.

Решение.

Переводим все числа в десятичную СС:

$$101_{N+1} = (1 \cdot (N+1)^2 + 0 \cdot (N+1)^1 + 1 \cdot (N+1)^0)_{10} = ((N+1)^2 + 1)_{10}$$

$$101_N = (N^2 + 1)_{10} ; \quad 15_8 = 13_{10}$$

Записываем уравнение в десятичной СС:

$$(N+1)^2 + 1 = (N^2 + 1) + 13$$

$$N^2 + 2N + 1 + 1 = N^2 + 14$$

$$2N = 12; \quad N=6$$

Ответ: 6

Самостоятель но

№1. Решите уравнение:

$$101_{N+1} = 101_N + 11_{16}$$

Ответ запишите в десятичной системе счисления.

№2. Решите уравнение:

$$161_N = 134_{N+1}.$$

Ответ запишите в десятичной системе счисления.

№3. Решите уравнение:

$$44_{X+5} - 44_5 = 52_{10}$$

Ответ запишите в десятичной системе счисления.

Отвeты:

№1 – N=8

№2 – N=7

№3 – X=13