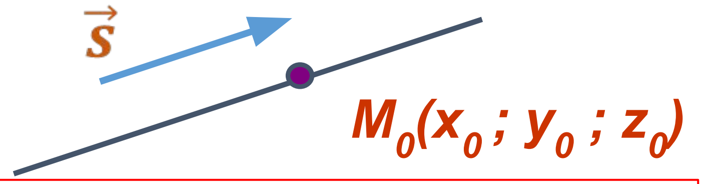
Прямая в пространстве

Каноническое уравнение прямой в пространстве

Пусть прямая проходит через точку:

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ и **направляющий вектор** $\vec{s} = (l; m; n)$

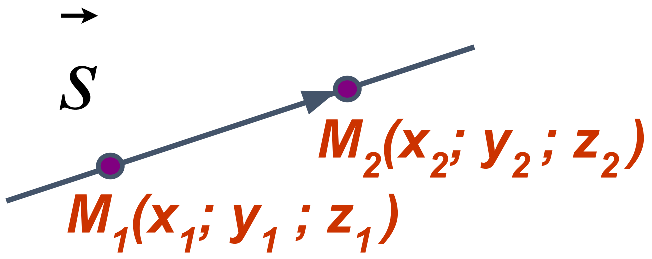


$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Параметрическое уравнение прямой в пространстве

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}$$

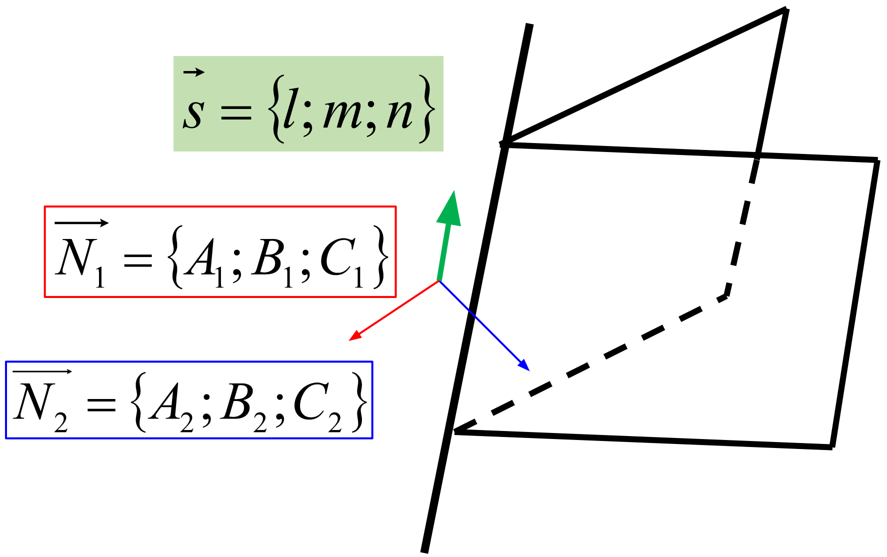
Уравнение прямой, проходящей через две различные точки в пространстве



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Прямая в пространстве как пересечение двух плоскостей

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$



а) Направляющий вектор

$$\vec{s} = \left[\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

б) Нахождение точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

- канонические уравнения прямой

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2,\ 0,\ -3)$:

а) параллельно вектору $\mathbf{s} = (2,\ -3,\ 5)$;

б) параллельно прямой $\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z - 11 &= 0, \\ 5x + 4y - z + 8 &= 0. \end{aligned}\right\}$

Составить параметрические уравнения прямой:

а) проходящей через точку $M_0(1;0;-1)$, параллельно вектору $\vec{a}(2;3;0)$;

б) проходящей через точки $M_1(2;2;2)$ и $M_2(2;6;1)$

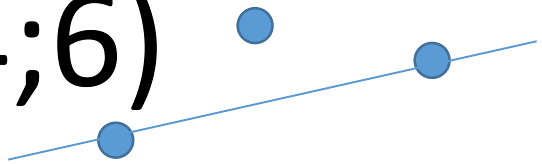
Составить параметрические уравнения прямой:

а) проходящей через точку $M_0(1;0;-1)$, параллельно вектору $\vec{a}(2;3;0)$;

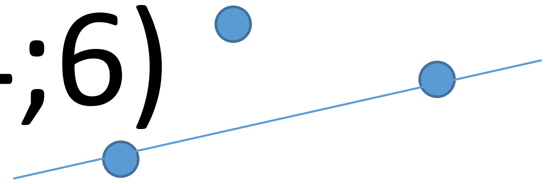
б) проходящей через точки $M_1(2;2;2)$ и $M_2(2;6;1)$

Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки

(-3;5;4), (2;4;6), (2;14;6)



Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки (-3;5;4), (2;4;6), (2;14;6)



$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

x_1=-3 y_1=5 z_1=4 x_2=2 y_2=14 z_2=6

$$\frac{x+3}{5}=\frac{y-5}{9}=\frac{z-4}{2} \qquad \frac{2+3}{5}=\frac{4-5}{9}=\frac{6-4}{2} \qquad 1=-1/9=1$$

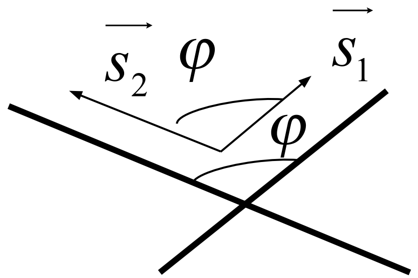
$$\frac{x+3}{2+3}=\frac{y-5}{4-5}=\frac{z-4}{6-4} \qquad \frac{x+3}{5}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-4}{2} \qquad \frac{2+3}{5}=\frac{14-5}{-1}=\frac{6-4}{2} \qquad 1=-9=1$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Нахождение угла между прямыми

Прямые в пространстве заданы каноническими уравнениями, поэтому
угол между прямыми – это угол между направляющими векторами

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}}$$

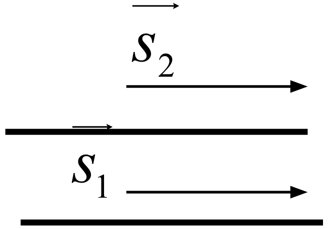


Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых

Условие параллельности прямых

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$$

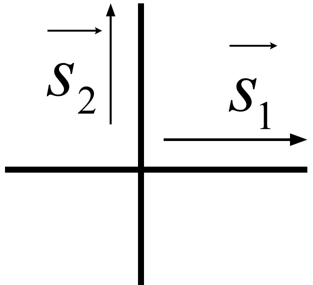
$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2}}$$



Условие перпендикулярности прямых

$$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \qquad (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) = 0$$

$$\boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2 = 0}$$



Пересекаются ли прямые $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$ и $\frac{x}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{5}$?

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2})}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1{}^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2{}^2+n_2^2}}}$$

Расстояние от точки до прямой в пространстве

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}\right]\right|}{\left|\vec{s}\right|}$$

Найти расстояние между точкой M(0, 2, 3) и прямой

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$$

Решение.

Из уравнения прямой получим:

$\bar{s} = \{2; 1; 2\}$ - направляющий вектор прямой;
$M_1(3; 1; -1)$ - точка лежащая на прямой.

Тогда

$$\overline{M_0M_1} = \{3 - 0; 1 - 2; -1 - 3\} = \{3; -1; -4\}$$

$$\overline{M_0M_1} \times \bar{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}((-1)\cdot 2 - (-4)\cdot 1) - \mathbf{j}(3\cdot 2 - (-4)\cdot 2) + \mathbf{k}(3\cdot 1 - (-1)\cdot 2) = \{2; -14; 5\}$$

$$d = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \bar{s}|}{|\bar{s}|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-14)^2 + 5^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{9}} = \frac{15}{3} = 5$$

Ответ: расстояние от точки до прямой равно 5.

Найти расстояние от точки M(-5;4;3) до прямой $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$

$$\boxed{d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MN} \times \vec{s}\right]\right|}{\left|\vec{s}\right|}}$$