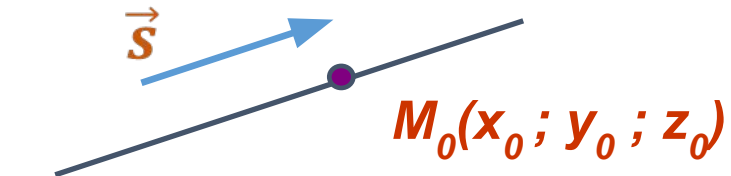


# Прямая в пространстве

## Каноническое уравнение прямой в пространстве

Пусть прямая проходит через точку:

$M_0(x_0; y_0; z_0)$  и направляющий вектор  $\vec{s} = (l; m; n)$

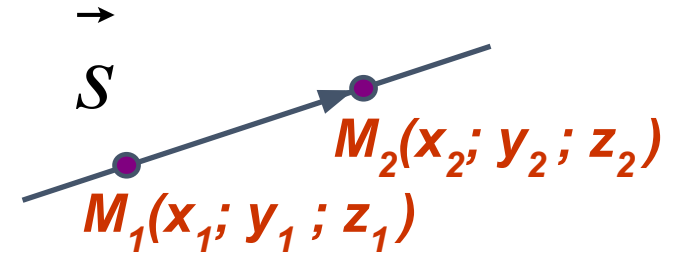


The diagram shows a 3D coordinate system with a line passing through a point  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ . A blue arrow labeled  $\vec{s}$  indicates the direction of the line.

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

## Параметрическое уравнение прямой в пространстве

## Уравнение прямой, проходящей через две различные точки в пространстве



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}$$

## Прямая в пространстве как пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

а) Направляющий

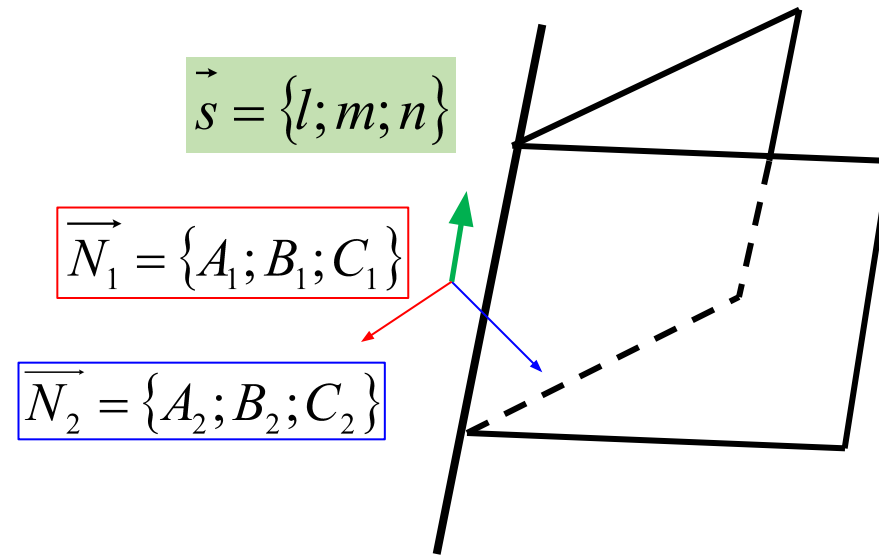
вектор  $\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l & m & n \end{matrix}$

$$\vec{s} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

б) Нахождение точки  $(x_0; y_0; z_0)$  на прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

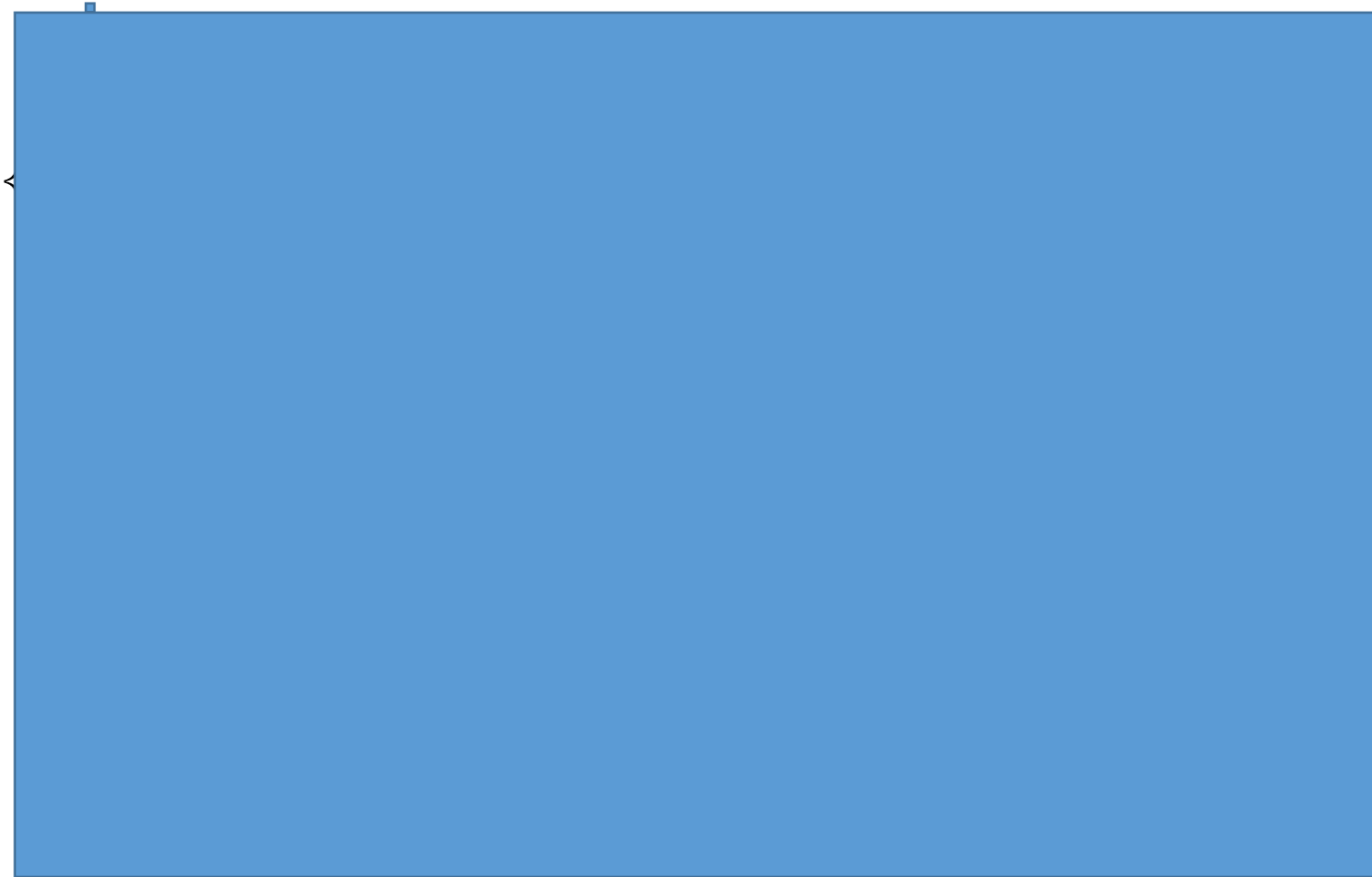
- канонические уравнения  
прямой



1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(2, 0, -3)$ :

а) параллельно вектору  $\mathbf{s} = (2, -3, 5)$ ;

б) параллельно прямой  $\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0. \end{array} \right\}$



Составить параметрические уравнения прямой:

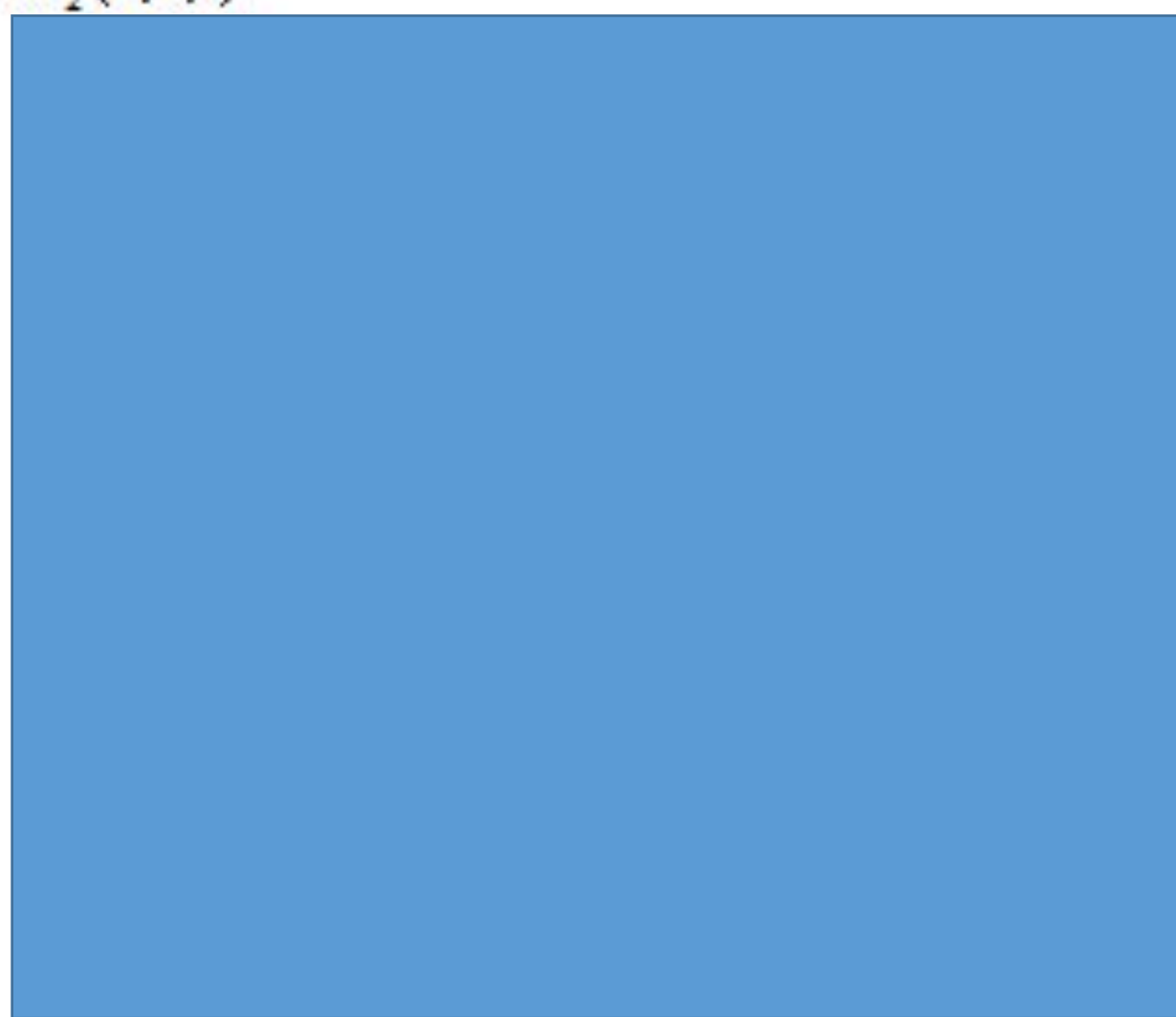
а) проходящей через точку  $M_0(1; 0; -1)$ , параллельно вектору  $\vec{a}(2; 3; 0)$ ;

б) проходящей через точки  $M_1(2; 2; 2)$  и  $M_2(2; 6; 1)$

Составить параметрические уравнения прямой:

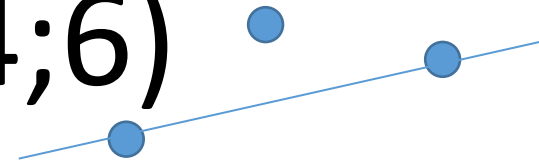
а) проходящей через точку  $M_0(1; 0; -1)$ , параллельно вектору  $\vec{a}(2; 3; 0)$ ;

б) проходящей через точки  $M_1(2; 2; 2)$  и  $M_2(2; 6; 1)$

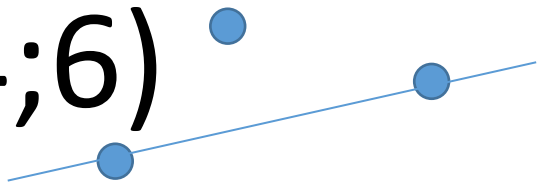


Проверить, лежат ли на одной  
прямой три данные точки

$(-3; 5; 4)$ ,  $(2; 4; 6)$ ,  $(2; 14; 6)$



# Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки $(-3;5;4)$ , $(2;4;6)$ , $(2;14;6)$



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$x_1 = -3 \quad y_1 = 5 \quad z_1 = 4$$

$$x_2 = 2 \quad y_2 = 14 \quad z_2 = 6$$

$$\frac{x + 3}{5} = \frac{y - 5}{9} = \frac{z - 4}{2}$$

$$\frac{2 + 3}{5} = \frac{4 - 5}{9} = \frac{6 - 4}{2}$$

$$1 = -1/9 = 1$$

$$\frac{x + 3}{2 + 3} = \frac{y - 5}{4 - 5} = \frac{z - 4}{6 - 4}$$

$$\frac{x + 3}{5} = \frac{y - 5}{-1} = \frac{z - 4}{2}$$

$$\frac{2 + 3}{5} = \frac{14 - 5}{-1} = \frac{6 - 4}{2}$$

$$1 = -9 = 1$$

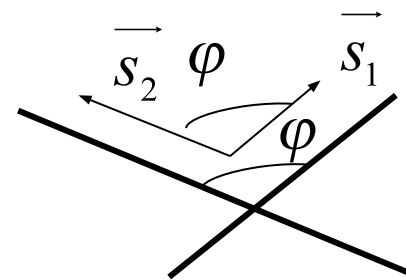
# Взаимное расположение прямых в пространстве

## Нахождение угла между прямыми

Прямые в пространстве заданы каноническими уравнениями, поэтому

угол между прямыми – это угол между направляющими векторами

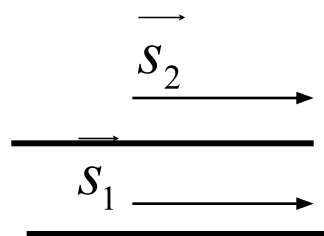
$$\cos \varphi = \frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$



## Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых

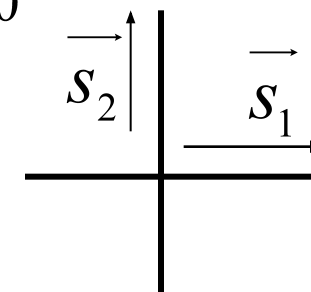
Условие параллельности  
 $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$  прямых

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2}$$



Условие перпендикулярности  
 $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$  прямых  
 $(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) = 0$

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2 = 0$$





Пересекаются ли прямые  $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$  и  $\frac{x}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{5}$ ?

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

# Расстояние от точки до прямой в пространстве

$$d = \frac{\left| \overrightarrow{M_0 M_1} \times \vec{s} \right|}{\left| \vec{s} \right|}$$

Найти расстояние между точкой  $M(0, 2, 3)$  и прямой

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$$

**Решение.**

Из уравнения прямой получим:

$\vec{s} = \{2; 1; 2\}$  - направляющий вектор прямой;

$M_1(3; 1; -1)$  - точка лежащая на прямой.

Тогда

$$\overline{M_0 M_1} = \{3 - 0; 1 - 2; -1 - 3\} = \{3; -1; -4\}$$

$$\overline{M_0 M_1} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}((-1) \cdot 2 - (-4) \cdot 1) - \mathbf{j}(3 \cdot 2 - (-4) \cdot 2) + \mathbf{k}(3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) = \{2; -14; 5\}$$

$$d = \frac{|\overline{M_0 M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-14)^2 + 5^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{9}} = \frac{15}{3} = 5$$

**Ответ:** расстояние от точки до прямой равно 5.

Найти расстояние от точки  $M(-5;4;3)$  до прямой  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$

$$d = \frac{\left| \overrightarrow{MN} \times \vec{s} \right|}{\left| \vec{s} \right|}$$