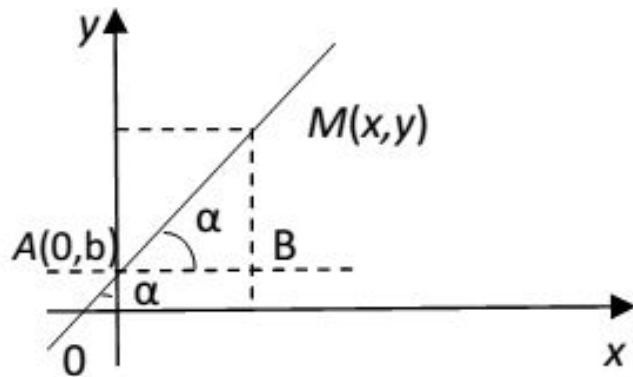


## 1. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой

### 1.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом



Пусть на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxy$  задана прямая  $l$ , не параллельная оси  $Oy$ . Её положение вполне определяется ординатой в точке пересечения прямой  $l$  с осью  $Oy$  и углом  $\alpha$  между положительным направлением оси  $Ox$  и прямой  $l$  (рис. 3.1). Обозначим через  $\alpha$  угол между прямыми  $l$  и  $AB$ :  $\alpha = \angle MAB$ .

Тогда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y-b}{x}$ . Отсюда имеем:  $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$  или

$$y = kx + b, \quad (3.1)$$

где  $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

Число  $k = \operatorname{tg} \alpha$  называется угловым коэффициентом прямой, а уравнение (3.1) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Уравнению (3.1) удовлетворяют координаты любой точки  $M(x, y)$  прямой  $l$ , а координаты любой точки  $N(x, y)$ , лежащей вне данной прямой, уравнению (3.1) не удовлетворяют.

## 1.2. Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение 1-й степени относительно  $x$  и  $y$  в общем виде:

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.3)$$

где  $A, B, C \in \mathbf{R}$  и  $A^2 + B^2 \neq 0$  (т. е.  $A$  и  $B$  не равны нулю одновременно).

Покажем, что уравнение (3.3) – уравнение прямой.

Рассмотрим два возможных случая.

1) Если  $B=0$ , тогда уравнение (3.3) примет вид  $Ax + C = 0$ , причём  $A \neq 0$ . Отсюда имеем уравнение  $x = -\frac{C}{A}$  – уравнение прямой, параллельной оси  $Oy$  и проходящей через точку  $(-\frac{C}{A}, 0)$ .

2) Если  $B \neq 0$ , то из уравнения (3.3) имеем  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$  – уравнение прямой с угловым коэффициентом  $k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$ .

Таким образом, уравнение (3.3) – уравнение прямой, которое называется общим уравнением прямой.

Частные случаи общего уравнения прямой:

1) если  $A=0$ , то (3.3) примет вид:  $y = -\frac{C}{B}$  – уравнение прямой, параллельной оси  $Ox$ ,

2) если  $B=0$ , то имеем уравнение  $x = -\frac{C}{A}$  – уравнение прямой параллельной оси  $Oy$ ,

3) если  $C=0$ , то получаем уравнение  $Ax + By = 0$  – уравнение прямой, проходящей через точку  $O(0,0)$ .

### 1.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая  $l$  проходит через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , и её направление характеризуется угловым коэффициентом  $k$ . Тогда уравнение прямой  $l$  можно записать так:  $y=kx+b$ , где  $b$  – пока неизвестная величина.

Так как точка  $M_0(x_0, y_0)$  лежит на прямой  $l$ , то её координаты удовлетворяют уравнению прямой:  $y_0=kx_0+b$ . Отсюда  $b=y_0-kx_0$ . Подставив значения  $b$  в уравнение  $y=kx+b$ , получим уравнение  $y=kx+y_0-kx_0$ , т. е.

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (3.4)$$

Заметим, что уравнение (3.4) с различными значениями  $k$  называется уравнениями пучка прямых с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$ . Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси  $Oy$ .

## 1.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  – точки, лежащие на прямой  $l$ . Уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(x_1, y_1)$ , имеет вид (см. формулу (3.4)):

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad (3.5)$$

где  $k$  – пока неизвестный коэффициент. Так как точка  $M_2 \in l$ , то координаты её удовлетворяют уравнению (3.5):  $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ . Отсюда имеем:

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Подставив значение  $k$  в уравнение (3.5), получим уравнение

прямой, проходящей через две точки  $M_1$  и  $M_2$ :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (3.6)$$

где  $x_1 \neq x_2$  и  $y_1 \neq y_2$ .

Если  $x_1 = x_2$ , то прямая  $l$ , проходящая через точки  $M_1$  и  $M_2$ , параллельна оси  $Oy$ :  $l \parallel Oy$ , и уравнение прямой  $l$  имеет вид:  $x = x_1$ .

Если  $y_1 = y_2$ , то прямая  $l$ , проходящая через точки  $M_1$  и  $M_2$ , параллельна оси  $Ox$ , и её уравнение имеет вид:  $y = y_1$ .

Из уравнения (3.6) можно получить так называемые каноническое и параметрическое уравнения прямой.

Обозначим через  $m = x_2 - x_1$ ,  $p = y_2 - y_1$  и введём вектор  $\overline{M_1 M_2} = (m, p)$ . Тогда уравнение (3.6), с учётом введённых обозначений, можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{p}, \quad (3.7)$$



где вектор  $\vec{S} = \overline{M_1M_2} = (m, p)$  – направляющий вектор прямой  $l$ .  
Уравнение (3.7) называется каноническим уравнением прямой.

Положим в уравнении (3.7)  $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{p} = t$ , где  $t$  – параметр. Тогда

$$\begin{cases} x = mt + x_1, \\ y = pt + y_1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.8) называют параметрическими уравнениями прямой.

## 1.5. Уравнение прямой в отрезках

Пусть  $M_1(a,0)$ ,  $M_2(0,b)$  – точки пересечения прямой  $l$  с осями  $Ox$  и  $Oy$  соответственно (рис. 3.2).

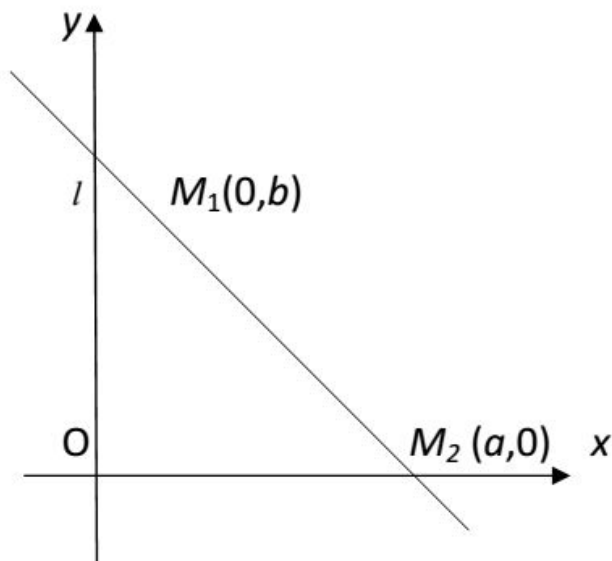


Рис. 3.2.

Тогда уравнение (3.6) примет вид:  $\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$  или

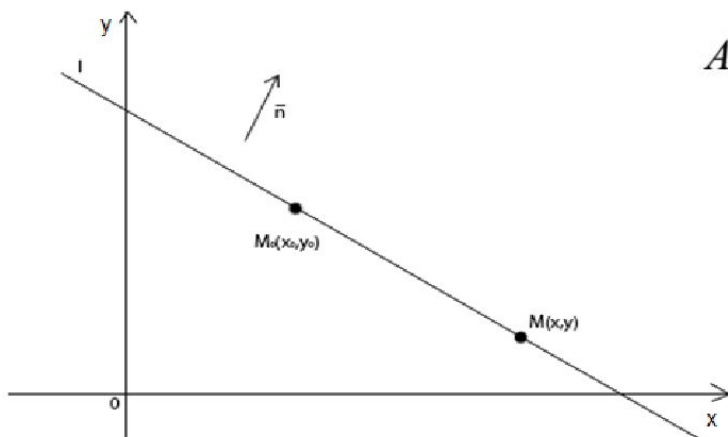
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) называется уравнением прямой в отрезках, так как числа  $a$  и  $b$  указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

## 1.6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть прямая  $l$  проходит через данную точку  $M_0(x_0, y_0)$  перпендикулярно данному вектору  $\bar{n} = (A, B)$ . Возьмём на прямой произвольную точку  $M(x, y)$  и введём в рассмотрение вектор  $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$  (см. рис. 3.3.). Так как векторы  $\bar{n}$  и  $\overline{M_0M}$  взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:  $\bar{n}\overline{M_0M} = 0$ :

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \quad (3.10)$$



Уравнение (3.10) называется уравнением прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

Вектор  $\bar{n} = (A, B)$ , перпендикулярный прямой, называется нормальным вектором прямой.

### Пример 1

Составить уравнение прямой, проходящей через точки  $A(-1,2)$ ,  $B(1, -3)$ . Записать полученное уравнение в различных видах.

Искомое уравнение имеет вид (см. (3.6)):

$$\frac{x+1}{1-(-1)} = \frac{y-2}{-3-2} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} \quad - \text{ каноническое уравнение прямой;}$$

направляющий вектор  $\vec{S} = (2, -5)$ , откуда имеем:  $5x+2y+1=0$  – общее уравнение прямой.

Выразим  $y$  из общего уравнения прямой:  $y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$  – уравнение прямой с угловым коэффициентом  $k = -\frac{5}{2}$ . Из канонического уравнения получим параметрическое уравнение.

Положим  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-5} = t$ ,  $t$  – параметр; имеем следующую систему:

$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -5t + 2 \end{cases} \quad - \text{ параметрические уравнения прямой.}$$

Из общего уравнения получим также уравнения прямой в отрезках; перенесем 1 с противоположным знаком в правую часть уравнения и разделим обе части полученного уравнения на  $(-1)$  в результате получим:  $-5x - 2y = 1$  или  $\frac{x}{-\frac{1}{5}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1$  – уравнение прямой в отрезках.



## 1.7. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

1) Пусть даны две прямые  $l_1$  и  $l_2$  (не параллельные оси  $Oy$ ).  
Уравнениями:  $l_1: y=k_1x+b_1$  и  $l_2: y=k_2x+b_2$  (см. рис. 3.4).

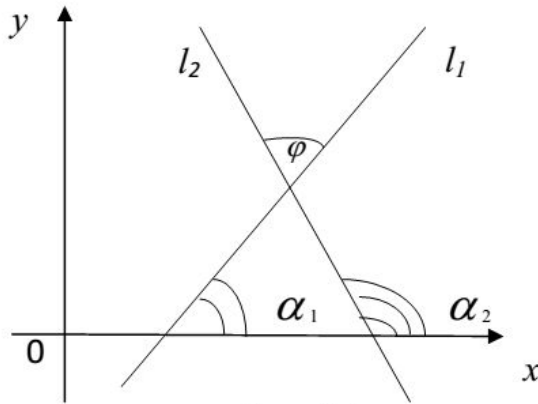


Рис. 3.4.

Найдём угол  $\varphi$  между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ . По теореме о внешнем угле треугольника  $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ . Отсюда  $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ . Так как  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ , то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tga}_2 - \operatorname{tga}_1}{1 + \operatorname{tga}_1 \cdot \operatorname{tga}_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad (3.13)$$

где  $k_1, k_2$  – угловые коэффициенты прямых  $l_1$  и  $l_2$  соответственно.



Заметим, что если требуется вычислить острый угол, то полагают

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 K_2} \right|.$$

Получим условия параллельности и перпендикулярности прямых:

$$\text{a) } l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Leftrightarrow k_2 - k_1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

$$\text{b) } l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$

3) Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы общими уравнениям  $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$  и  $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$  соответственно. Определим условия параллельности и перпендикулярности:

$$\text{a) } l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \text{ где } \bar{n}_1 = (A_1, B_1), \bar{n}_2 = (A_2, B_2) -$$

нормальные векторы прямых  $l_1$  и  $l_2$  соответственно,

$$\text{b) } l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \bar{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Для вычисления угла  $\varphi$  можно воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \quad (3.14)$$

## 1.8. Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы точка  $M_0(x_0, y_0)$  и прямая  $l$  уравнением  $Ax + By + C = 0$  (см. рис. 3.5).

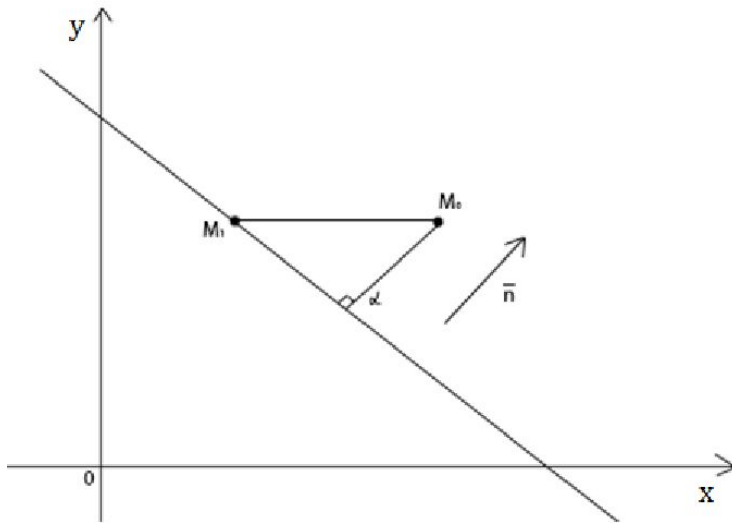


Рис. 3.5.

Найдём расстояние  $d$  от точки  $M_0$  до прямой  $l$ . Расстояние  $d$  от точки  $M_0$  до прямой  $l$  равно длине проекции вектора  $\overline{M_1M_0}$ , где  $M_1(x_1, y_1)$  – произвольная точка прямой  $l$  на направление нормального вектора  $\bar{n} = (A, B)$ . Значит,  $d = |\text{пр}_{\bar{n}} \overline{M_1M_0}| = \left| \frac{\overline{M_1M_0} \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка  $M_1(x_1, y_1)$  принадлежит прямой  $l$ , то  $Ax_1 + By_1 + C = 0$  или  $C = -Ax_1 - By_1$ . Поэтому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.15)$$

## Пример 2

5.12

Показать, что прямые  $2x+5y+3=0$  и  $-4x-10y+21=0$  параллельны, и найти расстояние между ними.

Решение.

1) Данные прямые параллельны, так как отношение соответствующих коэффициентов при переменных равны:  $\frac{2}{-4} = \frac{5}{10}$ .

2) Подберём точку, лежащую на прямой  $l_1: 2x+5y+3=0$ . Такой точкой, например, будет точка  $A(1,1)$ . Искомым расстоянием будет расстояние точки  $A$  до прямой  $l_2: -4x+0y+21=0$ . Воспользуемся формулой (3.15):

$$d = \frac{|(-4) \cdot 1 + (-10) \cdot 1 + 21|}{\sqrt{(-4)^2 + (10)^2}} = \frac{7}{\sqrt{116}} = \frac{7}{2\sqrt{29}} = \frac{7\sqrt{29}}{58}.$$

Ответ:  $d = \frac{7\sqrt{29}}{58}$ .