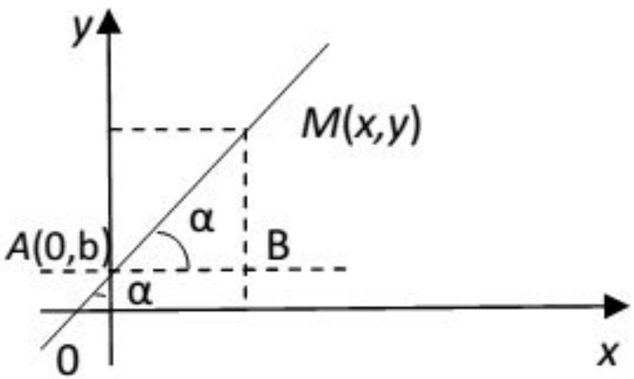
# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## 1. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой

### 1.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом




Пусть на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат *Oxy* задана прямая *l*, не параллельная оси *Oy*. Её положение вполне определяется ординатой в точки пересечения прямой *l* с осью *Oy* и углом α между положительным направлением оси *Ox* и прямой *l* (рис. 3.1). Обозначим через α угол между прямыми *l* и *AB*: $\alpha = \angle MAB$.

Тогда $tg\,\alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y-b}{x}$. Отсюда имеем: $y = x\,tg\,\alpha + b$ или

$$y = kx + b, \tag{3.1}$$

где $k = tg\alpha$.

Число $k = tg\alpha$ называется <u>угловым коэффициентом прямой</u>, а уравнение (3.1) называется <u>уравнением прямой с угловым коэффициентом.</u>

Уравнению (3.1) удовлетворяют координаты любой точки *M(x,y)* прямой *l*, а координаты любой точки *N(x,y)*, лежащей вне данной прямой, уравнению (3.1) не удовлетворяют.

## 1.2. Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение 1-й степени относительно $x$ и $y$ в общем виде:

$$Ax+By+C=0, \qquad (3.3)$$

где $A, B, C \in \boldsymbol{R}$ и $A^2 + B^2 \neq 0$ (т. е. $A$ и $B$ не равны нулю одновременно).

Покажем, что уравнение (3.3) – уравнение прямой.

Рассмотрим два возможных случая.

1) Если $B$=0, тогда уравнение (3.3) примет вид $Ax+C=0$, причём $A\neq 0$. Отсюда имеем уравнение $x = -\frac{C}{A}$ – уравнение прямой, параллельной оси $Oy$ и проходящей через точку $(-\frac{C}{A}, 0)$.

2) Если $B\neq 0$, то из уравнения (3.3) имеем $y= -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\alpha = -\frac{A}{B}$.

Таким образом, уравнение (3.3) – уравнение прямой, которое называется <u>общим уравнением прямой</u>.

Частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A$=0, то (3.3) примет вид: $y=-\frac{C}{B}$ – уравнение прямой, параллельной оси $Ox$,

2) если $B$=0, то имеем уравнение $x=-\frac{C}{A}$ – уравнение прямой параллельной оси $Oy$,

3) если $C$=0, то получаем уравнение $Ax+By$=0 – уравнение прямой, проходящей через точку $O(0,0)$.

## 1.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая $l$ проходит через точку $M_0$ $(x_0, y_0)$, и её направление характеризуется угловым коэффициентом $k$. Тогда уравнение прямой $l$ можно записать так: $y=kx+b$, где $b$ – пока неизвестная величина.

Так как точка $M_0(x_0,y_0)$ лежит на прямой $l$, то её координаты удовлетворяют уравнению прямой: $y_0=kx_0+b$. Отсюда $b=y_0-kx_0$. Подставив значения $b$ в уравнение $y=kx+b$, получим уравнение $y=kx+y_0-kx_0$, т. е.

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (3.4)$$

Заметим, что уравнение (3.4) с различными значениями $k$ называется уравнениями пучка прямых с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$. Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси $Oy$.

5.4

## 1.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ – точки, лежащие на прямой $l$. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$, имеет вид (см. формулу (3.4)):

$$y - y_1 = k\,(x - x_1), \tag{3.5}$$

где $k$– пока неизвестный коэффициент. Так как точка $M_2 \in l$, то координаты её удовлетворяют уравнению (3.5): $y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$. Отсюда имеем: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставив значение $k$ в уравнение (3.5), получим уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1$ и $M_2$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{3.6}$$

где $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$.

Если $x_1 = x_2$, то прямая $b$, проходящая через точки $M_1$ и $M_2$, параллельна оси $Oy$: $l \,||\, Oy$, и уравнение прямой $l$ имеет вид: $x = x_1$.

Если $y_1 = y_2$, то прямая $l$, проходящая через точки $M_1$ и $M_2$, параллельна оси $Ox$, и её уравнение имеет вид: $y = y_1$.

Из уравнения (3.6) можно получить так называемые каноническое и параметрическое уравнения прямой.

Обозначим через $m = x_2 - x_1$, $p = y_2 - y_1$ и введём вектор $\overline{M_1 M_2} = (m, p)$. Тогда уравнение (3.6), с учётом введённых обозначений, можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{p}, \tag{3.7}$$

где вектор $\bar{S} = \overline{M_1M_2} = (m, p)$ – <u>направляющий вектор прямой</u> $l$. Уравнение (3.7) называется <u>каноническим уравнением прямой.</u>

Положим в уравнении (3.7) $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{p} = t$, где $t$ – параметр. Тогда

$$\begin{cases} x = mt + x_1, \\ y = pt + y_1. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Уравнения (3.8) называют <u>параметрическими уравнениями прямой.</u>

## 1.5. Уравнение прямой в отрезках

Пусть $M_1(a,0)$, $M_2(0,b)$ – точки пересечения прямой $l$ с осями $Ox$ и $Oy$ соответственно (рис. 3.2).

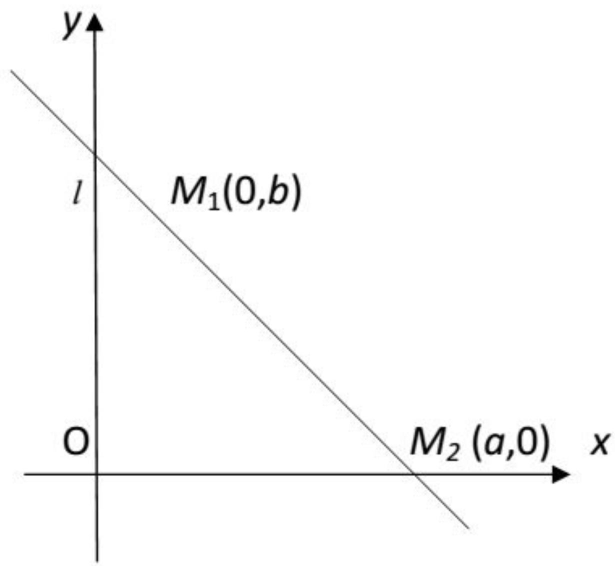



Рис. 3.2.

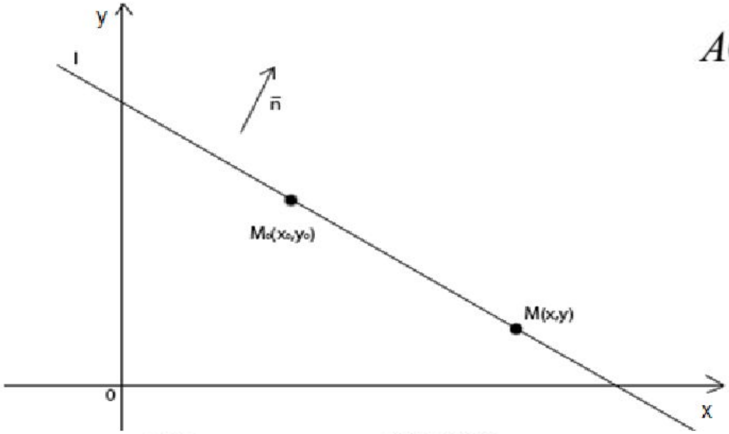
Тогда уравнение (3.6) примет вид: $\frac{y-o}{b-o}=\frac{x-a}{o-a}$ или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1. \qquad (3.9)$$

Уравнение (3.9) называется уравнением прямой в отрезках, так как числа $a$ и $b$ указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

## 1.6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть прямая $l$ проходит через данную точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\bar{n} = (A, B)$. Возьмём на прямой произвольную точку $M(x,y)$ и введём в рассмотрение вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$(см. рис. 3.3. ). Так как векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n}\overline{M_0M} = 0$:




$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (3.10)$$

Уравнение (3.10) называется уравнением прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

Вектор $\bar{n} = (A, B)$, перпендикулярный прямой, называется нормальным вектором прямой.

## Пример 1



Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1,2)$, $B(1,-3)$. Записать полученное уравнение в различных видах.

Искомое уравнение имеет вид (см. (3.6)):

$\frac{x+1}{1-(-1)} = \frac{y-2}{-3-2}$ или $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2}$ – каноническое уравнение прямой; направляющий вектор $\bar{S} = (2,-5)$, откуда имеем: $5x+2y+1=0$ – общее уравнение прямой.

Выразим $y$ из общего уравнения прямой: $y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -\frac{5}{2}$. Из канонического уравнения получим параметрическое уравнение.

Положим $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-5} = t$, $t$ – параметр; имеем следующую систему:

$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -5t + 2 \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой.

Из общего уравнения получим также уравнения прямой в отрезках; перенесем 1 с противоположным знаком в правую часть уравнения и разделим обе части полученного уравнения на $(-1)$ в результате получим: $-5x - 2y = 1$ или $\frac{x}{-\frac{1}{5}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1$ – уравнение прямой в отрезках.

## 1.7. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

1) Пусть даны две прямые $l_1$ и $l_2$ (не параллельные оси O$y$). Уравнениями: $l_1$:$y$=$k_1x$+$b_1$ и $l_2$:$y$=$k_2x$+$b_2$ (см. рис. 3.4).

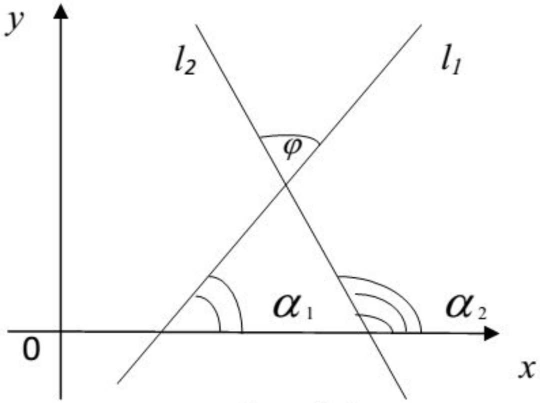



Рис. 3.4.

Найдём угол $\varphi$ между прямыми $l_1$ и $l_2$. По теореме о внешнем угле треугольника $\alpha_2 = \alpha_1+\varphi$. Отсюда $\varphi = \alpha_2-\alpha_1$. Так как $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то $tg\varphi= tg(\ \alpha_2 - \alpha_1)=\frac{tga_2-tga_2}{1+tga_1\cdot tga_2} = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Таким образом,

$$tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}, \qquad (3.13)$$

где $k_1$, $k_2$ – угловые коэффициенты прямых $l_1$ и $l_2$ соответственно.

Заметим, что если требуется вычислить острый угол, то полагают $tg\varphi = \left|\frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 K_2}\right|$.

Получим условия параллельности и перпендикулярности прямых:

a) $l_1 \| l_2 <=> \varphi = 0 <=> tg\,\varphi = 0 <=> k_2 - k_1 = 0 <=> k_1 = k_2,$

b) $l_1 \perp l_2 <=> \varphi = \frac{\pi}{2} <=> ctg\,\varphi = 0 <=> \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0 <=> k_1 k_2 = -1.$

3) Пусть прямые $l_1$ и $l_2$ заданы общими уравнениям $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Определим условия параллельности и перпендикулярности:

a) $l_1 \| l_2 <=> \pi_1 \| \pi_2 <=> \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, где $\overline{n_1} = (A_1, B_2), \overline{n_2} = (A_2, B_2)$ – нормальные векторы прямых $l_1$ и $l_2$ соответственно,

b) $l_1 \perp l_2 <=> \overline{n_1}\,\overline{n_2} = 0 <=> A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

Для вычисления угла $\varphi$ можно воспользоваться формулой

$$tg\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \quad (3.14)$$

# 1.8. Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы точка $M_0(x_0,y_0)$ и прямая $l$ уравнением $Ax+By+C=0$ (см. рис. 3.5).

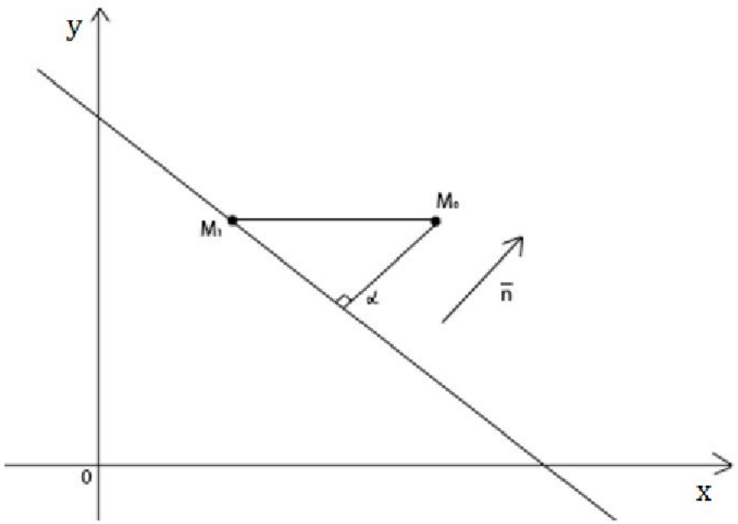



Рис. 3.5.

Найдём расстояние $d$ от точки $M_0$ до прямой $l$. Расстояние $d$ от точки $M_0$ до прямой $l$ равно длине проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1,y_1)$ – произвольная точки прямой $l$ на направление нормального вектора $\bar{n}=(A,B)$.Значит,$d=|\text{пр}_{\bar{n}}\overline{M_1M_0}| = \left|\frac{\overline{MM_0}\bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B|}{\sqrt{A^2+B^2}} =$

$$= \frac{|Ax_0+By_0-Ax_y-By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Так как точка $M_1(x_1,y_1)$ принадлежит прямой $l$, то $Ax_1+By_1+C=0$ или $C=-Ax_1-By_1$. Поэтому

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.15)$$

## Пример 2



Показать, что прямые $2x+5y+3=0$ и $-4x-10y+21=0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

Решение.

1) Данные прямые параллельны, так как отношение соответствующих коэффициентов при переменных равны: $\frac{2}{-4}=\frac{5}{10}$.

2) Подберём точку, лежащую на прямой $l_1$:$2x+5y+3=0$. Такой

точкой, например, будет точка $A(1,1)$. Искомым расстоянием будет расстояние точки $A$ до прямой $l_2$: $-4x+0y+21=0$. Воспользуемся формулой (3.15):

$$d=\frac{|(-4)\cdot 1+(-10)\cdot 1+21|}{\sqrt{(-4)^2+(10)^2}}=\frac{7}{\sqrt{116}}=\frac{7}{2\sqrt{29}}=\frac{7\sqrt{29}}{58}.$$

Ответ: $d=\frac{7\sqrt{29}}{58}$.