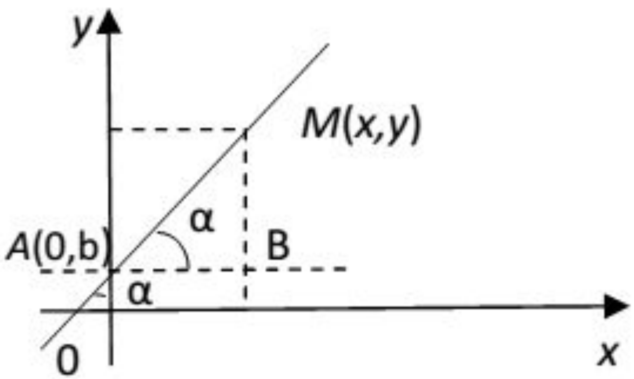
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой

1.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом



Пусть на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат *Oxy* задана прямая *l*, не параллельная оси *Oy*. Её положение вполне определяется ординатой в точки пересечения прямой *l* с осью *Oy* и углом α между положительным направлением оси *Ox* и прямой *l* (рис. 3.1). Обозначим через α угол между прямыми *l* и AB: $\alpha = \angle MAB$.

Тогда $tg\,\alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y-b}{x}$. Отсюда имеем: $y = x\,tg\,\alpha + b$ или

$$y = kx + b, \qquad (3.1)$$

где $k = tg\alpha$.

Число $k = tg\alpha$ называется угловым коэффициентом прямой, а уравнение (3.1) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Уравнению (3.1) удовлетворяют координаты любой точки $M(x,y)$ прямой *l*, а координаты любой точки $N(x,y)$, лежащей вне данной прямой, уравнению (3.1) не удовлетворяют.

1.2. Общее уравнение прямой

5.2

Рассмотрим уравнение 1-й степени относительно x и y в общем виде:

$$Ax+By+C=0, \quad (3.3)$$

где $A, B, C \in \boldsymbol{R}$ и $A^2 + B^2 \neq 0$ (т. е. A и B не равны нулю одновременно).

Покажем, что уравнение (3.3) – уравнение прямой.

Рассмотрим два возможных случая.

1) Если $B=0$, тогда уравнение (3.3) примет вид $Ax+C=0$, причём $A\neq 0$. Отсюда имеем уравнение $x = -\frac{C}{A}$ – уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $(-\frac{C}{A}, 0)$.

2) Если $B\neq 0$, то из уравнения (3.3) имеем $y= -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\alpha = -\frac{A}{B}$.

Таким образом, уравнение (3.3) – уравнение прямой, которое называется <u>общим уравнением прямой</u>.

Частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A=0$, то (3.3) примет вид: $y=-\frac{C}{B}$ – уравнение прямой, параллельной оси Ox,

2) если $B=0$, то имеем уравнение $x=-\frac{C}{A}$ – уравнение прямой параллельной оси Oy,

3) если $C=0$, то получаем уравнение $Ax+By=0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $O(0,0)$.

1.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая l проходит через точку M_0 (x_0, y_0), и её направление характеризуется угловым коэффициентом k. Тогда уравнение прямой l можно записать так: $y=kx+b$, где b – пока неизвестная величина.

Так как точка $M_0(x_0,y_0)$ лежит на прямой l, то её координаты удовлетворяют уравнению прямой: $y_0=kx_0+b$. Отсюда $b=y_0-kx_0$. Подставив значения b в уравнение $y=kx+b$, получим уравнение $y=kx+y_0-kx_0$, т. е.

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{3.4}$$

Заметим, что уравнение (3.4) с различными значениями k называется уравнениями пучка прямых с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$. Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Oy.

5.4

1.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ – точки, лежащие на прямой l. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$, имеет вид (см. формулу (3.4)):

$$y - y_1 = k\,(x - x_1), \tag{3.5}$$

где k– пока неизвестный коэффициент. Так как точка $M_2 \in l$, то координаты её удовлетворяют уравнению (3.5): $y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$. Отсюда имеем: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставив значение k в уравнение (3.5), получим уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{3.6}$$

где $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$.

Если $x_1 = x_2$, то прямая b, проходящая через точки M_1 и M_2, параллельна оси Oy: $l \parallel Oy$, и уравнение прямой l имеет вид: $x = x_1$.

Если $y_1 = y_2$, то прямая l, проходящая через точки M_1 и M_2, параллельна оси Ox, и её уравнение имеет вид: $y = y_1$.

Из уравнения (3.6) можно получить так называемые каноническое и параметрическое уравнения прямой.

Обозначим через $m = x_2 - x_1$, $p = y_2 - y_1$ и введём вектор $\overline{M_1 M_2} = (m, p)$. Тогда уравнение (3.6), с учётом введённых обозначений, можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{p}, \tag{3.7}$$

где вектор $\bar{S} = \overline{M_1 M_2} = (m, p)$ – направляющий вектор прямой l. Уравнение (3.7) называется каноническим уравнением прямой.

Положим в уравнении (3.7) $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{p} = t$, где t – параметр. Тогда

$$\begin{cases} x = mt + x_1, \\ y = pt + y_1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.8) называют параметрическими уравнениями прямой.

1.5. Уравнение прямой в отрезках

Пусть $M_1(a,0)$, $M_2(0,b)$ – точки пересечения прямой l с осями Ox и Oy соответственно (рис. 3.2).

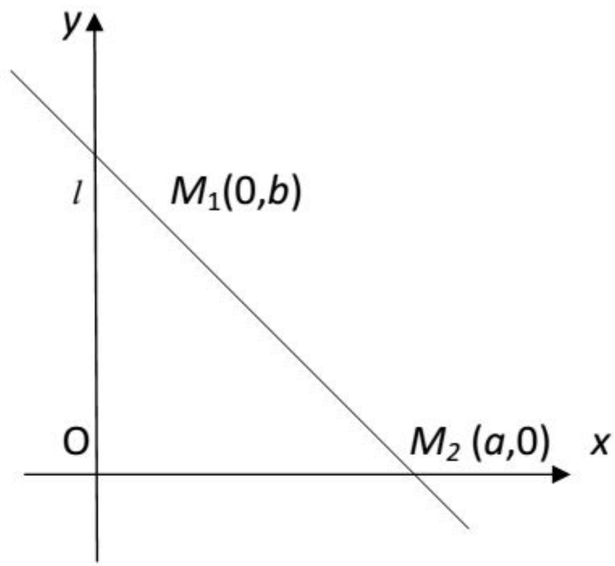


Рис. 3.2.

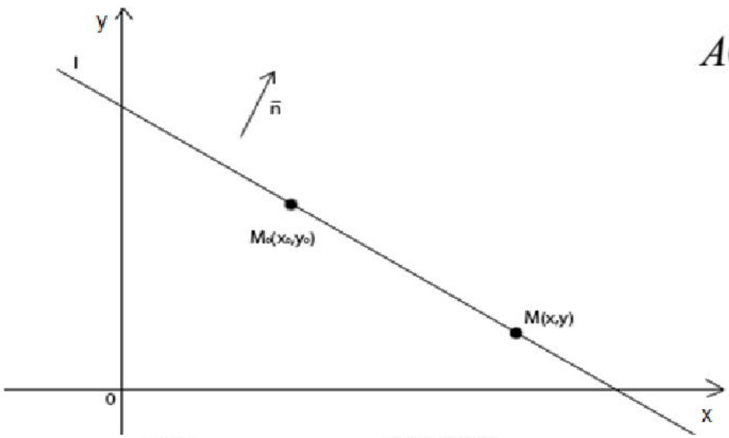
Тогда уравнение (3.6) примет вид: $\frac{y-o}{b-o} = \frac{x-a}{o-a}$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1. \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) называется уравнением прямой в отрезках, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

1.6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть прямая l проходит через данную точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\bar{n} = (A, B)$. Возьмём на прямой произвольную точку $M(x,y)$ и введём в рассмотрение вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$(см. рис. 3.3.). Так как векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n}\overline{M_0M} = 0$:



$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (3.10)$$

Уравнение (3.10) называется уравнением прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

Вектор $\bar{n} = (A, B)$, перпендикулярный прямой, называется нормальным вектором прямой.

Пример 1

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1,2)$, $B(1,-3)$. Записать полученное уравнение в различных видах.

Искомое уравнение имеет вид (см. (3.6)):
$\frac{x+1}{1-(-1)}=\frac{y-2}{-3-2}$ или $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}$ – каноническое уравнение прямой; направляющий вектор $\bar{S}=(2,-5)$, откуда имеем: $5x+2y+1=0$ – общее уравнение прямой.

Выразим y из общего уравнения прямой: $y=-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=-\frac{5}{2}$. Из канонического уравнения получим параметрическое уравнение.

Положим $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-5}=t$, t – параметр; имеем следующую систему:
$\begin{cases} x=2t-1, \\ y=-5t+2 \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой.

Из общего уравнения получим также уравнения прямой в отрезках; перенесем 1 с противоположным знаком в правую часть уравнения и разделим обе части полученного уравнения на (-1) в результате получим: $-5x-2y=1$ или $\frac{x}{-\frac{1}{5}}+\frac{y}{-\frac{1}{2}}=1$ – уравнение прямой в отрезках.

1.7. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

1) Пусть даны две прямые l_1 и l_2 (не параллельные оси Оy). Уравнениями: l_1:y=k_1x+b_1 и l_2:y=k_2x+b_2 (см. рис. 3.4).

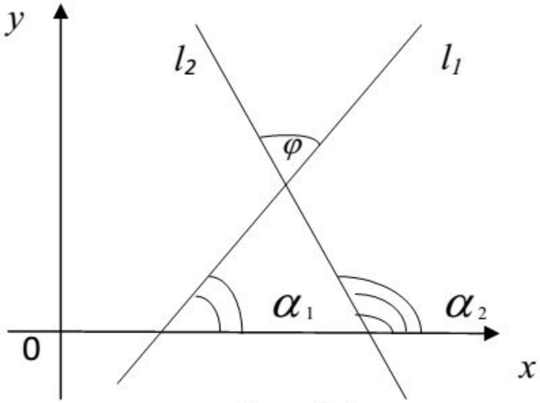


Рис. 3.4.

Найдём угол φ между прямыми l_1 и l_2. По теореме о внешнем угле треугольника $\alpha_2 = \alpha_1+\varphi$. Отсюда $\varphi = \alpha_2-\alpha_1$. Так как $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то $tg\varphi = tg(\ \alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tga_2 - tga_2}{1+tga_1 \cdot tga_2} = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Таким образом,

$$tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}, \qquad (3.13)$$

где k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2 соответственно.

Заметим, что если требуется вычислить острый угол, то полагают $tg\varphi = \left|\frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 K_2}\right|$.

Получим условия параллельности и перпендикулярности прямых:

a) $l_1 \| l_2 <=> \varphi = 0 <=> tg\,\varphi = 0 <=> k_2 - k_1 = 0 <=> k_1 = k_2,$

b) $l_1 \perp l_2 <=> \varphi = \frac{\pi}{2} <=> ctg\,\varphi = 0 <=> \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0 <=> k_1 k_2 = -1.$

3) Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениям $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Определим условия параллельности и перпендикулярности:

a) $l_1 \| l_2 <=> \pi_1 \| \pi_2 <=> \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, где $\overline{n_1} = (A_1, B_2), \overline{n_2} = (A_2, B_2)$ – нормальные векторы прямых l_1 и l_2 соответственно,

b) $l_1 \perp l_2 <=> \overline{n_1}\,\overline{n_2} = 0 <=> A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

Для вычисления угла φ можно воспользоваться формулой

$$tg\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (3.14)$$

1.8. Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы точка $M_0(x_0,y_0)$ и прямая l уравнением
$Ax+By+C=0$ (см. рис. 3.5).

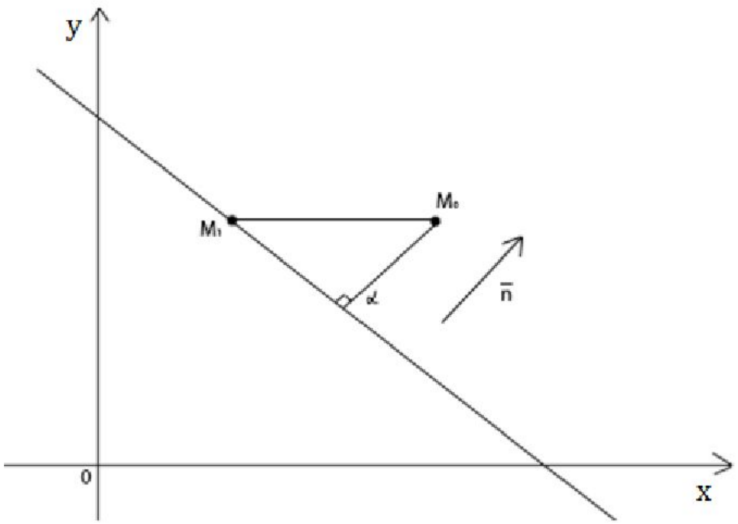


Рис. 3.5.

Найдём расстояние d от точки M_0 до прямой l. Расстояние d от точки M_0 до прямой l равно длине проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1,y_1)$ – произвольная точки прямой l на направление нормального вектора $\bar{n}=(A,B)$.Значит,$d=|\text{пр}_{\bar{n}}\overline{M_1M_0}|=\left|\frac{\overline{MM_0}\bar{n}}{|\bar{n}|}\right|=\frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$

$$=\quad\frac{|Ax_0+By_0-Ax_y-By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Так как точка $M_1(x_1,y_1)$ принадлежит прямой l, то $Ax_1+By_1+C=0$ или $C=-Ax_1-By_1$. Поэтому

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.15)$$

Пример 2

Показать, что прямые $2x+5y+3=0$ и $-4x-10y+21=0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

Решение.

1) Данные прямые параллельны, так как отношение соответствующих коэффициентов при переменных равны: $\frac{2}{-4}=\frac{5}{10}$.

2) Подберём точку, лежащую на прямой l_1:$2x+5y+3=0$. Такой точкой, например, будет точка $A(1,1)$. Искомым расстоянием будет расстояние точки A до прямой l_2: $-4x+0y+21=0$. Воспользуемся формулой (3.15):

$$d=\frac{|(-4)\cdot 1+(-10)\cdot 1+21|}{\sqrt{(-4)^2+(10)^2}}=\frac{7}{\sqrt{116}}=\frac{7}{2\sqrt{29}}=\frac{7\sqrt{29}}{58}.$$

Ответ: $d=\frac{7\sqrt{29}}{58}$.