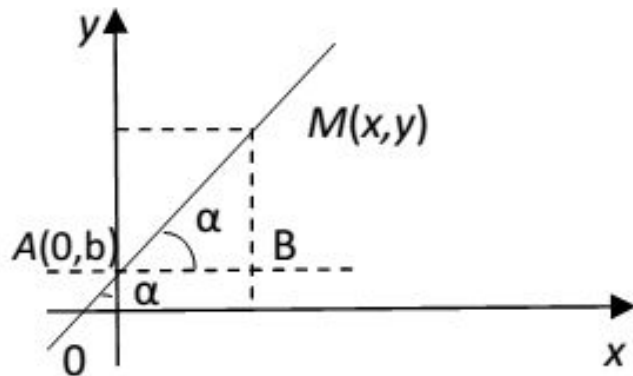


1. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой

1.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом



Пусть на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат Oxy задана прямая l , не параллельная оси Oy . Её положение вполне определяется ординатой в точке пересечения прямой l с осью Oy и углом α между положительным направлением оси Ox и прямой l (рис. 3.1). Обозначим через α угол между прямыми l и AB : $\alpha = \angle MAB$.

Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y-b}{x}$. Отсюда имеем: $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$ или

$$y = kx + b, \quad (3.1)$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ называется угловым коэффициентом прямой, а уравнение (3.1) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Уравнению (3.1) удовлетворяют координаты любой точки $M(x, y)$ прямой l , а координаты любой точки $N(x, y)$, лежащей вне данной прямой, уравнению (3.1) не удовлетворяют.

1.2. Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение 1-й степени относительно x и y в общем виде:

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.3)$$

где $A, B, C \in \mathbf{R}$ и $A^2 + B^2 \neq 0$ (т. е. A и B не равны нулю одновременно).

Покажем, что уравнение (3.3) – уравнение прямой.

Рассмотрим два возможных случая.

1) Если $B=0$, тогда уравнение (3.3) примет вид $Ax + C = 0$, причём $A \neq 0$. Отсюда имеем уравнение $x = -\frac{C}{A}$ – уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $(-\frac{C}{A}, 0)$.

2) Если $B \neq 0$, то из уравнения (3.3) имеем $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$.

Таким образом, уравнение (3.3) – уравнение прямой, которое называется общим уравнением прямой.

Частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A=0$, то (3.3) примет вид: $y = -\frac{C}{B}$ – уравнение прямой, параллельной оси Ox ,

2) если $B=0$, то имеем уравнение $x = -\frac{C}{A}$ – уравнение прямой параллельной оси Oy ,

3) если $C=0$, то получаем уравнение $Ax + By = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $O(0,0)$.

1.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, и её направление характеризуется угловым коэффициентом k . Тогда уравнение прямой l можно записать так: $y=kx+b$, где b – пока неизвестная величина.

Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой l , то её координаты удовлетворяют уравнению прямой: $y_0=kx_0+b$. Отсюда $b=y_0-kx_0$. Подставив значения b в уравнение $y=kx+b$, получим уравнение $y=kx+y_0-kx_0$, т. е.

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (3.4)$$

Заметим, что уравнение (3.4) с различными значениями k называется уравнениями пучка прямых с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Oy .

1.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – точки, лежащие на прямой l . Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$, имеет вид (см. формулу (3.4)):

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad (3.5)$$

где k – пока неизвестный коэффициент. Так как точка $M_2 \in l$, то координаты её удовлетворяют уравнению (3.5): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда имеем:

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставив значение k в уравнение (3.5), получим уравнение

прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2 :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (3.6)$$

где $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$.

Если $x_1 = x_2$, то прямая l , проходящая через точки M_1 и M_2 , параллельна оси Oy : $l \parallel Oy$, и уравнение прямой l имеет вид: $x = x_1$.

Если $y_1 = y_2$, то прямая l , проходящая через точки M_1 и M_2 , параллельна оси Ox , и её уравнение имеет вид: $y = y_1$.

Из уравнения (3.6) можно получить так называемые каноническое и параметрическое уравнения прямой.

Обозначим через $m = x_2 - x_1$, $p = y_2 - y_1$ и введём вектор $\overline{M_1 M_2} = (m, p)$. Тогда уравнение (3.6), с учётом введённых обозначений, можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{p}, \quad (3.7)$$



где вектор $\vec{S} = \overline{M_1M_2} = (m, p)$ – направляющий вектор прямой l .
Уравнение (3.7) называется каноническим уравнением прямой.

Положим в уравнении (3.7) $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{p} = t$, где t – параметр. Тогда

$$\begin{cases} x = mt + x_1, \\ y = pt + y_1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.8) называют параметрическими уравнениями прямой.

1.5. Уравнение прямой в отрезках

Пусть $M_1(a,0)$, $M_2(0,b)$ – точки пересечения прямой l с осями Ox и Oy соответственно (рис. 3.2).

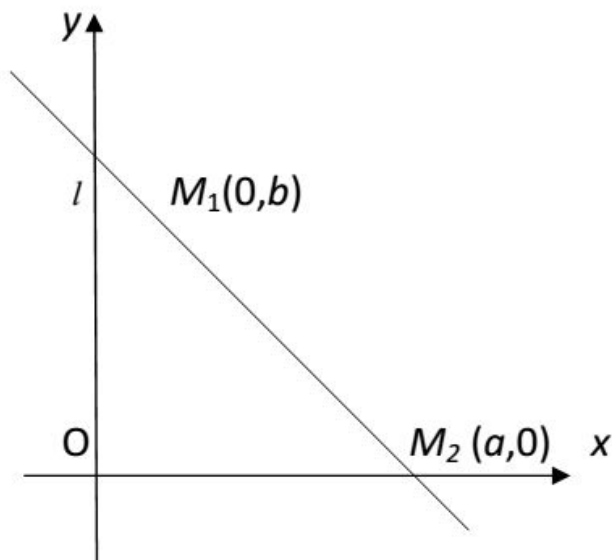


Рис. 3.2.

Тогда уравнение (3.6) примет вид: $\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$ или

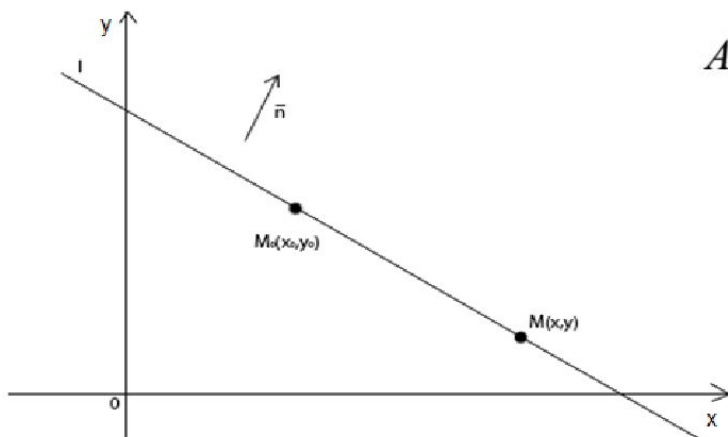
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) называется уравнением прямой в отрезках, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

1.6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть прямая l проходит через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\bar{n} = (A, B)$. Возьмём на прямой произвольную точку $M(x, y)$ и введём в рассмотрение вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ (см. рис. 3.3.). Так как векторы \bar{n} и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n}\overline{M_0M} = 0$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \quad (3.10)$$



Уравнение (3.10) называется уравнением прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

Вектор $\bar{n} = (A, B)$, перпендикулярный прямой, называется нормальным вектором прямой.

Пример 1

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1,2)$, $B(1, -3)$. Записать полученное уравнение в различных видах.

Искомое уравнение имеет вид (см. (3.6)):

$$\frac{x+1}{1-(-1)} = \frac{y-2}{-3-2} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} \quad - \text{ каноническое уравнение прямой;}$$

направляющий вектор $\vec{S} = (2, -5)$, откуда имеем: $5x+2y+1=0$ – общее уравнение прямой.

Выразим y из общего уравнения прямой: $y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -\frac{5}{2}$. Из канонического уравнения получим параметрическое уравнение.

Положим $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-5} = t$, t – параметр; имеем следующую систему:

$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -5t + 2 \end{cases} \quad - \text{ параметрические уравнения прямой.}$$

Из общего уравнения получим также уравнения прямой в отрезках; перенесем 1 с противоположным знаком в правую часть уравнения и разделим обе части полученного уравнения на (-1) в результате получим: $-5x - 2y = 1$ или $\frac{x}{-\frac{1}{5}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1$ – уравнение прямой в отрезках.

1.7. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

1) Пусть даны две прямые l_1 и l_2 (не параллельные оси Oy).
Уравнениями: $l_1: y=k_1x+b_1$ и $l_2: y=k_2x+b_2$ (см. рис. 3.4).

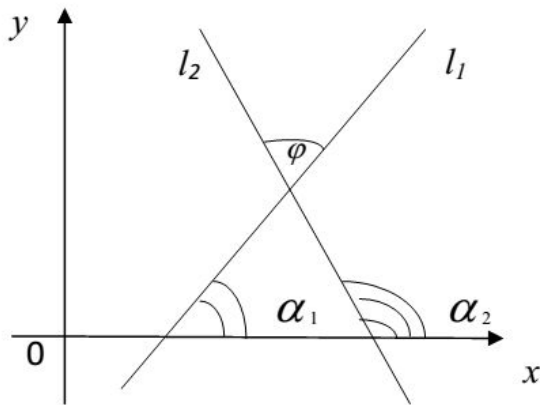


Рис. 3.4.

Найдём угол φ между прямыми l_1 и l_2 . По теореме о внешнем угле треугольника $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$. Отсюда $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Так как $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tga}_2 - \operatorname{tga}_1}{1 + \operatorname{tga}_1 \cdot \operatorname{tga}_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad (3.13)$$

где k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2 соответственно.



Заметим, что если требуется вычислить острый угол, то полагают

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 K_2} \right|.$$

Получим условия параллельности и перпендикулярности прямых:

$$\text{a) } l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Leftrightarrow k_2 - k_1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

$$\text{b) } l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$

3) Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениям $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ соответственно. Определим условия параллельности и перпендикулярности:

$$\text{a) } l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \text{ где } \bar{n}_1 = (A_1, B_1), \bar{n}_2 = (A_2, B_2) -$$

нормальные векторы прямых l_1 и l_2 соответственно,

$$\text{b) } l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \bar{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Для вычисления угла φ можно воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \quad (3.14)$$

1.8. Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы точка $M_0(x_0, y_0)$ и прямая l уравнением $Ax + By + C = 0$ (см. рис. 3.5).

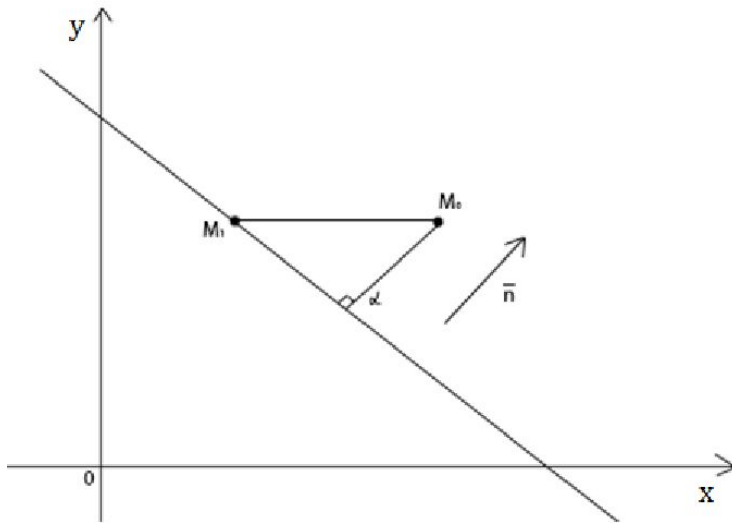


Рис. 3.5.

Найдём расстояние d от точки M_0 до прямой l . Расстояние d от точки M_0 до прямой l равно длине проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1, y_1)$ – произвольная точки прямой l на направление нормального вектора $\bar{n} = (A, B)$. Значит, $d = |\text{пр}_{\bar{n}} \overline{M_1M_0}| = \left| \frac{\overline{M_1M_0} \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит прямой l , то $Ax_1 + By_1 + C = 0$ или $C = -Ax_1 - By_1$. Поэтому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.15)$$

Пример 2

5.12

Показать, что прямые $2x+5y+3=0$ и $-4x-10y+21=0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

Решение.

1) Данные прямые параллельны, так как отношение соответствующих коэффициентов при переменных равны: $\frac{2}{-4} = \frac{5}{10}$.

2) Подберём точку, лежащую на прямой $l_1: 2x+5y+3=0$. Такой точкой, например, будет точка $A(1,1)$. Искомым расстоянием будет расстояние точки A до прямой $l_2: -4x+0y+21=0$. Воспользуемся формулой (3.15):

$$d = \frac{|(-4) \cdot 1 + (-10) \cdot 1 + 21|}{\sqrt{(-4)^2 + (10)^2}} = \frac{7}{\sqrt{116}} = \frac{7}{2\sqrt{29}} = \frac{7\sqrt{29}}{58}.$$

Ответ: $d = \frac{7\sqrt{29}}{58}$.