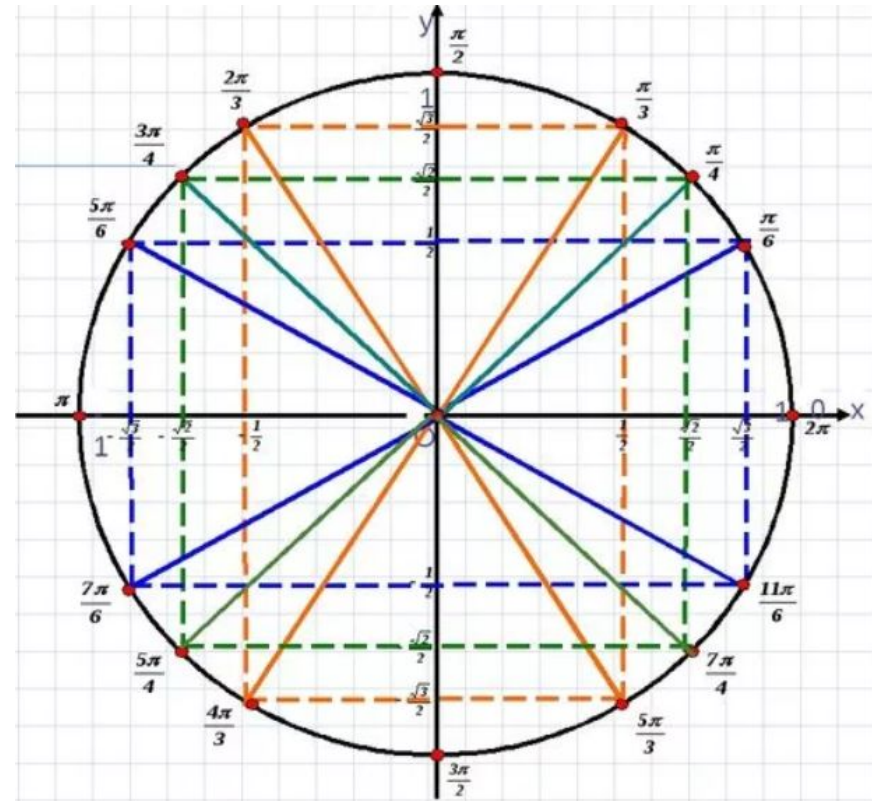
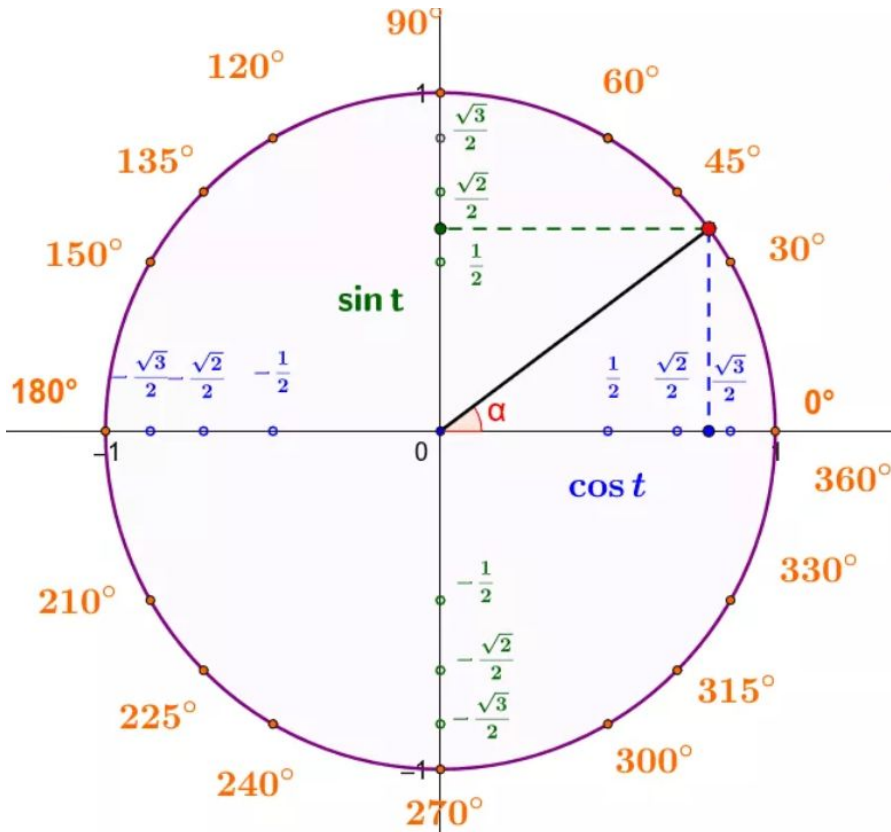


Тригонометрия на ЕГЭ 2019

Задача № 13



Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1.1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (1.2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (1.3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (1.4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (1.5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (1.6)$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (2.1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (2.2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (2.3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (2.4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (2.5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (2.6)$$

Формулы кратных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (3.1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (3.2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (3.3)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad (3.4)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (3.5)$$

Формулы преобразования сумм или разностей в произведение

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4.1)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (4.2)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4.3)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (4.4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \quad (4.5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \quad (4.6)$$

Преобразование произведений в сумму или разность

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (5.1)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (5.2)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \quad (5.3)$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (6.1)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (6.2)$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4} \quad (6.3)$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4} \quad (6.4)$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (7.1)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (7.2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (7.3)$$

Формулы приведения

Если тригонометрическая функция от аргумента $\frac{\pi k}{2} \pm t$ заменяется функцией от аргумента t , то:

- а) перед получаемым результатом ставится тот знак, который имело бы заданное выражение при условии, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$;
- б) при замене $\pi \pm t$ или $2\pi \pm t$ на t название функции сохраняют;
- в) при замене $\frac{\pi}{2} \pm t$ или $\frac{3\pi}{2} \pm t$ на t название синус меняют на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс.

β	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos \beta$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

Простейшие тригонометрические уравнения

1. $\sin x = a$ — имеет решение при $-1 \leq a \leq 1$.

При $a = \pm 1$ и $a = 0$ это уравнение решают по частным формулам.

$$\sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\sin x = 0; x = \pi n, n \in Z.$$

В остальных случаях уравнение $\sin x = a$ решается по *общей формуле*

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z.$$

2. $\cos x = a$ — имеет решение при $-1 \leq a \leq 1$.

$$\cos x = 1; x = 2\pi n, n \in Z.$$

$$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z \text{ — общая формула.}$$

3. $\operatorname{tg} x = a$ — всегда имеет решение и решается по формуле

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z.$$

4. $\operatorname{ctg} x = a$ — всегда имеет решение и решается по формуле

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z.$$

Однородные тригонометрические уравнения и сводящиеся к ним

Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = 0$;

$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$;

$a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0$

и т.п. называют однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов такого уравнения одинакова, а свободный член равен нулю. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Делением обеих частей на $\cos^k x \neq 0$, где k — степень однородного уравнения, уравнение сводится к алгебраическому относительно функции $\operatorname{tg} x$.

Универсальная тригонометрическая подстановка

Этот метод предполагает использовать формулы

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

Выбрав указанный способ решения, нужно проверять, не являются ли числа из множества $\pi + 2\pi n, n \in Z$ решениями уравнения.

Решение уравнений вида $a \cos x + b \sin x = c$ с помощью введения вспомогательного угла

Уравнения вида $a \cos x + b \sin x = c$ решаются делением обеих частей на $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пусть $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \gamma, \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \gamma \end{cases}$ (угол γ существует, так как

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1),$$

тогда $\cos \gamma \cdot \cos x + \sin \gamma \cdot \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Преобразовав левую часть по формуле (2.4), получим простейшее уравнение

$$\cos(x - \gamma) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Уравнения, решаемые подстановками $\sin x \pm \cos x = t$
и $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{ctg} x = t$**

Эти уравнения обычно содержат $\sin x \pm \cos x$ и $\sin x \cdot \cos x$;
 $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

**Уравнения, решаемые с помощью условия равенства
одноименных тригонометрических функций**

Условия равенства одноименных тригонометрических функций

$\sin f(x) = \sin \gamma(x)$, если

$$\begin{cases} f(x) - \gamma(x) = 2\pi n, & n \in Z; \\ f(x) + \gamma(x) = \pi + 2\pi n, & n \in Z. \end{cases}$$

$$\cos f(x) = \cos \gamma(x), \text{ если } \begin{cases} f(x) - \gamma(x) = 2\pi n, & n \in Z, \\ f(x) + \gamma(x) = 2\pi n, & n \in Z. \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} \gamma(x), \text{ если } \begin{cases} f(x) - \gamma(x) = \pi n, & n \in Z, \\ f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, & k \in Z, \\ \gamma(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, & l \in Z. \end{cases}$$

Связь между тригонометрическими функциями и аркфункциями

$\sin(\arcsin x) = x$	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$	$\cos(\arccos x) = x$
$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$

1.
 - а) Найдите корень уравнения $(\sqrt{2} \sin x + 1)(2 \sin x - 3) = 0$.
 - б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.

2.
 - а) Найдите корень уравнения $\sqrt{2} \sin^2 x = \sin x$.
 - б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие неравенству $\cos x < 0$.

3.
 - а) Найдите корень уравнения $\frac{6}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 1 = 0$.
 - б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -\pi]$.

4.
 - а) Найдите корень уравнения $7 \cos^2 x - \cos x - 8 = 0$.
 - б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

5.
 - а) Найдите корень уравнения $3 \cos^2 x - 5 \sin x - 1 = 0$.
 - б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$.

6.
 - а) Найдите корень уравнения $2 \cos 2x - 12 \cos x + 7 = 0$.
 - б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

7. а) Найдите корень уравнения $4\sin^3 x - 3\sin x + 2\cos 2x + 1 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$.
8. а) Найдите корень уравнения $3\cos 2x + 4 = 5\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
9. а) Найдите корень уравнения $(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})(2\cos x - 1) = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие неравенству $\sin x > 0$.
10. а) Найдите корень уравнения $\frac{5}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{19}{\sin x} + 17 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.
11. а) Найдите корень уравнения $\frac{2}{\operatorname{tg}^2(x + 5\pi)} + \frac{1}{\sin(x - 5\pi)} - 4 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
12. а) Найдите корень уравнения $\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\sin(4,5\pi - x)} + 7 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; 2\pi]$.

13. а) Найдите корень уравнения $\frac{2\cos^3 x + 3\cos^2 x + \cos x}{\sqrt{\operatorname{ctg}x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. а) Найдите корень уравнения $\frac{\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}x}{\sqrt{-\sin x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

15. Решить уравнение $\cos^2 x - \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0$.

16. Решить уравнение $2 \sin^2 2x + 3 \cos^2 2x = 2,5 \sin 4x$.

17. Решить уравнение $\sin x + \cos x + 1 + \cos x \cdot \sin x = 0$.

18. Решить уравнение $10 \cos 2x + 8 = \operatorname{tg} x$.

19. *Найти корни уравнения:* $\sqrt{\cos 2x + \sin 3x} = \sqrt{2} \cos x$.
20. *Решить уравнение:* $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.
21. *Найти решения уравнения:* $\cos 4x \cos 5x = \cos 6x \cos 7x$.
22. *Решить уравнение:* $\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = \frac{1}{2} \cos 6x$.
23. *Решить уравнение:* $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 11x$.
24. *Решить уравнение:* $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{x} = \operatorname{ctg} \pi x$.
25. *Решить уравнение:* $3 \cos x + 4 \sin x = 5 \sin 5x$.
26. *Решить уравнение:* $3 \sin 2x + 2(\sin x - \cos x) = 2$.
27. *Найти решение уравнения:* $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -9 \operatorname{ctg}^2 x - 1$.

28. Решить уравнение: $\frac{\sin 4x - \sin 2x - \cos 3x + 2 \sin x - 1}{2 \sin 2x - \sqrt{3}} = 0.$

29. Решить уравнение:

$$\sqrt{\cos \frac{x}{1990} - \frac{1}{2}} + \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}} = \sqrt{\cos \frac{x}{1990} + \cos x - 1}.$$

30. Решить уравнение: $\sin 5x - 2 \cos 2x = 3.$

31. Решить уравнение: $\sin^8 x - \cos^5 x = 1.$

32. Решить уравнение: $4 \cos^2 x - 4 \cos^2 3x \cos x + \cos^2 3x = 0.$

33. Решить уравнение: $\arccos x = \operatorname{arctg} x.$

34. Решить уравнение: $\arcsin \frac{x}{2} + 2 \arccos x = \pi.$

35. Решите уравнение $\sin 7x + \sin 6x = \sin x$.

36. Решите уравнение $\cos 6x + \cos 5x = \sin x$.

37. Решите уравнение $\sin 8x - \sin 7x = \sin x$.

38. Решите уравнение $\cos 8x - \cos 9x = \sin x$.

39. Решите уравнение $\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x$.

55. $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0.$

56. $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x.$

57. $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0.$ 58. $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0.$

59. $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0.$ 60. $\cos 2x = \sqrt{2} (\cos x - \sin x).$

61. $3 \cos 2x + 2 \cos x = 5.$ 62. $(2 \sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x.$

63. $1 + \sin x \cos 2x = \sin x + \cos 2x.$ 64. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$

65. $\cos x + 2 \cos 2x = 1.$ 66. $4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7.$

67. $5 \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{\cos^4 x} = 29.$ 68. $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$

69. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x.$

70. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$

71. $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0.$ 72. $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$

73. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$ 74. $\cos 3x = \sin 5x.$

75. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$ 76. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$

77. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}.$ 78. $\sin 3x + \sin^3 x = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sin 2x.$

79. $\sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x + \sin 2x = 4.$

$$81. \cos 7x (\sin 5x - 1) = 0. \quad 82. \sin 4x + 2 \sin^2 7x = 1.$$

$$83. 3 + 2 \sin 3x \sin x = 3 \cos 2x.$$

$$84. \cos 2x + 4\sqrt{2} \sin x = 2. \quad 85. \cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0.$$

$$86. \left(2 \sin^4 \frac{x}{2} - 1\right) \frac{1}{\cos^4 \frac{x}{2}} = 2. \quad 87. \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} - 1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cos x.$$

$$88. 3 \operatorname{tg}^2 x + 7 = \frac{2}{\sin^2 2x}. \quad 89. \frac{\cos^2 2x}{\cos x + \cos \frac{\pi}{4}} = \cos x - \cos \frac{\pi}{4}.$$

$$90. \cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2} - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0.$$

$$91. \cos 3x \sin x + 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1.$$

$$92. \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \sin 2x = (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x + 1.$$

$$93. \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}.$$

$$94. \sin \left(2x + \frac{5}{2}\pi\right) - 3 \cos \left(x - \frac{7}{2}\pi\right) = 1 + 2 \sin x.$$

$$95. \frac{\sin^8 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^8 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{4}. \quad 96. 3 \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 2 \cos^2 x - 1.$$

$$97. \sin^7 x \cos^3 x - \cos^7 x \sin^3 x = \cos 2x. \quad 98. \sin 3x = 8 \sin^3 x.$$

$$99. 4 \cos 3x = 15 \sin 2x. \quad 100. 3 \cos x = 13 \sin \frac{2x}{3} + 17 \cos \frac{x}{3}.$$

$$101. \sqrt{2} \cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0.$$

$$102. \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0.$$

$$103. \sin 2x = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

$$104. \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 3 \operatorname{ctg} 3x + 4 \operatorname{ctg} 4x = 0.$$

$$105. \cos 3x \operatorname{tg} 5x = \sin 7x. \quad 106. \sin x \operatorname{tg} x = \cos x + \operatorname{tg} x.$$

$$107. \operatorname{ctg} x \left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} \right) = 1. \quad 108. \frac{\cos 2x + 3 \sin x - 2}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0.$$

$$109. \frac{\cos 3x}{\sin 3x - 2 \sin x} = \operatorname{tg} x. \quad 110. \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x.$$

$$111. \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{8} \right) \operatorname{ctg} \left(3x - \frac{\pi}{8} \right) = \frac{5}{9}.$$

$$112. \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 8 \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

$$113. 8 \cos^3 x - 6 \cos x + \sqrt{2} = 0.$$

$$114. \cos 2x + \sin 2x + \cos x - \sin x = 1.$$

$$115. \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = 2 \operatorname{ctg} 4x.$$

$$116. (1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$$

$$117. 2 \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = \sin 2x + 3 \sin x.$$

$$118. \cos^2 x - 2 \cos x = 4 \sin x - \sin 2x.$$

$$119. \sqrt[4]{8} \cos x - 1 = (\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}) \sqrt{\cos x}.$$

$$120. \frac{2}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x. \quad 121. 4 \sin 2x + \operatorname{ctg}^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 4.$$

$$122. \cos 4x + \sin^2 3x = 1.$$

$$123. \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) = \sin^2 x \cos 9x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 4x \right).$$

$$124. \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} 4x = 0.$$

$$125. \cos x (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x) = 4 \sin 3x \sin 4x.$$

$$126. 4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x = \sin 4x.$$

$$127. (\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 3 - \sin 4x$$

$$128. \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2.$$

$$129. \sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}.$$

$$130. \cos^2 7x + \sin^2 6x = 0.$$

$$131. \operatorname{tg} \left(5x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \operatorname{ctg} \left(3x - \frac{\pi}{8}\right)}{1 - \operatorname{ctg} \left(3x - \frac{\pi}{8}\right)}.$$

$$132. \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x. \quad 133. \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 5x.$$

$$134. \operatorname{tg} \left(\frac{3}{7}x + \frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{tg} \left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$135. 3(\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x.$$

$$136. 1 + \sin 2x = \cos x - \sin x. \quad 137. \cos 2x + 2 \sin 2x = 2\sqrt{2} \cos x.$$

$$138. \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin 3x}{1 - \cos 3x} = -\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$139. \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin 5x}.$$

$$140. \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} = 0. \quad 141. \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 3x}.$$

$$142. \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 4x}.$$

$$143. \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$144. 8 \cos x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin x}. \quad 145. 2 \cos 3x = 3 \sin x + \cos x.$$

$$146. \frac{3\sqrt{3}\cos 2x + 3\sin 2x}{\sqrt{3}\cos x + \sin x} = 4 \cos x - \frac{1}{\cos x}.$$

$$147. 4 \operatorname{tg} 4x - 4 \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x.$$

$$148. \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 3x + \operatorname{tg} 4x.$$

$$149. \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} = \operatorname{ctg} x.$$

$$150. \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos 2x \sin 3x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin x \cos 2x}.$$

$$151. \frac{1 - \sin\left(\frac{3}{7}x + \frac{11}{14}\pi\right)}{1 + \sin\left(\frac{3}{7}x + \frac{11}{14}\pi\right)} = \frac{1 - \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

$$152. \frac{2 \cos x + 2 \sin x - 1}{2 \cos x - 2 \sin x - 1} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3} + 2.$$

$$153. 1 + \cos^2 x + 2 \cos x \cos^2 5x = \sin^2 5x.$$

$$154. \sqrt{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 3x \operatorname{ctg} 3x (\operatorname{ctg} 3x + 1).$$

$$155. 2 \cos 13x + 3 \cos 3x + 3 \cos 5x - 8 \cos x \cos^3 4x = 0.$$

$$156. \operatorname{tg}\left(2x + \frac{5\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{13\pi}{6}. \quad 157. \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6} = \frac{2 \operatorname{ctg} x + 3}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

$$158. 3 \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{ctg} 2x + 6 \operatorname{ctg} 4x.$$

$$159. \sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x = 1.$$

$$160. \cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8} \cos 2x - \frac{1}{2}.$$

$$161. 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = \cos 2x.$$

$$162. \sin^8 x - \cos^8 x = \frac{1}{2} \cos^2 2x - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

$$163. \sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + \frac{3}{8} = 0.$$

$$164. \sqrt{2}(\cos 8x + 2 \cos^2 2x) \sqrt{1 + \cos 4x} + \cos 10x + \cos 6x + 4 \cos^3 2x = 0.$$

$$165. 2 \cos x + \sqrt{5} \sin x = \cos 5x + 2 \sqrt{2} \sin 5x.$$

$$166. \cos 3x - \cos 2x = \sin 3x. \quad 167. \left| \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right| = \frac{1}{\cos^2 2x} - 1.$$

$$168. |\cos x| = \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right). \quad 169. \sqrt{-\cos x} = \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}.$$

$$170. \sqrt{\cos x} = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2}. \quad 171. \sqrt{|\cos x|} = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2}.$$

$$172. \sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0. \quad 173. \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right).$$

$$174. \operatorname{tg} x + \frac{1}{9} \operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1.$$

$$175. \cos x - 2 \sin 2x - \cos 3x = |1 - 2 \sin x - \cos 2x|.$$

$$176. \sin x + \cos x = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}. \quad 177. \sqrt{5 \sin x + \cos 2x} + 2 \cos x = 0.$$

$$178. \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 1 + \cos x.$$

$$179. \sqrt{1 - 2 \sin 4x} + \sqrt{6} \cos 2x = 0.$$

$$180. \sqrt{5 \cos x - \cos 2x} + 2 \sin x = 0.$$

$$181. \sqrt{\frac{1 - 4 \cos^2 3x}{8 \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}} = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$182. \sqrt{\frac{5}{4} - \sin^2 x} + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x + \frac{1}{2}.$$

$$183. 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8 \sin 2x \cos^2 2x}.$$

$$184. (1 + \cos x) \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + \sin x = 2 \cos x.$$

$$185. \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2 \sqrt{\sin x + \cos x}.$$

$$186. \sqrt{\sin 3x + \cos x - \sin x} = \sqrt{\cos x - \sin 2x}.$$

$$187. \sqrt{\cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x - 3 \cos^2 x + \cos x} + \frac{13}{4} = \sqrt{3} \sin x + \frac{1}{2}.$$

$$188. \sqrt{19 \frac{1}{2} - 5 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} + 2 \sin x = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \cos x.$$

$$189. \sqrt{3}(2 - \cos x) + 4 \sin 2x = \sin x.$$

$$190. \sqrt{3}(3 - 2 \cos x) - 2(3 \sin 2x - \sin x) = 0.$$

$$191. 20 \cos^2 x = 5 + \sin x + \sqrt{3} \cos x.$$

$$192. 2 \sin 3x + \sin x + \sqrt{3}(\cos x - \sin 2x) = \cos 2x.$$

$$193. 5 \sin x + 6 \sin 2x + 5 \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

$$194. \cos x \sin 2x \cos 4x + \sin x \sin 2x \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

$$195. 2(\operatorname{tg} x - \sin x) + 3(\operatorname{ctg} x - \cos x) + 5 = 0.$$

$$196. 1 + \sin 2x + 2\sqrt{2} \cos 3x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin x + 2 \cos 3x + \cos 2x.$$

$$197. \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{6} \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$198. \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x = \frac{2}{\sin 2x}.$$

$$199. \frac{\cos 2x - \cos 4x - 4 \sin 3x - 2 \sin x + 4}{2 \sin x - 1} = 0.$$

$$200. \frac{1 + 2 \sin^2 x - 3\sqrt{2} \sin x + \sin 2x}{\sin 2x - 1} = 1.$$

$$201. \frac{1 - \sin x + \sqrt{3} \sin 2x}{2\sqrt{3} \cos x - 3} = \frac{1}{3} + \sin x.$$

$$203. \frac{\sin 3x}{\sin x \sin 2x} - \frac{\sin 6x}{\sin 2x \sin 4x} + \frac{\sin 12x}{\sin 4x \sin 8x} = 0.$$

$$204. \cos 2x + \cos \frac{3x}{4} = 2. \quad 205. 2 \cos \frac{x}{2} + 3 \cos 3x = 5.$$

$$206. 8 \operatorname{tg} 8x + 4 \operatorname{tg} 4x + 2 \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 16 + \operatorname{ctg} x.$$

$$207. 2 \sin 3x + \cos x \cos 2x = (\cos x + \cos 3x)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} 2x).$$

$$208. 4 \cos x + 1 + 4 \cos 3x \cos x = \cos 4x.$$

$$209. \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0.$$

$$210. \sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = 3 \sin x \sin 2x \sin 3x.$$

$$211. \sin^3 2x + \sin^3 \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) + \sin^3 \left(2x - \frac{2}{3} \pi \right) = 0.$$

$$212. \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \operatorname{tg} \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) = 0.$$

$$213. \cos^2 3x + \frac{1}{4} \cos^2 x = \cos 3x \cos^4 x.$$

$$214. 1 + \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin^2 3x.$$

$$215. \cos^2 x + \cos \frac{x}{2} \cos^2 x - \cos \frac{x}{2} - 1 = 2 \left(\sin \frac{x}{4} - \cos x \right)^2.$$

$$216. \sin x \left(\cos \frac{x}{4} - 2 \sin x \right) + \cos x \left(1 + \sin \frac{x}{4} - 2 \cos x \right) = 0.$$

$$217. \cos^2 x + \cos^2 2x - 2 \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{3}{4}.$$

$$218. (1 + \cos x)(1 + \cos 2x)(1 + \cos 3x) = \frac{1}{2}.$$

$$219. \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} = 3.$$

$$220. \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{8} \cos 15x.$$

$$221. 7 \sin x + 6 \sin 3x + 5 \sin 5x + 4 \sin 7x = 0.$$

$$222. 3 \sin x + 4 \sin 3x + 2 \sin 5x + \sin 7x = 0.$$

$$223. |\sin 3x|^{\operatorname{tg} 5x} = 1. \quad 224. |\sin x|^{\operatorname{tg} x} + |\cos x|^{\operatorname{tg} x} = 1.$$

$$225. \cos^5\left(x + \frac{\pi}{7}\right) - \sin^3\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 1.$$

$$226. 5 \sin^5 x - 3 \cos^3 x = 5.$$

$$227. \sin\left(\frac{\pi}{6} \cos 2x\right) = \cos\left(\frac{4}{3} \pi \sin x\right).$$

$$228. \sin(\sin x) = \cos\left(\frac{1}{\sin x}\right). \quad 229. 2 \sin^2 x + \sin x^2 = 1.$$

$$230. \sin(2x^2 + x) \cos x^2 - \sin(x^2 + x) \cos 2x^2 = 0.$$

$$231. \sin(3\sqrt{x} + 2x) \cos(x - 2\sqrt{x}) - \sin 2(x + \sqrt{x}) \cos(3\sqrt{x} - x) = 0.$$

$$232. \frac{1}{2} \cos(x^2 + x) + \sin\left(x^2 - \frac{\pi}{6}\right) \cos x = 0.$$

$$233. \sin\left(x^2 - \frac{\pi}{3}\right) \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x^2 - x) = 0.$$

$$234. \operatorname{tg} \sqrt{x + 16} = \operatorname{tg} \sqrt{x}. \quad 235. \sin \pi \sqrt{x} = \cos \pi \sqrt{2 - x}.$$

$$236. \operatorname{tg} \frac{4\pi}{x} = \operatorname{ctg} 3\pi x.$$

237. Найдите все решения уравнения $2 \cos 2x - 4 \cos x = 1$, удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 0$.

238. Найдите все решения уравнения $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x < -\frac{1}{2}$.

239. Найдите все решения уравнения $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.

240. Найдите решения уравнения $\sin x \cos \frac{\pi}{7} - \cos x \sin \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$, удовлетворяющие условию $-\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

241. Найдите решения уравнения $(1 + 2 \cos 2x) \sin x + (1 - 2 \cos 2x) \cos x = 0$, удовлетворяющие неравенствам $\pi < \left| 2x - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{7\pi}{3}$.

242. Найдите решения уравнения $2 + \cos \frac{3}{2}x + \sqrt{3} \sin \frac{3}{2}x = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) > 0$.

243. Найдите решения уравнения $\cos \left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{6} \right) = 2 \sin \left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(\frac{5}{8}\pi - \frac{3}{2}x \right)$, удовлетворяющие неравенству $\sin \frac{3}{2}x < 0$.

244. Среди корней уравнения $\frac{\cos 2\pi x}{1 + \operatorname{tg} \pi x} = 0$ найдите тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой.