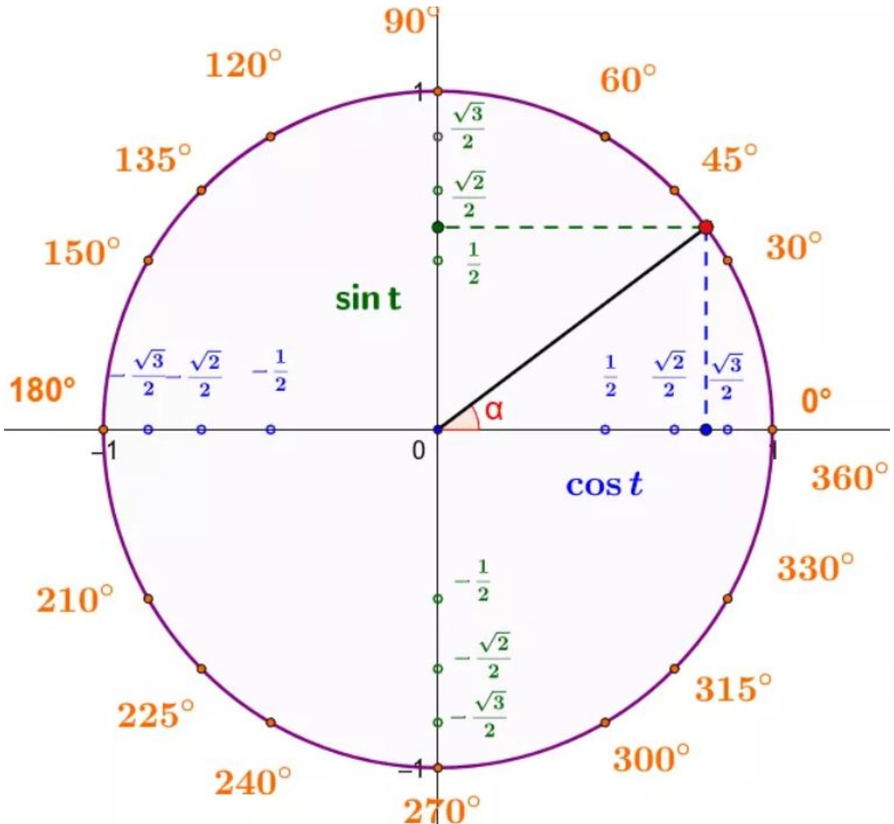
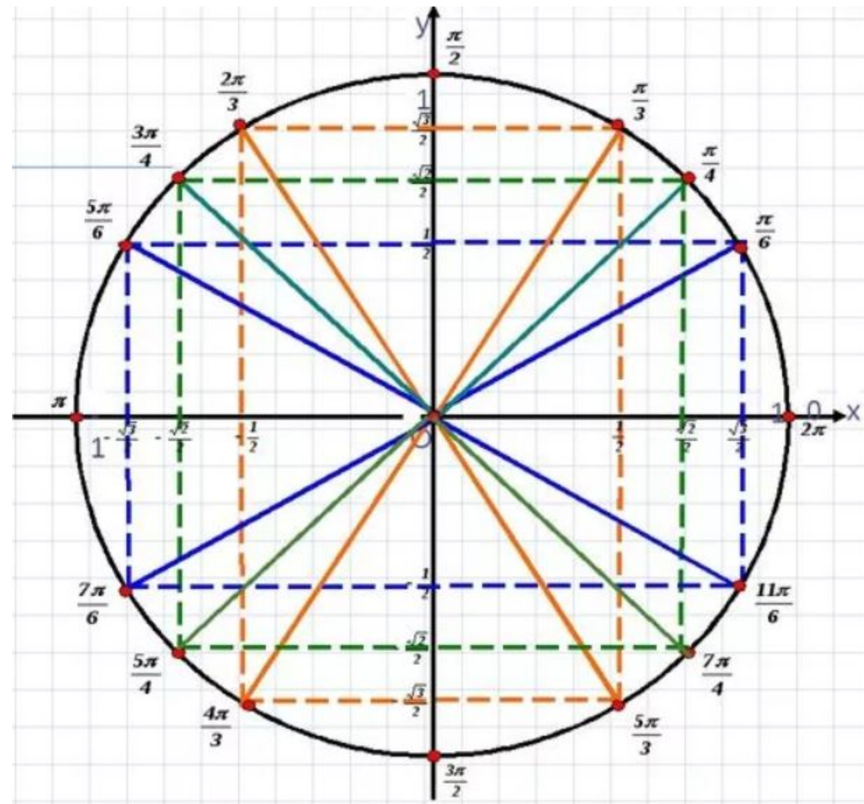
Тригонометрия на ЕГЭ 2019

Задача № 13





Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad (1.1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (1.2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (1.3)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad (1.4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (1.5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (1.6)$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \quad (2.1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta \quad (2.2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (2.3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (2.4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \quad (2.5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \quad (2.6)$$

Формулы кратных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \quad (3.1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \quad (3.2)$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \quad (3.3)$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \quad (3.4)$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \quad (3.5)$$

Формулы преобразования сумм или разностей в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4.1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \quad (4.2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4.3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \quad (4.4)$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \quad (4.5)$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \quad (4.6)$$

Преобразование произведений в сумму или разность

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right] \quad (5.1)$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right] \quad (5.2)$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right] \quad (5.3)$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (6.1)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (6.2)$$

$$\cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha - 3\cos\alpha}{4} \quad (6.3)$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} \quad (6.4)$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{7.1}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{7.2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{7.3}$$

Формулы приведения

Если тригонометрическая функция от аргумента $\frac{\pi k}{2} \pm t$ заменяется функцией от аргумента t, то:

а) перед получаемым результатом ставится тот знак, который имело бы заданное выражение при условии, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

б) при замене $\pi \pm t$ или $2\pi \pm t$ на t название функции сохраняют;

в) при замене $\frac{\pi}{2} \pm t$ или $\frac{3\pi}{2} \pm t$ на t название синус меняют на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс.

β	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Простейшие тригонометрические уравнения

1. $\sin x = a$ — имеет решение при $-1 \le a \le 1$.

При $a = \pm 1$ и $a = 0$ это уравнение решают по частным формулам.

$$\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

$$\sin x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

$$\sin x = 0;\ x = \pi n,\ n \in Z.$$

В остальных случаях уравнение $\sin x = a$ решается по *общей формуле*

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$$

2. $\cos x = a$ — имеет решение при $-1 \le a \le 1$.

$$\cos x = 1;\ x = 2\pi n,\ n \in Z.$$

$$\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

$$\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ — ***общая формула.***

3. $\operatorname{tg} x = a$ — всегда имеет решение и решается по формуле

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

4. $\operatorname{ctg} x = a$ — всегда имеет решение и решается по формуле

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z.$$

Однородные тригонометрические уравнения и сводящиеся к ним

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$;
$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$;

$a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$

и т.п. называют однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов такого уравнения одинакова, а свободный член равен нулю. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Делением обеих частей на $\cos^k x \neq 0$, где k — степень однородного уравнения, уравнение сводится к алгебраическому относительно функции $\operatorname{tg} x$.

Универсальная тригонометрическая подстановка

Этот метод предполагает использовать формулы

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};\ \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Выбрав указанный способ решения, нужно проверять, не являются ли числа из множества $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$ решениями уравнения.

Решение уравнений вида $a\cos x + b\sin x = c$ с помощью введения вспомогательного угла

Уравнения вида $a \cos x + b \sin x = c$ решаются делением обеих частей на $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пусть $\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\gamma, \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\gamma \end{cases}$ (угол γ существует, так как

$$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1),$$

тогда $\cos\gamma \cdot \cos x + \sin\gamma \cdot \sin x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Преобразовав левую часть по формуле (2.4), получим простейшее уравнение

$$\cos(x-\gamma) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Уравнения, решаемые подстановками $\sin x \pm \cos x = t$ и $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{ctg} x = t$

Эти уравнения обычно содержат $\sin x \pm \cos x$ и $\sin x \cdot \cos x$; $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

Уравнения, решаемые с помощью условия равенства одноименных тригонометрических функций

Условия равенства одноименных тригонометрических функций

$\sin f(x) = \sin \gamma(x)$, если

$$\left[\begin{array}{l} f(x)-\gamma(x)=2\pi n,\ n\in Z; \\ f(x)+\gamma(x)=\pi+2\pi n,\ n\in Z. \end{array}\right.$$

$\cos f(x) = \cos \gamma(x)$, если $\left[\begin{array}{l} f(x)-\gamma(x)=2\pi n,\ n\in Z, \\ f(x)+\gamma(x)=2\pi n,\ n\in Z. \end{array}\right.$

$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} \gamma(x)$, если $\left\{\begin{array}{l} f(x)-\gamma(x)=\pi n,\ n\in Z, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z, \\ \gamma(x)\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Связь между тригонометрическими функциями и аркфункциями

$\sin(\arcsin x) = x$	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$	$\cos(\arccos x) = x$
$\sin(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin(\operatorname{arc\,ctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arc\,ctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{x}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = \frac{1}{x}$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = x$

1. а) Найдите корень уравнения $\left(\sqrt{2}\sin x+1\right)\left(2\sin x-3\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x<0$.

2. а) Найдите корень уравнения $\sqrt{2}\sin^2 x=\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие неравенству $\cos x<0$.

3. а) Найдите корень уравнения $\dfrac{6}{\cos^2 x}-\dfrac{7}{\cos x}+1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;\ -\pi\right]$.

4. а) Найдите корень уравнения $7\cos^2 x-\cos x-8=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

5. а) Найдите корень уравнения $3\cos^2 x-5\sin x-1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;\ -2\pi\right]$.

6. а) Найдите корень уравнения $2\cos 2x-12\cos x+7=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

7. а) Найдите корень уравнения $4\sin^3 x - 3\sin x + 2\cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi;\ 0]$.

8. а) Найдите корень уравнения $3\cos 2x + 4 = 5\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

9. а) Найдите корень уравнения $\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right)(2\cos x - 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие неравенству $\sin x > 0$.

10. а) Найдите корень уравнения $\frac{5}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{19}{\sin x} + 17 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

11. а) Найдите корень уравнения $\frac{2}{\operatorname{tg}^2(x+5\pi)} + \frac{1}{\sin(x-5\pi)} - 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

12. а) Найдите корень уравнения $\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\sin(4{,}5\pi - x)} + 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi;\ 2\pi]$.

13. **а) Найдите корень уравнения** $\dfrac{2\cos^3 x+3\cos^2 x+\cos x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

14. **а) Найдите корень уравнения** $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x}{\sqrt{-\sin x}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

15. Решить уравнение $\cos^2 x - \sin x \cos x - 2\sin^2 x = 0$.

16. Решить уравнение $2\sin^2 2x + 3\cos^2 2x = 2{,}5\sin 4x$.

17. Решить уравнение $\sin x + \cos x + 1 + \cos x \cdot \sin x = 0$.

18. Решить уравнение $10\cos 2x + 8 = \operatorname{tg} x$.

19. *Найти корни уравнения:* $\sqrt{\cos 2x + \sin 3x} = \sqrt{2} \cos x$.

20. *Решить уравнение:* $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

21. *Найти решения уравнения:* $\cos 4x \cos 5x = \cos 6x \cos 7x$.

22. *Решить уравнение:* $\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = \frac{1}{2} \cos 6x$.

23. *Решить уравнение:* $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 11x$.

24. *Решить уравнение:* $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{x} = \operatorname{ctg} \pi x$.

25. *Решить уравнение:* $3 \cos x + 4 \sin x = 5 \sin 5x$.

26. *Решить уравнение:* $3 \sin 2x + 2 (\sin x - \cos x) = 2$.

27. *Найти решение уравнения:* $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -9 \operatorname{ctg}^2 x - 1$.

28. *Решить уравнение:* $\dfrac{\sin 4x - \sin 2x - \cos 3x + 2\sin x - 1}{2\sin 2x - \sqrt{3}} = 0.$

29. *Решить уравнение:*

$$\sqrt{\cos\frac{x}{1990} - \frac{1}{2}} + \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}} = \sqrt{\cos\frac{x}{1990} + \cos x - 1}.$$

30. *Решить уравнение:* $\sin 5x - 2\cos 2x = 3.$

31. *Решить уравнение:* $\sin^8 x - \cos^5 x = 1.$

32. *Решить уравнение:* $4\cos^2 x - 4\cos^2 3x \cos x + \cos^2 3x = 0.$

33. *Решить уравнение:* $\arccos x = \operatorname{arctg} x.$

34. *Решить уравнение:* $\arcsin\frac{x}{2} + 2\arccos x = \pi.$

35. Решите уравнение $\sin 7x + \sin 6x = \sin x$.

36. Решите уравнение $\cos 6x + \cos 5x = \sin x$.

37. Решите уравнение $\sin 8x - \sin 7x = \sin x$.

38. Решите уравнение $\cos 8x - \cos 9x = \sin x$.

39. Решите уравнение $\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x$.

55. $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0.$

56. $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x.$

57. $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0.$ 58. $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0.$

59. $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0.$ 60. $\cos 2x = \sqrt{2} (\cos x - \sin x).$

61. $3 \cos 2x + 2 \cos x = 5.$ 62. $(2 \sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x.$

63. $1 + \sin x \cos 2x = \sin x + \cos 2x.$ 64. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$

65. $\cos x + 2 \cos 2x = 1.$ 66. $4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7.$

67. $5 \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{\cos^4 x} = 29.$ 68. $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$

69. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x.$

70. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$

71. $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0.$ 72. $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$

73. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$ 74. $\cos 3x = \sin 5x.$

75. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$ 76. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$

77. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}.$ 78. $\sin 3x + \sin^3 x = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sin 2x.$

79. $\sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x + \sin 2x = 4.$

81. $\cos 7x(\sin 5x-1)=0$. **82.** $\sin 4x+2\sin^2 7x=1$.

83. $3+2\sin 3x\sin x=3\cos 2x$.

84. $\cos 2x+4\sqrt{2}\sin x=2$. **85.** $\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0$.

86. $\left(2\sin^4\frac{x}{2}-1\right)\frac{1}{\cos^4\frac{x}{2}}=2$. **87.** $\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\cos x$.

88. $3\operatorname{tg}^2 x+7=\frac{2}{\sin^2 2x}$. **89.** $\frac{\cos^2 2x}{\cos x+\cos\frac{\pi}{4}}=\cos x-\cos\frac{\pi}{4}$.

90. $\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{3x}{2}-\sin^2 2x-\sin^2 4x=0$.

91. $\cos 3x\sin x+2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$.

92. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x=(\sqrt{3}-1)\cos^2 x+1$.

93. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sqrt{3}$.

94. $\sin\left(2x+\frac{5}{2}\pi\right)-3\cos\left(x-\frac{7}{2}\pi\right)=1+2\sin x$.

95. $\frac{\sin^8 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^8 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}$. **96.** $3\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=2\cos^2 x-1$.

97. $\sin^7 x\cos^3 x-\cos^7 x\sin^3 x=\cos 2x$. **98.** $\sin 3x=8\sin^3 x$.

99. $4\cos 3x=15\sin 2x$. **100.** $3\cos x=13\sin\frac{2x}{3}+17\cos\frac{x}{3}$.

101. $\sqrt{2}\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0$.

102. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 4x=0$.

103. $\sin 2x=\sin^4 x+\cos^4 x$.

104. $\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg} 2x+3\operatorname{ctg} 3x+4\operatorname{ctg} 4x=0$.

105. $\cos 3x\operatorname{tg} 5x=\sin 7x$. 106. $\sin x\operatorname{tg} x=\cos x+\operatorname{tg} x$.

107. $\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}\right)=1$. 108. $\frac{\cos 2x+3\sin x-2}{12x^2-8\pi x+\pi^2}=0$.

109. $\frac{\cos 3x}{\sin 3x-2\sin x}=\operatorname{tg} x$. 110. $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x$.

111. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{5}{9}$.

112. $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+8\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$.

113. $8\cos^3 x-6\cos x+\sqrt{2}=0$.

114. $\cos 2x+\sin 2x+\cos x-\sin x=1$.

115. $\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} x=2\operatorname{ctg} 4x$.

116. $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg} x$.

117. $2\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} x=\sin 2x+3\sin x$.

118. $\cos^2 x-2\cos x=4\sin x-\sin 2x$.

119. $\sqrt[4]{8}\cos x-1=(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})\sqrt{\cos x}$.

120. $\frac{2}{\sin 2x}=\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg} 3x$. 121. $4\sin 2x+\operatorname{ctg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=4$.

122. $\cos 4x+\sin^2 3x=1$.

123. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)=\sin^2 x\cos 9x+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)$.

124. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} 3x+\operatorname{ctg} 4x=0.$

125. $\cos x(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x)=4 \sin 3x \sin 4x.$

126. $4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x=\sin 4x.$

127. $(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=3-\sin 4x$

128. $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2.$

129 $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9}{8}.$

130. $\cos^2 7x+\sin^2 6x=0.$ **131.** $\operatorname{tg}\left(5x-\frac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1+\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)}{1-\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)}.$

132. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 3x.$ **133.** $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 5x.$

134. $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{7}x+\frac{\pi}{7}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\right).$

135. $3(\cos x-\sin x)=1+\cos 2x-\sin 2x.$

136. $1+\sin 2x=\cos x-\sin x.$ **137.** $\cos 2x+2 \sin 2x=2\sqrt{2} \cos x.$

138. $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{\sin 3x}{1-\cos 3x}=-\dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$

139. $\operatorname{tg} 2x+\frac{1}{\sin x}=\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin 5x}$.

140. $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}=0$. **141.** $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 3x}$.

142. $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 4x}$.

143. $\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)=3+2\sqrt{2}$.

144. $8\cos x=\frac{1}{\cos x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin x}$. **145.** $2\cos 3x=3\sin x+\cos x$.

146. $\frac{3\sqrt{3}\cos 2x+3\sin 2x}{\sqrt{3}\cos x+\sin x}=4\cos x-\frac{1}{\cos x}$.

147. $4\operatorname{tg} 4x-4\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 4x$.

148. $\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 4x=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 3x+\operatorname{tg} 4x$.

149. $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}=\operatorname{ctg} x$.

150. $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos 2x\sin 3x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos 2x}$.

151. $\frac{1-\sin\left(\frac{3}{7}x+\frac{11}{14}\pi\right)}{1+\sin\left(\frac{3}{7}x+\frac{11}{14}\pi\right)}=\frac{1-\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

152. $\frac{2\cos x+2\sin x-1}{2\cos x-2\sin x-1}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{3}+2$.

153. $1+\cos^2 x+2\cos x\cos^2 5x=\sin^2 5x$.

154. $\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 3x\operatorname{ctg} 3x(\operatorname{ctg} 3x+1)$.

155. $2\cos 13x+3\cos 3x+3\cos 5x-8\cos x\cos^3 4x=0$.

156. $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{5\pi}{3}\right)=2\operatorname{ctg}2x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6}$. 157. $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}=\frac{2\operatorname{ctg}x+3}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

158. $3\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}3x=3\operatorname{ctg}2x+6\operatorname{ctg}4x$.

159. $\sin^4 x+\sin^3 x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos^3 x+\cos^4 x=1$.

160. $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}$.

161. $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=\cos 2x$.

162. $\sin^8 x-\cos^8 x=\frac{1}{2}\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

163. $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x+\frac{3}{8}=0$.

164. $\sqrt{2}(\cos 8x+2\cos^2 2x)\sqrt{1+\cos 4x}+\cos 10x+\cos 6x+$
$+4\cos^3 2x=0$. 165. $2\cos x+\sqrt{5}\sin x=\cos 5x+2\sqrt{2}\sin 5x$.

166. $\cos 3x-\cos 2x=\sin 3x$. 167. $\left|\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\frac{1}{\cos^2 2x}-1$.

168. $|\cos x|=\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$. 169. $\sqrt{-\cos x}=\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$.

170. $\sqrt{\cos x}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$. 171. $\sqrt{|\cos x|}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$.

172. $\sqrt{1+\sin x}+\cos x=0$. 173. $\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}=\sqrt{2}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$.

174. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{9}\operatorname{ctg} x=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}-1.$

175. $\cos x-2\sin 2x-\cos 3x=|1-2\sin x-\cos 2x|.$

176. $\sin x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{tg} x}.$ 177. $\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0.$

178. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1+\cos x.$

179. $\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0.$

180. $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}+2\sin x=0.$

181. $\sqrt{\frac{1-4\cos^2 3x}{8\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}}=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).$

182. $\sqrt{\frac{5}{4}-\sin^2 x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\cos x+\frac{1}{2}.$

183. $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}.$

184. $(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}+\sin x=2\cos x.$

185. $\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sqrt{\sin x+\cos x}.$

186. $\sqrt{\sin 3x+\cos x-\sin x}=\sqrt{\cos x-\sin 2x}.$

187. $\sqrt{\cos 3x+\sqrt{3}\sin 3x-3\cos^2 x+\cos x+\frac{13}{4}}=\sqrt{3}\sin x+\frac{1}{2}.$

188. $\sqrt{19\frac{1}{2}-5\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}+2\sin x=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\cos x.$

189. $\sqrt{3}(2-\cos x)+4\sin 2x=\sin x.$

190. $\sqrt{3}(3-2\cos x)-2(3\sin 2x-\sin x)=0.$

191. $20\cos^2 x=5+\sin x+\sqrt{3}\cos x.$

192. $2\sin 3x+\sin x+\sqrt{3}(\cos x-\sin 2x)=\cos 2x.$

193. $5\sin x+6\sin 2x+5\sin 3x+\sin 4x=0.$

194. $\cos x\sin 2x\cos 4x+\sin x\sin 2x\cos 4x=\frac{\sqrt{2}}{8}.$

195. $2(\operatorname{tg} x-\sin x)+3(\operatorname{ctg} x-\cos x)+5=0.$

196. $1+\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 3x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x+2\cos 3x+$
$+\cos 2x.$

197. $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)-\sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)-$
$-2\sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6}\right).$

198. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg} 3x=\frac{2}{\sin 2x}.$

199. $\frac{\cos 2x-\cos 4x-4\sin 3x-2\sin x+4}{2\sin x-1}=0.$

200. $\frac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{\sin 2x-1}=1.$

201. $\frac{1-\sin x+\sqrt{3}\sin 2x}{2\sqrt{3}\cos x-3}=\frac{1}{3}+\sin x.$

203. $\frac{\sin 3x}{\sin x \sin 2x}-\frac{\sin 6x}{\sin 2x \sin 4x}+\frac{\sin 12x}{\sin 4x \sin 8x}=0.$

204. $\cos 2x+\cos\frac{3x}{4}=2.$ 205. $2\cos\frac{x}{2}+3\cos 3x=5.$

206. $8\operatorname{tg} 8x+4\operatorname{tg} 4x+2\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x=16+\operatorname{ctg} x.$

207. $2\sin 3x+\cos x\cos 2x=(\cos x+\cos 3x)(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} 2x).$

208. $4\cos x+1+4\cos 3x\cos x=\cos 4x.$

209. $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0.$

210. $\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x=3\sin x\sin 2x\sin 3x.$

211. $\sin^3 2x+\sin^3\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+\sin^3\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)=0.$

212. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)=0.$

213. $\cos^2 3x+\frac{1}{4}\cos^2 x=\cos 3x\cos^4 x.$

214. $1+\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}\sin^2 3x.$

215. $\cos^2 x+\cos\frac{x}{2}\cos^2 x-\cos\frac{x}{2}-1=2\left(\sin\frac{x}{4}-\cos x\right)^2.$

216. $\sin x\left(\cos\frac{x}{4}-2\sin x\right)+\cos x\left(1+\sin\frac{x}{4}-2\cos x\right)=0.$

217. $\cos^2 x+\cos^2 2x-2\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{3}{4}.$

218. $(1+\cos x)(1+\cos 2x)(1+\cos 3x)=\frac{1}{2}.$

219. $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}=3.$

220. $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{8}\cos 15x.$

221. $7\sin x+6\sin 3x+5\sin 5x+4\sin 7x=0.$

222. $3\sin x+4\sin 3x+2\sin 5x+\sin 7x=0.$

223. $|\sin 3x|^{\operatorname{tg} 5x}=1$. **224.** $|\sin x|^{\operatorname{tg} x}+|\cos x|^{\operatorname{tg} x}=1$.

225. $\cos^5\left(x+\frac{\pi}{7}\right)-\sin^3\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=1$.

226. $5\sin^5 x-3\cos^3 x=5$.

227. $\sin\left(\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=\cos\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right)$.

228. $\sin(\sin x)=\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right)$. **229.** $2\sin^2 x+\sin x^2=1$.

230. $\sin(2x^2+x)\cos x^2-\sin(x^2+x)\cos 2x^2=0$.

231. $\sin(3\sqrt{x}+2x)\cos(x-2\sqrt{x})-\sin 2(x+\sqrt{x})\cos(3\sqrt{x}-x)=0$.

232. $\frac{1}{2}\cos(x^2+x)+\sin\left(x^2-\frac{\pi}{6}\right)\cos x=0$.

233. $\sin\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x^2-x)=0$.

234. $\operatorname{tg}\sqrt{x+16}=\operatorname{tg}\sqrt{x}$. **235.** $\sin\pi\sqrt{x}=\cos\pi\sqrt{2-x}$.

236. $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{x}=\operatorname{ctg} 3\pi x$.

237. Найдите все решения уравнения $2\cos 2x-4\cos x=1$, удовлетворяющие неравенству $\sin x\geqslant 0$.

238. Найдите все решения уравнения $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<-\frac{1}{2}$.

239. Найдите все решения уравнения $(1+\operatorname{tg}^2 x)\sin x-\operatorname{tg}^2 x+1=0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x<0$.

240. Найдите решения уравнения $\sin x\cos\frac{\pi}{7}-\cos x\sin\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$, удовлетворяющие условию $-\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$.

241. Найдите решения уравнения $(1+2\cos 2x)\sin x+(1-2\cos 2x)\cos x=0$, удовлетворяющие неравенствам $\pi<\left|2x-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{7\pi}{3}$.

242. Найдите решения уравнения $2+\cos\frac{3}{2}x+\sqrt{3}\sin\frac{3}{2}x=4\sin^2\frac{x}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$.

243. Найдите решения уравнения

$$\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{5}{8}\pi-\frac{3}{2}x\right),$$

удовлетворяющие неравенству $\sin\frac{3}{2}x<0$.

244. Среди корней уравнения $\frac{\cos 2\pi x}{1+\operatorname{tg}\pi x}=0$ найдите тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой.