«Комплексные числа и действия над ними»

Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение вида $z=a+bi$**,** где a и b – действительные числа, i – *мнимая единица*, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется ***действительной частью*** числа z ($a = Re\, z$), а b - ***мнимой частью*** ($b = Im\, z$).

Если $a=Re\, z=0$, то число z будет *чисто мнимым*,
если $b=Im\, z=0$, то число z будет *действительным*.

Два комплексных числа $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называются *равными*, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1=a_2; \qquad b_1=b_2$$

Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части

$$a=b=0.$$

Также комплексные числа можно записывать, например, в виде $z=x+yi$, $z=u+vi$.

Числа $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ называются ***взаимно сопряженными.***

Числа $z=a+bi$ и $-z=-a-bi$ называются ***противоположными***

Множество комплексных чисел обозначается буквой **С**

$$R \subset C$$

Запись числа в виде $z=x+yi$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

содержание

Действия над комплексными числами

1) Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

а) Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Свойства операции сложения:

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$,
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$,
3. $z+0=z$.

б) Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

Разностью двух комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1 и определяется равенством

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

содержание

в) Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z=z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$i^2=-1.$$

Свойства операции умножения:

1. $z_1z_2=z_2z_1$,
2. $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$,
3. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$,
4. $z\cdot 1=z$.

содержание

г) Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению.

Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т. е. $\frac{z_1}{z_2} = z$, если $z_2 z = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i \neq 0$, $z = x + yi$, то из равенства $(x+yi)(x_2+iy_2) = x_1 + y_1 i$, следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y:

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

д) Возведение комплексного числа, заданного в алгебраической форме в n-ю степень

Выпишем целые степени мнимой единицы:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1,$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i,$$
$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

В общем виде полученный результат можно записать так:

$$i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i; \qquad i^{4n+2} = -1; \qquad i^{4n+3} = -i \;\; (n = 0,\, 1,\, 2, \ldots).$$

Пример 2. Вычислить i^{2092} .

Решение.

Представим показатель степени в виде $n=4k+l$ и воспользуемся свойством степени с рациональным показателем $z^{4k+1}=(z^4)^k \cdot z^l$.

Имеем: $2092=4 \cdot 523$.

Таким образом, $i^{2092} = i^{4 \cdot 523} =(i^4)^{523}$, но так как $i^4=1$, то окончательно получим $i^{2092} =1$.

Ответ: $i^{2092} =1$.

д) Возведение комплексного числа, заданного в алгебраической форме в n-ю степень

Выпишем целые степени мнимой единицы:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1,$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i,$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$$ и т.д.

В общем виде полученный результат можно записать так:

$$i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i; \qquad i^{4n+2} = -1; \qquad i^{4n+3} = -i \ (n = 0,\ 1,\ 2, ...).$$