

«Комплексные числа и действия над ними»

Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение вида $z=a+bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \quad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется **действительной частью** числа z ($a = \operatorname{Re} z$), а b – **мнимой частью** ($b = \operatorname{Im} z$).

Если $a = \operatorname{Re} z = 0$, то число z будет **чисто мнимым**,
если $b = \operatorname{Im} z = 0$, то число z будет **действительным**.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются **равными**, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2$$

Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части

$$a = b = 0.$$

Также комплексные числа можно записывать, например, в виде $z = x + yi$,
 $z = u + vi$.

Числа $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ называются ***взаимно сопряженными***.

Числа $z=a+bi$ и $-z=-a-bi$ называются ***противоположными***

Множество комплексных чисел обозначается буквой **C**

$$R \subset C$$

Запись числа в виде $z=x+yi$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Действия над комплексными числами

1) Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

а) Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Свойства операции сложения:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$

2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$

3. $z + 0 = z.$

б) Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется такое комплексное число z , которое, будучи сложеным с z_2 , дает число z_1 и определяется равенством

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

в) Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$i^2 = -1.$$

Свойства операции умножения:

1. $z_1 z_2 = z_2 z_1$,
2. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$,
3. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$,
4. $z \cdot 1 = z$.

г) Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению.

Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z , которое будучи умноженным на z_2 , дает число z_1 , т.

$$\text{е. } \frac{z_1}{z_2} = z, \text{ если } z_2 z = z_1.$$

Если положить $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i \neq 0$, $z = x + y i$, то из равенства $(x + y i)(x_2 + i y_2) = x_1 + y_1 i$, следует

$$\begin{cases} x x_2 - y y_2 = x_1, \\ x y_2 + y x_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y :

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

д) Возведение комплексного числа, заданного в алгебраической форме в n -ю степень

Выпишем целые степени мнимой единицы:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1,$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i,$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

В общем виде полученный результат можно записать так:

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Пример 2. Вычислить i^{2092} .

Решение.

Представим показатель степени в виде $n=4k+l$ и воспользуемся свойством степени с рациональным показателем $z^{4k+l} = (z^4)^k \cdot z^l$.

Имеем: $2092 = 4 \cdot 523$.

Таким образом, $i^{2092} = i^{4 \cdot 523} = (i^4)^{523}$, но так как $i^4 = 1$, то окончательно получим $i^{2092} = 1$.

Ответ: $i^{2092} = 1$.

д) Возведение комплексного числа, заданного в алгебраической форме в n -ю степень

Выпишем целые степени мнимой единицы:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1,$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i,$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

В общем виде полученный результат можно записать так:

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$