Линейные пространства и подпространства

Линейное пространство: основные определения и понятия

Пусть задано множество L, элементами которого могут быть как числа (числовые множества), так и другие объекты (векторы, матрицы, функции и т.д.).

Элементы множества L будем обозначать $x, y, z, \ldots$ или $x_i, y_i, z_i, \ldots$

Пусть в множестве L введены две операции.

Операция *сложения* элементов множества, когда $\forall\, x, y \in L$ ставится в соответствие элемент единственный элемент $z \in L$, называемый суммой элементов и обозначаемый $z = x + y$.

Операция *умножения элементов* множества на действительное (комплексное) *число*, когда $\forall\, x \in L$ и $\forall\, \alpha \in R$ $(\forall\, \alpha \in C)$ ставится в соответствие единственный элемент $z \in L$, называемый произведением x на действительное (комплексное) число α и обозначаемый $z = \alpha \cdot x$.

Линейное пространство: определение

Определение 1. Множество L называется *линейным пространством над полем действительных (комплексных) чисел,* если операции сложения элементов и умножения на действительное (комплексное) число, обладают свойствами:

1) $\forall\ x, y \in L \quad x + y = y + x$ (коммутативность операции сложения);

2) $\forall\ x, y, z \in L \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность операции сложения);

3) $\exists\ a \in L$, *такой что* $\forall\ x \in L \quad x + a = a + x = x$ (элемент a называется *нулевым* и обозначается 0);

4) $\forall\ x \in L \quad \exists\ b \in L$, *такой что* $x + b = b + x = 0$ (элемент b называется *противоположным* элементу x и обозначается $y = -x$);

5) $\forall\ x \in L \quad 1 \cdot x = x$;

6) $\forall\ x, y \in L$ и $\forall\ \alpha \in R\ (\forall\ \alpha \in C)\quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

7) $\forall\ x \in L$ и $\forall\, \alpha, \beta \in R\ (\forall\, \alpha, \beta \in C)\quad (\alpha \cdot \beta)x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) = \beta \cdot (\alpha \cdot x)$;

8) $\forall\ x \in L$ и $\forall\, \alpha, \beta \in R\ (\forall\, \alpha, \beta \in C)\quad (\alpha + \beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

Замечание. Свойства 1) – 8) называются аксиомами линейного пространства

Линейные пространства: примеры

Среди известных нам множеств, линейными пространствами являются, например:

- множество комплексных чисел (как над полем комплексных, так и над полем действительных чисел),
- множество действительных чисел (над полем действительных чисел);
- множество матриц размера $m \times n$;
- множество векторов плоскости, исходящих из одной точки (над полем действительных чисел).

К множествам, не являющимся линейными пространствами, относятся, например:

- множество натуральных чисел;
- множество целых чисел;
- множество рациональных чисел.

Линейные пространства: следствия из аксиом

Если множество L является линейным пространством, то из свойств 1) – 8) следует следующие интересные результаты, которые принято называть следствиями из аксиом.

Следствие 1. Если L – линейное пространство, то существует единственный нулевой элемент.

Доказательство.

Применим метод от противного. Предположим, что существуют два элемента $\theta_1, \theta_2 \in L$, такие что:

$$\boxed{\theta_1 \neq \theta_2,} \qquad \boxed{\forall \ x \in L \quad x+\theta_1 = \theta_1 + x = x, \ x+\theta_2 = \theta_2 + x = x}$$

$\theta_1 + \theta_2 = \theta_1,$ так как θ_2 - нулевой элемент;

$\theta_1 + \theta_2 = \theta_2,$ так как θ_1 - нулевой элемент.

$$\boxed{\theta_1 = \theta_2,}$$

Получаем противоречие. Следовательно, предположение – неверное, и $\theta_1 = \theta_2$. Т. е. нулевой элемент – единственный.

Следствие 2. Если L – линейное пространство, то $\forall \ x \in L$ существует единственный противоположный элемент $-x$.

Линейные пространства: следствия из аксиом

Следствие 3. $\forall\ \alpha \in R\ (\forall\ \alpha \in C)\quad \alpha \cdot 0 = 0.$

Доказательство. $\forall\ x \in L,\qquad \forall\ \alpha \in R\ (\forall\ \alpha \in C)$

$$\alpha \cdot x = \alpha \cdot (x + 0) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot 0$$

$$\alpha \cdot x = \alpha \cdot (x + 0) = \alpha \cdot (0 + x) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \cdot 0 = 0.$$

Следствие 4. $\forall\ x \in L\quad 0 \cdot x = 0.$

Следствие 5. $\alpha x = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \alpha = 0. \end{array}\right.$

Следствие 6. $\forall\ \alpha \in R\ (\forall\ \alpha \in C)$ *и* $\forall\ x \in L:$

1) $\alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x)$, 2) $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$.

Линейные пространства: следствия из аксиом

Определение 2. *Элемент* $z \in L$ *называется разностью элементов* $x, y \in L$, *если* $y + z = x$.

Обозначение: $z = x - y$.

Следствие 7. *1)* $\forall\ x, y \in L$ существует единственный элемент $z = x - y$;

2) $\forall\ x, y \in L$ и $\forall\ \alpha \in R$ $(\forall\ \alpha \in C)$ $\alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y$;

3) $\forall\ x \in L$ и $\forall\ \alpha, \beta \in R$ $(\forall\ \alpha, \beta \in C)$ $(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x$.

Вместо термина «линейное пространство» иногда употребляют термины «векторное пространство» или «аффинное пространство».

Элементы линейного пространства принято называть *векторами*.

Линейные пространства: основные понятия

Пусть L - некоторое линейное пространство над полем действительных чисел. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$.

Определение 3. Выражение $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Определение 4. Набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называется *набором коэффициентов, соответствующим линейной комбинации векторов* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Определение 5. Набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называется *тривиальным (нулевым)*, если все коэффициенты равны нулю.

Определение 6. Набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называется *нетривиальным (ненулевым)*, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Определение 7. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *линейно зависимыми*, если найдется нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, при котором линейная комбинация векторов $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$.

Определение 7*. Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *линейно зависимой*, если найдется нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, при котором линейная комбинация векторов $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$.

Определение 8. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *линейно независимыми*, если линейная комбинация этих векторов обращается в нуль только при тривиальном наборе коэффициентов.

Определение 8*. Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *линейно независимой*, если линейная комбинация этих векторов обращается в нуль только при тривиальном наборе коэффициентов.

Замечание. Нетрудно заметить, что если набор (система) векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяет определению 7 (7*), то не удовлетворяет определению 8 (8*), и наоборот. В связи с этим в некоторых учебниках ограничиваются только одним из этих определений.

Критерий линейной зависимости системы векторов

Теорема 1 (Критерий линейной зависимости векторов в произвольном пространстве)

Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией остальных, т.е.

$$\exists\ i\ :\quad x_i = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_{i+1} x_{i+1} + \ldots + \beta_n x_n, \quad \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n \in R.$$

Доказательство. *1) Необходимость.*

Пусть векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы, тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, при котором $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$.

Пусть $\alpha_i \neq 0$,

$$\alpha_i x_i = -(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{i-1} x_{i-1} + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \ldots + \alpha_n x_n),$$

$$\alpha_i x_i = -\alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_{i-1} x_{i-1} - \alpha_{i+1} x_{i+1} - \ldots - \alpha_n x_n,$$

$$x_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} x_1 - \ldots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} x_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} x_{i+1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} x_n.$$

Вводя $\beta_k = -\dfrac{\alpha_k}{\alpha_i}$, $k = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$,

$$x_i = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_{i+1} x_{i+1} + \ldots + \beta_n x_n$$

Критерий линейной зависимости системы векторов

Теорема 1 (Критерий линейной зависимости векторов в произвольном пространстве)

Векторы $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией остальных, т.е.

$$\exists\ i\ :\quad x_i = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n,\quad \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n \in R.$$

Доказательство. *Достаточность.*

Пусть

$$x_i = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n,\ \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n \in R.$$

Тогда

$$\beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n + (-x_i) = 0,$$

$$\beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + (-x_i) + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n = 0,$$

$$\beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + (-1) \cdot x_i + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n = 0.$$

Откуда следует, что линейная комбинация векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ обращается в нуль при нетривиальном наборе коэффициентов $\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, -1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n$, где $\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n \in R$.

Частные случаи линейной зависимости системы векторов

Следствие 1. Если среди векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ имеется нулевой вектор, то они линейно зависимы. (Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависимая).

Доказательство.

Пусть $x_i = 0$, $\alpha_1 = 0,\ ...,\ \alpha_{i-1} = 0,\ \alpha_i = 1,\ \alpha_{i+1} = 0,\ ...,\ \alpha_n = 0$

$$0 \cdot x_1 + ... + 0 \cdot x_{i-1} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot x_{i+1} + ... + 0 \cdot x_n = 0$$

Следствие 2. Если среди векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ есть два равных вектора, то они линейно зависимы. (Если система векторов содержит два равных вектора, то она линейно зависимая).

Доказательство. Пусть $x_i = x_j$, $i < j$.

Тогда, при $\alpha_i = 1,\ \alpha_j = -1,\ \alpha_k = 0,\ k = 1, ..., i-1, i+1, ..., j-1, j+1, ..., n$

линейная комбинация векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ обратится в нуль.

Следствие 3. Если среди векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ есть два противоположных вектора, то они линейно зависимы. (Если система векторов содержит два противоположных вектора, то она линейно зависимая).

Частные случаи линейной зависимости и независимости

Следствие 4. Если среди векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть к линейно зависимых, то они линейно зависимы. (Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему векторов, то она линейно зависимая).

Доказательство.

Пусть линейно зависимыми являются векторы $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$, $2 \le k \le n-1$ (в случае необходимости векторы всегда можно перенумеровать).

Тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, при котором $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = 0$.

Полагая $\alpha_i = 0$, $i > k$, получаем $\underbrace{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k}_{0} + \underbrace{0 \cdot x_{k+1} + \ldots + 0 \cdot x_n}_{0} = 0$

Следствие 5. Если векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независимые, то любые κ векторов из этого набора являются линейно независимыми. (Если система векторов линейно независимая, то любая её подсистема векторов линейно независима).

Доказательство. Применим метод от противного. Предположим, что нашлась линейно зависимая подсистема векторов, тогда, согласно следствию 4, вся система векторов будет линейно зависимой. Получаем противоречие.

Линейная зависимость и линейная независимость векторов: примеры

В линейном пространстве векторов, исходящих из одной точки на плоскости:

1) любые два коллинеарных вектора – линейно зависимы, а любые два неколлинеарных вектора линейно независимы;
2) любые три вектора – линейно зависимы.

В линейном пространстве векторов, исходящих из одной точки в «реальном» пространстве:

1) любые три компланарных вектора линейно зависимы, а любые три некомпланарных вектора линейно независимы;
2) любые четыре вектора – линейно зависимы.

Конечномерное пространство: определение, базис

Определение 9. Линейное пространство L называется *конечномерным*, размерности n, если в этом пространстве найдется система из n линейно независимых векторов, а любая система из n+1 вектора уже линейно зависима.

Обозначение: $\dim L = n$.

Определение 10. Линейное пространство L называется *бесконечномерным*, если $\forall\ n \in N$ в нем найдется система из n линейно независимых векторов.

Обозначение: $\dim L = \infty$.

Определение 11. Система векторов называется *базисом* линейного пространства L, если

1) она линейно независима;
2) любой вектор $x \in L$ может быть представлен в виде линейной комбинации этих векторов.

Способ выбора базиса в конечномерном линейном пространстве

Теорема 2 (О способе выбора базиса в конечномерном пространстве). Если L - конечномерное линейное пространство размерности n, то любая система из n линейно независимых векторов является базисом этого пространства.

Доказательство.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - произвольная линейно независимая система векторов линейного пространства L.

Пусть x - произвольный вектор линейного пространства L.

$$\boxed{\dim L = n,}$$

$x_1, x_2, ..., x_n, x$ – *линейно зависимая*, т.е. найдется ненулевой набор

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$: $\quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x = 0.$

Предположим, что $\alpha_{n+1} = 0$, тогда $\boxed{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0,}$

векторы $x_1, x_2, ..., x_n$ - линейно зависимы. Получаем противоречие

$\boxed{\alpha_{n+1} \neq 0}$ $\quad \alpha_{n+1} \cdot x = -(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n),$

$$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} \cdot x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} \cdot x_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \cdot x_n$$

Конечномерные пространства: примеры и свойства

Примеры:

линейное пространство векторов плоскости, исходящих из одной точки – есть конечномерное пространство размерности 2, где в качестве базиса можно выбрать любые два неколлинеарных вектора;

линейное пространство векторов, исходящих из одной точки в «реальном» пространстве – есть конечномерное пространство размерности 3, где в качестве базиса можно выбрать любые три некомпланарных вектора.

Следствие. В конечномерном линейном пространстве L, размерности n, любая система из $n+k,\ k \in N$ векторов является линейно зависимой.

Доказательство.

Если $k=1$, то линейная зависимость системы из $n+1$ вектора автоматически следует из определения 9, так как $\dim L = n$.

При $k>1$ система из $n+k$ векторов содержит $n+k$ различных подсистем из $n+1$ вектора, каждая из которых является линейно зависимой, а, следовательно, и сама система является линейно зависимой (смотрите следствие 4 к теореме 1).

Определение 12. *Базисом* линейного пространства L называется максимально линейно независимая система векторов.

Свойства конечномерных линейных пространств

Базис конечномерного линейного пространства размерности n принято обозначать $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Определение 13. Представление вектора $x \in L$ в виде $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ называется *разложением по базису.* Набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в этом случае называется *координатами вектора x в базисе* $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Теорема 3 (О единственности разложения вектора по базису). Если в конечномерном линейном пространстве L, размерности n, зафиксирован базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, то для любого вектора $x \in L$ найдется единственный набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, такой что $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$.

Доказательство. Применим метод от противного.

$$\boxed{x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n,} \qquad \boxed{x = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n,}$$

$$x - x = (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n) - (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n),$$

$$\boxed{0 = (\beta_1 - \gamma_1)e_1 + (\beta_2 - \gamma_2)e_2 + \dots + (\beta_n - \gamma_n)e_n.}$$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис,

$$\boxed{\begin{cases} \beta_1 - \gamma_1 = 0, \\ \beta_2 - \gamma_2 = 0, \\ \vdots \\ \beta_n - \gamma_n = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = \gamma_1, \\ \beta_2 = \gamma_2, \\ \vdots \\ \beta_n = \gamma_n. \end{cases}}$$

Свойства конечномерных линейных пространств

Теорема 4 (Критерий линейной независимости векторов в конечномерном пространстве). Если $\dim L = n$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - базис, то векторы

$$a_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \ldots + \alpha_{n1}e_n,$$

$$a_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{n2}e_n,$$

$$\vdots$$

$$a_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n$$

линейно независимы тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство критерия линейной независимости

$$\boxed{\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n = 0,}$$

$$\beta_1(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \ldots + \alpha_{n1}e_n) + \beta_2(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 . + .. + \alpha_{n2}e_n) + \ldots +$$

$$+ \beta_n(\alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 \ldots + \alpha_{nn}e_n) = 0 .$$

$$\boxed{\begin{gathered}(\beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \ldots + \beta_n\alpha_{1n})e_1 + (\beta_1\alpha_{21} + \beta_2\alpha_{22} + \ldots + \beta_n\alpha_{2n})e_2 + \ldots + \\ + (\beta_1\alpha_{n1} + \beta_2\alpha_{n2} + \ldots + \beta_n\alpha_{nn})e_n = 0.\end{gathered}}$$

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно независимые векторы

$$\boxed{\begin{cases} \beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \ldots + \beta_n\alpha_{1n} = 0, \\ \beta_1\alpha_{21} + \beta_2\alpha_{22} + \ldots + \beta_n\alpha_{2n} = 0, \\ \vdots \\ \beta_1\alpha_{n1} + \beta_2\alpha_{n2} + \ldots + \beta_n\alpha_{nn} = 0. \end{cases}}$$

Доказательство критерия линейной независимости

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \ldots + \beta_n\alpha_{1n} = 0, \\ \beta_1\alpha_{21} + \beta_2\alpha_{22} + \ldots + \beta_n\alpha_{2n} = 0, \\ \vdots \\ \beta_1\alpha_{n1} + \beta_2\alpha_{n2} + \ldots + \beta_n\alpha_{nn} = 0. \end{cases}$$

система имеет нетривиальное решение (тогда векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются линейно зависимыми), тогда и только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных равен нулю

система имеет только тривиальное решение (тогда векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются линейно независимыми), тогда и только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля

Следовательно, векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следствие из критерия линейной независимости

Следствие (Критерий линейной зависимости векторов в конечномерном пространстве) Если $dim\,L = n$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - базис, то векторы

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \ldots + \alpha_{n1}e_n,\\
a_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{n2}e_n,\\
&\vdots\\
a_n &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n
\end{aligned}$$

линейно зависимы тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Данный результат автоматически получен при доказательстве рассмотренной выше теоремы.

Формулы для связи двух базисов

Пусть в пространстве L заданы два базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$.

$$\boxed{\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n, \\ e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n, \\ &\vdots \\ e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n. \end{aligned}}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица перехода

$$\varepsilon' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n), \quad \varepsilon = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

$$\boxed{(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}}$$

$$\det T \neq 0, \ \exists \ T^{-1}$$

$$\varepsilon' \cdot T^{-1} = \varepsilon \cdot T \cdot T^{-1},$$

$$\varepsilon' \cdot T^{-1} = \varepsilon \cdot E,$$

$$\boxed{\varepsilon' = \varepsilon \cdot T}$$

$$\boxed{\varepsilon' \cdot T^{-1} = \varepsilon}$$

Связь координат вектора в двух базисах

Пусть в пространстве L заданы два базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. $\boxed{x \in L}$

$$\boxed{x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,} \qquad X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad x = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot X.$$

$$\boxed{x = \alpha'_1 e'_1 + \alpha'_2 e'_2 + \ldots + \alpha'_n e'_n,} \qquad X' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}, \qquad x = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} = \varepsilon' \cdot X'.$$

$$\boxed{\varepsilon \cdot X = \varepsilon' \cdot X',} \qquad \varepsilon' = \varepsilon \cdot T,$$

T – матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$

$$\varepsilon \cdot X = \varepsilon \cdot T \cdot X', \qquad \boxed{X = T \cdot X',} \qquad T^{-1} \cdot X = T^{-1} \cdot T \cdot X'$$

$$\boxed{T^{-1} \cdot X = X'}$$

Линейные подпространства: основные понятия

Пусть задано некоторое линейное пространство L над некоторым полем P

Определение 1. Подмножество M линейного пространства L называется *линейным подпространством* этого пространства, если оно само является линейным пространством по отношению к определенным в L операциям сложения векторов и умножения векторов на число из поля P.

Теорема 1 (достаточные условия) Для того, чтобы непустое подмножество M линейного пространства L было его линейным подпространством, достаточно выполнения следующих требований:

1) если $x, y \in M$, то $x + y \in M$;

2) если $x \in M$, то $\forall \alpha \in P \ \ \alpha x \in M$.

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно показать, что в этом случае выполняются аксиомы 1 – 8 из определения линейного пространства.

Следствие 1. $M = L$ - линейное подпространство L.

Определение 2. Множество $M = \{0\}$, состоящее из одного нулевого вектора пространства L, называется *нулевым подпространством*.

Следствие 2. $M = \{0\}$ - линейное подпространство L

Линейные подпространства: основные понятия и факты

Следствие 3. Если $a_1, a_2, ..., a_k \in L$, то множество $M = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k\}$, где $\alpha_i \in R,\ i = 1, 2, ..., k$; - линейное подпространство пространства L.

Доказательство Пусть $x, y \in M$.

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k, \qquad y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + ... + \beta_k a_k$$

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + ... + (\alpha_k + \beta_k)a_k, \qquad x + y \in M;$$

$$\forall \alpha \in R, \quad \alpha x = (\alpha\alpha_1)a_1 + (\alpha\alpha_2)a_2 + ... + (\alpha\alpha_k)a_k, \qquad \alpha x \in M.$$

Замечание. Если линейное подпространство M задается как линейная комбинация векторов $a_1, a_2, ..., a_k$, то говорят, что линейное подпространство *порождено* системой векторов $a_1, a_2, ..., a_k$.

Следствие 4. Если $\dim L = n$ и M – линейное подпространство линейного пространства L, то $\dim M = k$, где $k \le n$, причем $\dim M = n$, если $M = L$ и $\dim M = 0$, если $M = \{0\}$.

Следствие 5. Если $\dim L = n$, то для $\forall k:\ 0 < k < n$ существует линейное подпространство M, такое что $\dim M = k$.

Линейные подпространства: основные понятия и факты

Пусть M_1 и M_2 - линейные подпространства пространства линейного пространства L.

Определение 3. Множество $M_0 = \{x \in L | x \in M_1 \text{ и } x \in M_2\}$ называется *пересечением* линейных подпространств M_1 *и* M_2

Обозначение: $M_0 = M_1 \cap M_2$

Определение 4. Множество $\overline{M} = \{x \in L | x = x_1 + x_2, x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$ называется *суммой* линейных подпространств M_1 *и* M_2

Обозначение: $\overline{M} = M_1 + M_2$

Следствие 6. Если M_1 и M_2 - линейные подпространства линейного пространства L, то пересечение и сумма этих подпространств – линейные подпространства линейного пространства L.

Следствие 7. Если M_1 и M_2 - линейные подпространства линейного пространства L, причем, $\dim M_1 = k_1$, $\dim M_2 = k_2$,

то $$\dim(M_1 + M_2) = k_1 + k_2 - \dim(M_1 \cap M_2)$$