

Действительный анализ

*Основной источник : Смагин В.В.
Действительный анализ. Учебное пособие.
2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

- 1. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
- 2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
- 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 1. Интеграл Лебега

(продолжение)

4. Множество функций $C^+[a, b]$

Определение множества $C^+[a, b]$

Множество $C^+[a, b]$ (или просто C^+) состоит из функций $x(t)$ таких, что:

- 1) $x(t)$ определена п.в. на $[a, b]$;
- 2) существует такая последовательность $\{h_n(t)\}$ ступенчатых на $[a, b]$ функций, что $h_n(t) \nearrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ и $(\exists c \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N}) [Ih_n \leq c]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Первое условие из определения означает, что множество

$$A_1 = \{t \in [a, b] \mid x(t) \text{ — не определена}\} \text{ — ММН.}$$

Из второго условия следует, что множество

$$A_2 = \{t \in [a, b] \mid h_n(t) \not\rightarrow x(t)\} \text{ — ММН.}$$

СВОЙСТВО. Если $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x \in C^+[a, b]$, то и функция $y \in C^+[a, b]$.

(Доказать самостоятельно.)

Примеры функций из C^+

1. **Всякая ступенчатая на $[a,b]$ функция $h(t)$ принадлежит $C^+[a,b]$: $h(t)$ определена п.в. на $[a,b]$ (кроме, может быть, точек разбиения); последовательность $\{h_n(t) \equiv h(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится п.в. к $h(t)$, не убывая, причем $Ih_n = Ih = \text{const} \forall n$.**

2. Функция Дирихле на отрезке $[0,1]$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \cap \mathbf{Q}, \\ 0, & t \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

*почти
всюду*

$x(t) = 0 \Rightarrow \{h_n(t) \equiv 0\}_{n=1}^{\infty}$ сходится п.в. к $x(t)$,
не убывая. Следовательно, $x \in C^+[0,1]$.

3. Всякая непрерывная на $[a, b]$ функция принадлежит $C^+[a, b]$.

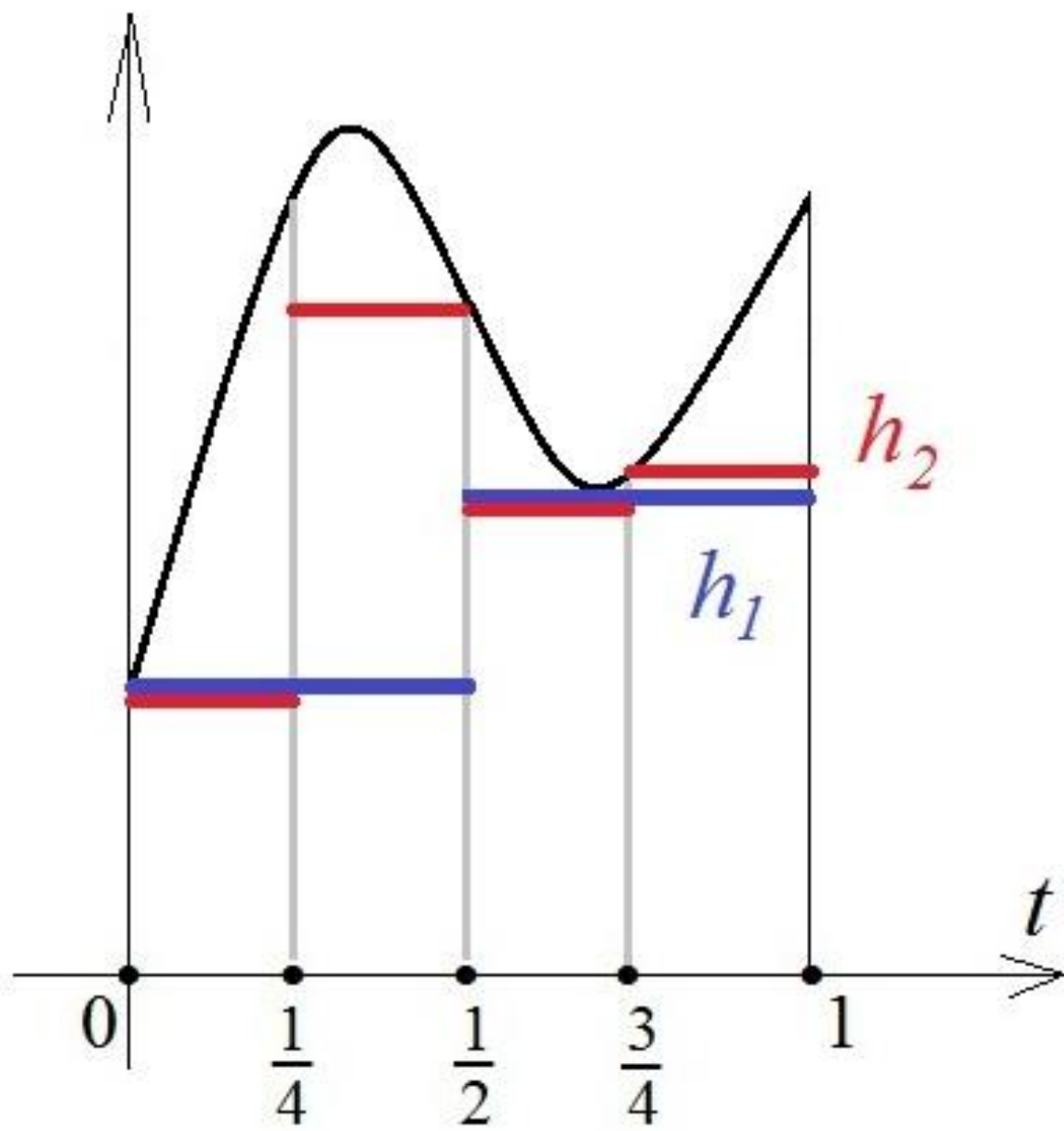
Пусть $[a, b] = [0, 1]$. Рассмотрим последовательность разбиений отрезка $[0, 1]$:

$$P_n = \left\{ 0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}, 1 \right\}.$$

Построим последовательность $\{h_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ступенчатых на $[0, 1]$ функций: $h_n(t) = \min_{\tau \in \overline{\Delta}_k^n} x(\tau)$ на

интервале $\Delta_k^n = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right)$, $k = \overline{1, 2^n}$

$(\overline{\Delta}_k^n = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right])$ — замыкание Δ_k^n .



Тогда $h_n(t) \rightarrow x(t)$ п.в. на $[0,1]$, монотонно
возрастая (не убывающая).

А в силу того, что п.в. на $[0,1]$ $h_n(t) \leq x(t)$ при
 $\forall n$, имеем : $Ih_n \leq (R) \int_0^1 x(t)dt = C$ при $\forall n$ (по
свойству интеграла Римана).

Следовательно, $x \in C^+[0,1]$.

4. Рассмотрим функцию на отрезке $[0,1]$:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0,1] \setminus D, \\ \sin t, & t \in D \end{cases} \stackrel{\substack{\text{почти} \\ \text{всюду}}}{=} \cos t = y(t),$$

(D — множество Кантора).

Так как функция $y(t) = \cos t$ непрерывна на $[0,1]$,
то $y \in C^+[0,1] \Rightarrow x \in C^+[0,1]$.

ЛЕММА 9. Пусть функции $x, y \in C^+$. Тогда множеству C^+ принадлежат и следующие функции:

$\alpha x(t)$ при $\alpha \geq 0$, $x(t) + y(t)$, $\min\{x(t), y(t)\}$,
 $\max\{x(t), y(t)\}$.

Доказательство. Для функций $\alpha x(t)$ и $x(t) + y(t)$ утверждение леммы очевидно.

Докажем, что $z(t) = \min\{x(t), y(t)\} \in C^+$. Пусть $\{h_n(t)\}$ и $\{k_n(t)\}$ — последовательности ступенчатых на $[a, b]$ функций, такие, что $h_n(t) \nearrow x(t)$ и $k_n(t) \nearrow y(t)$, причем $Ih_n \leq c_1$ и $Ik_n \leq c_2 \forall n$. Далее заметим, что ступенчатые функции $l_n(t) = \min\{h_n(t), k_n(t)\} \nearrow z(t)$ и, наконец, $Il_n \leq Ih_n \leq c_1 \forall n$.

Принадлежность к C^+ функции $\max\{x(t), y(t)\}$ — без доказательства.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая функция $x \in C^+[a, b]$ почти всюду конечна.*

(Без доказательства.)

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая функция $x \in C^+$ является измеримой.*

Пример. Функция $x \in C^+[0,1]$, но $(-x) \notin C^+[0,1]$.

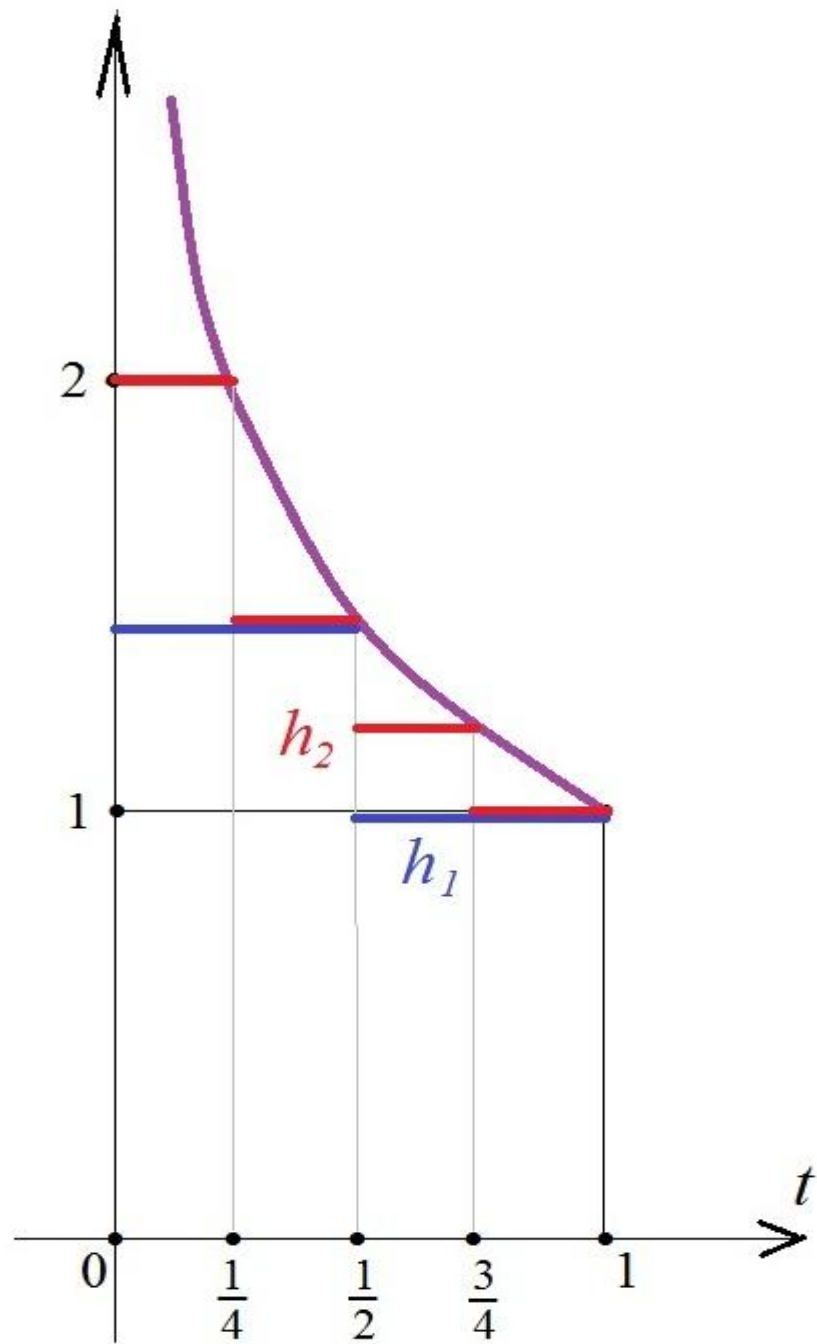
Рассмотрим функцию $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ на отрезке $[0,1]$.

Она определена на полуинтервале $(0,1]$, то есть п.в. на $[0,1]$. Несобственный интеграл от неограниченной

функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$: $(R_\infty) \int_0^1 x(t) dt = 2$.

Рассмотрим последовательность разбиений отрезка $[0,1]$:

$$P_n = \left\{ 0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}, 1 \right\}.$$



Построим последовательность ступенчатых на

$[0,1]$ функций $h_n(t): h_n(t) = \min_{\tau \in \overline{\Delta}_k^n} x(\tau) = x\left(\frac{k}{2^n}\right)$ на

интервале $\Delta_k^n = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right), k = \overline{1, 2^n}$

$(\overline{\Delta}_k^n = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] - \text{замыкание } \Delta_k^n).$

Тогда $h_n(t) \rightarrow x(t)$ п.в. на $[0,1]$, монотонно
возрастая (не убывая).

А в силу того, что п.в. на $[0,1]$ $h_n(t) \leq x(t)$ при
 $\forall n$, имеем: $Ih_n \leq (R_\infty) \int_0^1 x(t) dt = 2$ при $\forall n$.

Следовательно, $x \in C^+[0,1]$.

Покажем, что $y = -x \notin C^+[0,1]$.

Предположим противное : $y = -x \in C^+[0,1]$. Тогда существует последовательность ступенчатых на $[0,1]$ функций $k_n(t)$, которая сходится к $y(t)$ п.в. на $[0,1]$, монотонно возрастаая, причем $Ik_n \leq C$ при $\forall n$.

Пусть $A \subset [0,1]$ – множество, на котором нарушается монотонная сходимостъ функций $k_n(t)$ к $y(t)$, то есть A – ММН. Рассмотрим также счетное множество B – объединение всех разбиений, соответствующих функциям $k_n(t)$. Следовательно, $D = A \cup B$ – ММН.

Тогда для $(\forall t \in [0,1] \setminus D) [k_1(t) \leq k_2(t) \leq k_3(t) \leq \dots]$.

Пусть $\alpha = \min_{t \in [0,1] \setminus D} k_1(t)$. Тогда для $(\forall t \in [0,1] \setminus D)(\forall n)$
 $[k_n(t) \geq k_1(t) \geq \alpha]$.

Так как $y(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow 0$, то

$(\exists t_0 > 0)(\forall t \in (0, t_0))(y(t) < \alpha - 1)$.

Тогда $(\forall t \in (0, t_0) \setminus D)[k_n(t) - y(t) > 1]$.

Следовательно, $(\forall t \in (0, t_0) \setminus D)[k_n(t) \not\rightarrow y(t)]$.

Но, поскольку $(0, t_0) \setminus D$ – не ММН, мы получили противоречие условию сходимости $k_n(t)$ к $y(t)$ п.в. на $[0,1]$. Итак, наше предположение неверно и $y = -x \notin C^+[0,1]$.

5. Интеграл в множестве $C^+[a,b]$

Пусть функция $x \in C^+$. Тогда 1) $x(t)$ определена п.в. на $[a, b]$ и 2) существует последовательность $\{h_n(t)\}$ ступенчатых на $[a, b]$ функций, что $h_n(t) \nearrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ и $(\exists c \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N}) [Ih_n \leq c]$.

По свойству интеграла от ступенчатой функции (см. лемму 6), числовая последовательность $\{Ih_n\}$ монотонно возрастает. При этом она ограничена сверху.

Тогда существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} Ih_n$.

ЛЕММА 10. Пусть функции $x, y \in C^+$ и $x(t) \leq y(t)$ п.в. на $[a, b]$. Пусть $\{h_n(t)\}$ и $\{k_n(t)\}$ ступенчатые функции такие, что: $h_n(t) \nearrow x(t)$, $k_n(t) \nearrow y(t)$, $Ih_n \leq c_1$, $Ik_n \leq c_2$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} Ih_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Ik_n$.

(Без доказательства.)

Определим теперь интеграл для $x \in C^+$ следующим образом:

$$(C^+)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ih_n. \quad (4)$$

Из леммы 10 следует, что это определение $(C^+)Ix$ не зависит от выбора последовательности ступенчатых функций $\{h_n\}$ и, следовательно, корректно.

Это замечание позволяет переформулировать лемму 10.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функции $x, y \in C^+$ и $x(t) \leq y(t)$ п.в. на $[a, b]$. Тогда $(C^+)Ix \leq (C^+)Iy$.

СВОЙСТВО. Если на $[a, b]$ выполняется $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x \in C^+$, то $(C^+)Ix = (C^+)Iy$.

(Доказать самостоятельно.)

Непосредственно из определения интеграла (4) следует

ЛЕММА 11 (свойства интеграла). Пусть функции $x, y \in C^+$. Тогда:

- 1) $(\forall \alpha \geq 0)[(C^+)I(\alpha x) = \alpha(C^+)Ix]$;
- 2) $(C^+)I(x + y) = (C^+)Ix + (C^+)Iy$.

(Доказать самостоятельно.)

ТЕОРЕМА 2. Пусть задана последовательность функций $\{x_n\} \subset C^+$ такая, что $x_n(t) \nearrow x(t)$ и $(\exists c)(\forall n) [(C^+)Ix_n \leq c]$.

Тогда функция $x \in C^+$ и $(C^+)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} (C^+)Ix_n$.
(Без доказательства.)

СЛЕДСТВИЕ. Пусть дан функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)$, где все функции $y_k \in C^+$ и $y_k(t) \geq 0$. Пусть также $(\exists c)(\forall n) [\sum_{k=1}^n (C^+)Iy_k \leq c]$.

Тогда функция $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in C^+$ и $(C^+)Ix = \sum_{k=1}^{\infty} (C^+)Iy_k$.

Доказательство. Следует определить функции $x_n(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t)$ и применить доказанную теорему 2.