Действительный анализ

Основной источник : *Смагин В.В. Действительный анализ. Учебное пособие. 2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

1. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 1.
Интеграл Лебега

(продолжение)

4. Множество функций $C^+[a, b]$

Определение множества $C^+[a, b]$

Множество $C^+[a, b]$ (или просто C^+) состоит из функций $x(t)$ таких, что:

1) $x(t)$ определена п.в. на $[a, b]$;

2) существует такая последовательность $\{h_n(t)\}$ ступенчатых на $[a, b]$ функций, что $h_n(t) \nearrow x(t)$ при $n \to \infty$ и $(\exists c \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,[\,Ih_n \leq c\,]$.

Замечание. Первое условие из определения означает, что множество
$A_1 = \{t \in [a,b] \,|\, x(t)$ – не определена$\}$ – ММН.

Из второго условия следует, что множество
$A_2 = \{t \in [a,b] \,|\, h_n(t) \not\nearrow x(t)\}$ – ММН.

Свойство. Если $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x \in C^+[a,b]$, то и функция $y \in C^+[a,b]$.

(Доказать самостоятельно.)

Примеры функций из C$^+$

1. **Всякая ступенчатая на** $[a,b]$ **функция** $h(t)$ **принадлежит** $C^+[a,b]$**:** $h(t)$ определена п.в. на $[a,b]$ (кроме, может быть, точек разбиения); последовательность $\{h_n(t) \equiv h(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится п.в. к $h(t)$, не убывая, причем $Ih_n = Ih = const\ \forall n$.

2. Функция Дирихле на отрезке $[0,1]$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \cap \mathrm{Q}, \\ 0, & t \in [0,1] \setminus \mathrm{Q}. \end{cases}$$

$x(t) \overset{\substack{\textit{почти} \\ \textit{всюду}}}{=} 0 \Rightarrow \{h_n(t) \equiv 0\}_{n=1}^{\infty}$ сходится п.в. к $x(t)$, не убывая. Следовательно, $x \in C^{+}[0,1]$.

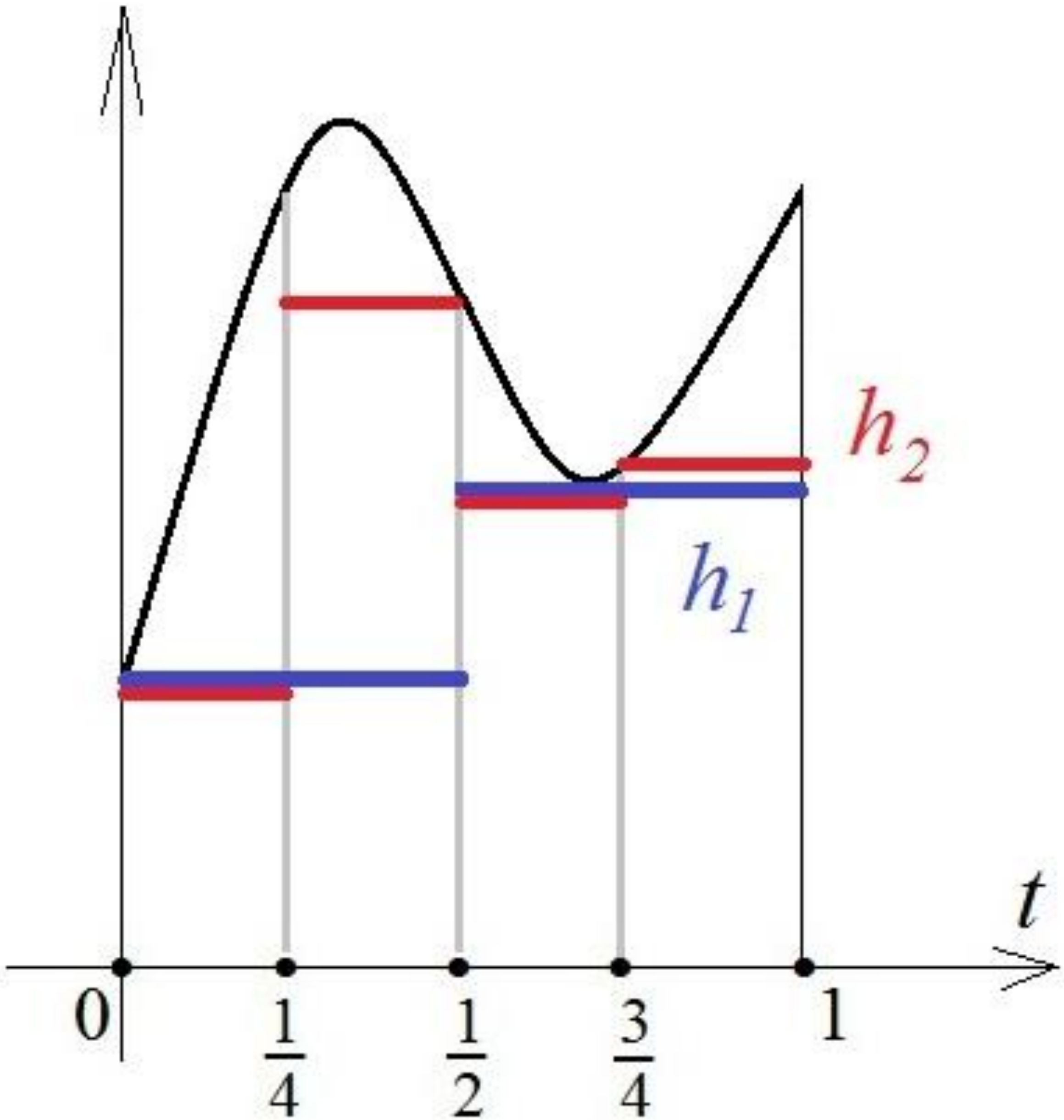
3. Всякая непрерывная на $[a,b]$ функция принадлежит $C^+[a,b]$.

Пусть $[a,b]=[0,1]$. Рассмотрим последовательность разбиений отрезка $[0,1]$:

$$P_n=\{0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n},\dots,\frac{2^n-1}{2^n},1\}.$$

Построим последовательность $\{h_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ступенчатых на $[0,1]$ функций : $h_n(t)=\min\limits_{\tau\in\overline{\Delta}_k^n} x(\tau)$ на интервале $\Delta_k^n=\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)$, $k=\overline{1,2^n}$

($\overline{\Delta}_k^n=\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]$ – замыкание Δ_k^n).



h_2
h_1
t
0
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
1

Тогда $h_n(t) \to x(t)$ п.в. на $[0,1]$, монотонно возрастая (не убывая).

А в силу того, что п.в. на $[0,1]$ $h_n(t) \le x(t)$ при $\forall n$, имеем : $Ih_n \le (R)\int_0^1 x(t)dt = C$ при $\forall n$ (по свойству интеграла Римана).

Следовательно, $x \in C^+[0,1]$.

4. Рассмотрим функцию на отрезке $[0,1]$:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0,1] \setminus D, \\ \sin t, & t \in D \end{cases} \overset{\substack{\text{почти} \\ \text{всюду}}}{=} \cos t = y(t),$$

(D — множество Кантора).

Так как функция $y(t) = \cos t$ непрерывна на $[0,1]$, то $y \in C^+[0,1] \Rightarrow x \in C^+[0,1]$.

Лемма 9. *Пусть функции* $x, y \in C^+$. *Тогда множеству* C^+ *принадлежат и следующие функции:*

$\alpha x(t)$ *при* $\alpha \geq 0$, $x(t) + y(t)$, $\min\{x(t), y(t)\}$, $\max\{x(t), y(t)\}$.

Доказательство. Для функций $\alpha x(t)$ и $x(t) + y(t)$ утверждение леммы очевидно.

Докажем, что $z(t) = \min\{x(t), y(t)\} \in C^+$. Пусть $\{h_n(t)\}$ и $\{k_n(t)\}$ – последовательности ступенчатых на $[a, b]$ функций, такие, что $h_n(t) \nearrow x(t)$ и $k_n(t) \nearrow y(t)$, причем $Ih_n \leq c_1$ и $Ik_n \leq c_2$ $\forall n$. Далее заметим, что ступенчатые функции $l_n(t) = \min\{h_n(t), k_n(t)\} \nearrow z(t)$ и, наконец, $Il_n \leq Ih_n \leq c_1$ $\forall n$.

Принадлежность к C^+ функции $\max\{x(t), y(t)\}$ – без доказательства.

Теорема 1. *Всякая функция* $x \in C^+[a,b]$ *почти всюду конечна.*

(Без доказательства.)

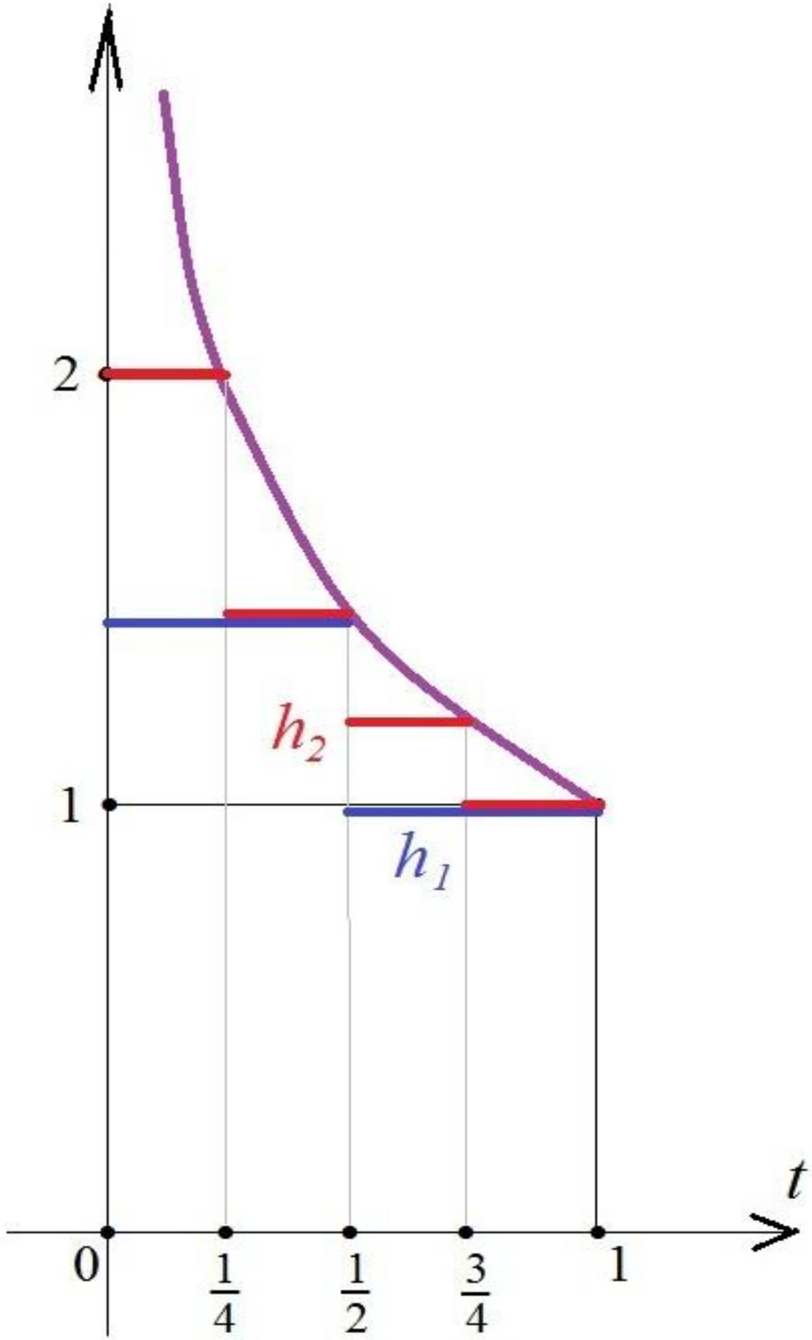
Следствие. *Всякая функция* $x \in C^+$ *является измеримой.*

Пример. Функция $x \in C^+[0,1]$, но $(-x) \notin C^+[0,1]$.

Рассмотрим функцию $x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ на отрезке $[0,1]$. Она определена на полуинтервале $(0,1]$, то есть п.в. на $[0,1]$. Несобственный интеграл от неограниченной функции $x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$: $(R_\infty)\int\limits_0^1 x(t)dt = 2$.

Рассмотрим последовательность разбиений отрезка $[0,1]$:

$$P_n = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}, 1\}.$$



2
1
0
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
1
t
h_2
h_1

Построим последовательность ступенчатых на $[0,1]$ функций $h_n(t)$: $h_n(t) = \min\limits_{\tau \in \overline{\Delta}_k^n} x(\tau) = x\left(\frac{k}{2^n}\right)$ на интервале $\Delta_k^n = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$, $k = \overline{1, 2^n}$

($\overline{\Delta}_k^n = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ – замыкание Δ_k^n).

Тогда $h_n(t) \to x(t)$ п.в. на $[0,1]$, монотонно возрастая (не убывая).

А в силу того, что п.в. на $[0,1]$ $h_n(t) \le x(t)$ при $\forall n$, имеем: $Ih_n \le (R_\infty)\int\limits_0^1 x(t)dt = 2$ при $\forall n$.

Следовательно, $x \in C^+[0,1]$.

Покажем, что $y = -x \notin C^{+}[0,1]$.

Предположим противное : $y = -x \in C^{+}[0,1]$. Тогда существует последовательность ступенчатых на $[0,1]$ функций $k_n(t)$, которая сходится к $y(t)$ п.в. на $[0,1]$, монотонно возрастая, причем $Ik_n \leq C$ при $\forall n$.

Пусть $A \subset [0,1]$ – множество, на котором нарушается монотонная сходимость функций $k_n(t)$ к $y(t)$, то есть A – ММН. Рассмотрим также счетное множество B – объединение всех разбиений, соответствующих функциям $k_n(t)$. Следовательно, $D = A \bigcup B$ – ММН.

Тогда для $(\forall t \in [0,1] \setminus D)$ $[k_1(t) \le k_2(t) \le k_3(t) \le \ldots]$.

Пусть $\alpha = \min\limits_{t \in [0,1] \setminus D} k_1(t)$. Тогда для $(\forall t \in [0,1] \setminus D)(\forall n)$ $[k_n(t) \ge k_1(t) \ge \alpha]$.

Так как $y(t) \to -\infty$ при $t \to 0$, то

$(\exists t_0 > 0)(\forall t \in (0, t_0))[y(t) < \alpha - 1]$.

Тогда $(\forall t \in (0, t_0) \setminus D)[k_n(t) - y(t) > 1]$.

Следовательно, $(\forall t \in (0, t_0) \setminus D)[k_n(t) \not\to y(t)]$.

Но, поскольку $(0, t_0) \setminus D$ – не ММН, мы получили противоречие условию сходимости $k_n(t)$ к $y(t)$ п.в. на $[0,1]$. Итак, наше предположение неверно и $y = -x \notin C^+[0,1]$.

5. Интеграл в множестве $C^+[a,b]$

Пусть функция $x \in C^+$. Тогда 1) $x(t)$ определена п.в. на $[a, b]$ и 2) существует последовательность $\{h_n(t)\}$ ступенчатых на $[a, b]$ функций, что $h_n(t) \nearrow x(t)$ при $n \to \infty$ и $(\exists c \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,[\,Ih_n \leq c\,]$.

По свойству интеграла от ступенчатой функции (см. лемму 6), числовая последовательность $\{Ih_n\}$ монотонно возрастает. При этом она ограничена сверху.

Тогда существует конечный $\lim_{n\to\infty} Ih_n$.

Лемма 10. *Пусть функции* $x, y \in C^+$ *и* $x(t) \leq y(t)$ *п.в. на* $[a, b]$. *Пусть* $\{h_n(t)\}$ *и* $\{k_n(t)\}$ *ступенчатые функции такие, что:* $h_n(t) \nearrow x(t)$, $k_n(t) \nearrow y(t)$, $Ih_n \leq c_1$, $Ik_n \leq c_2$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} Ih_n \leq \lim_{n\to\infty} Ik_n$.

(Без доказательства.)

Определим теперь интеграл для $x \in C^+$ следующим образом:

$$(C^+)Ix = \lim_{n\to\infty} Ih_n. \tag{4}$$

Из леммы 10 следует, что это определение $(C^+)Ix$ не зависит от выбора последовательности ступенчатых функций $\{h_n\}$ и, следовательно, корректно.

Это замечание позволяет переформулировать лемму 10.

Следствие. *Пусть функции* $x, y \in C^+$ *и* $x(t) \le y(t)$ *п.в. на* $[a, b]$. *Тогда* $(C^+)Ix \le (C^+)Iy$.

Свойство. Если на $[a, b]$ выполняется $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x \in C^+$, то $(C^+)Ix = (C^+)Iy$.

(Доказать самостоятельно.)

Непосредственно из определения интеграла (4) следует

Лемма 11 (свойства интеграла). *Пусть функции* $x, y \in C^+$. *Тогда:*

1) $(\forall \alpha \ge 0)[\,(C^+)I(\alpha x) = \alpha (C^+)Ix\,]$;

2) $(C^+)I(x + y) = (C^+)Ix + (C^+)Iy$.

(Доказать самостоятельно.)

Теорема 2. *Пусть задана последовательность функций* $\{x_n\} \subset C^+$ *такая, что* $x_n(t) \nearrow x(t)$ *и* $(\exists c)(\forall n)\,[(C^+)Ix_n \le c]$.

Тогда функция $x \in C^+$ *и* $(C^+)Ix = \lim_{n\to\infty}(C^+)Ix_n$.

(Без доказательства.)

Следствие. *Пусть дан функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)$, *где все функции* $y_k \in C^+$ *и* $y_k(t) \ge 0$. *Пусть также* $(\exists c)(\forall n)\,[\sum_{k=1}^{n}(C^+)Iy_k \le c]$.

Тогда функция $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in C^+$ *и* $(C^+)Ix = \sum_{k=1}^{\infty}(C^+)Iy_k$.

Доказательство. Следует определить функции $x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)$ и применить доказанную теорему 2.