



**Волгоградский государственный
университет**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**Богачкова Людмила Юрьевна, профессор,
доктор экономических наук, канд. физ.-мат. наук.**

**В каждой науке заключено столько истины,
сколько в ней математики**

© Иммануил Кант (1724-1804, немецкий философ, родоначальник немецкой классической философии.)

**Один из моих учеников стал поэтом – для
математики у него не хватало фантазии**

© Давид Гилберт (1862-1943, немецкий математик).

**Подобно тому как все искусства тяготеют к
музыке, все науки стремятся к математике**

© Джордж Сантаяна (1863-1952, американский философ и писатель испанского происхождения).

**Фактов всегда достаточно – не хватает
фантазии**

© Дмитрий Блохинцев (1907-1979, советский физик, чл.-корр. АН СССР)

Математические методы в экономике

Сообщество причастных к математическим
методам и информатике в экономике (ВолГУ)



<https://vk.com/club43334653>

Итоговая аттестация

1 семестр:

экзамен;

2 семестр:

экзамен.

Балльно - рейтинговая система оценки успеваемости в семестре

За работу в течение семестра до 80 баллов:

26 баллов - за модуль 1 (итог подводится на 5-6 неделе);

26 баллов - за модуль 2 (итог подводится на 11-12 неделе);

28 баллов - за модуль 3 (итог подводится на 16-17 неделе).

Каждый модуль – это в среднем 5 недель аудиторных занятий плюс 1 неделя контрольная (5+1=6 недель).

За экзамен до 40 баллов:

20 баллов – за теоретические вопросы;

20 баллов – за решение задач.

За работу по модулю-1, а также по модулю-2 до 26 баллов:

аудиторная работа (лекции, семинары, ДР) – до 15 баллов (в среднем 3 балла x 5 недель=15 баллов);

за модульную контрольную - до 11 баллов.

За работу по модулю-3 до 28 баллов:

аудиторная работа (лекции, семинары, ДР) – до 17 баллов (в среднем 3 балла x 5 недель+2=17 баллов);

за модульную контрольную - до 11 баллов.

Балльно - рейтинговая система оценки успеваемости в семестре

В ведомости за 1, 2 модули выставляется сумма набранных баллов за аудиторные занятия плюс за контрольную работу, *но не более 20 баллов.*

Количества баллов за 1, 2 модули, превосходящее 20, суммируется в конце семестра при условии, что за каждый из трех модулей студент набрал не менее 20 баллов.

Основная литература

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х т. – М. – Интеграл-Пресс, 2002.

Программа курса в 1-м семестре

Введение. Число. Переменная. Функция. Основные элементарные функции и их графики.

Предел функции. Предел переменной и предел функции. Бесконечно большие, бесконечно малые и их свойства. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы.

Непрерывность функции. Определение непрерывности. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.

Производная и дифференциал. Определение и геометрический смысл производной. Производные основных элементарных функций. Правила дифференцирования. Определение и геометрический смысл дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков.

Теоремы о дифференцируемых функциях. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей. Формула Тейлора.

Исследование поведения функций. Максимум и минимум. Наибольшее и наименьшее значения на отрезке. Выпуклость и вогнутость кривой. Точка перегиба. Асимптоты. Общий план исследования функций.

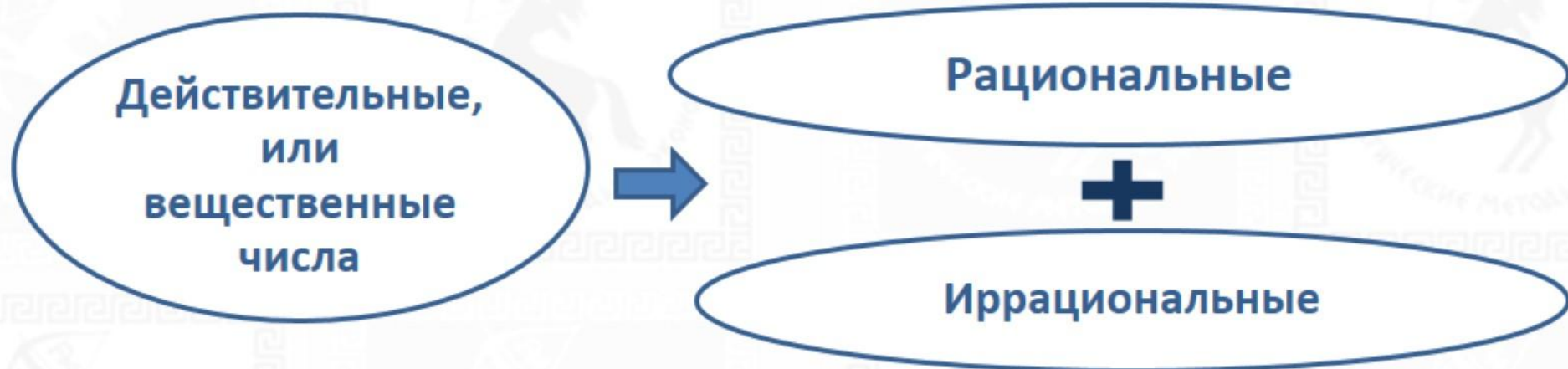
Кривизна кривой. Длина дуги. Кривизна. Радиус и круг кривизны.

Лекция 1.

Введение.

Числа. Переменные. Функции.

1. Действительные, или вещественные числа



1.1. Рациональное число –

это результат деления целого числа на натуральное число:

$$\frac{p}{q}, \quad p \in Z, \quad q \in N.$$

Здесь Z – множество целых чисел, а N – множество натуральных чисел.

Z : - 5, - 4, - 3, - 2, - 1, 0, + 1, + 2, + 3, + 4, + 5,

N : 1, 2, 3, 4, 5,

Примеры $\frac{p}{q}$: $+\frac{1}{2}$; $-\frac{4}{2}$; $-\frac{7}{3}$; $+\frac{2}{3}$.

Рациональное число можно представить в виде **конечной** или **бесконечной периодической дроби**, например:

$$+\frac{1}{2} = 0,5;$$

$$-\frac{4}{2} = -2,0;$$

$$-\frac{7}{3} = -2,3333(3);$$

$$+\frac{2}{3} = 0,6666(6).$$

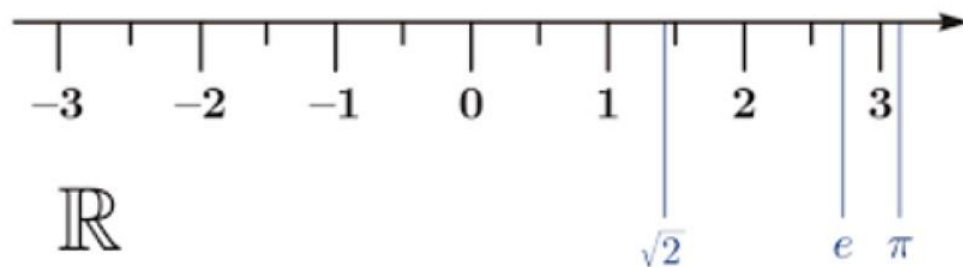
1.2. Иррациональные числа можно представить в виде **бесконечной НЕпериодической дроби**, например:

$$\sqrt{7} = 2,64575131106459... \quad -\sqrt{2} = -1,414213562373095...$$

\mathbf{R} – множество действительных, или вещественных чисел.

Действительные числа изображают точками числовой оси.

Каждая точка числовой оси – это одно и только одно число, рациональное или иррациональное:



- Между любыми двумя точками на числовой оси найдутся как рациональные, так и иррациональные числа.
- Каждое иррациональное число можно с любой степенью точности выразить с помощью рациональных чисел.

Пример. Иррациональное число $\sqrt{2}$ выражается рациональными числами:

1,4 и 1,5 — с точностью до $1/10$,

1,41 и 1,42 — с точностью до $1/100$,

1,414 и 1,415 — с точностью до $1/1000$ и т.д.

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095\dots$$

Определение. Абсолютная величина, или модуль

действительного числа x (обозначается $|x|$) – это неотрицательное действительное число, которое удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} |x| &= x, & \text{если } x \geq 0; \\ |x| &= -x, & \text{если } x < 0. \end{aligned} \quad (1)$$

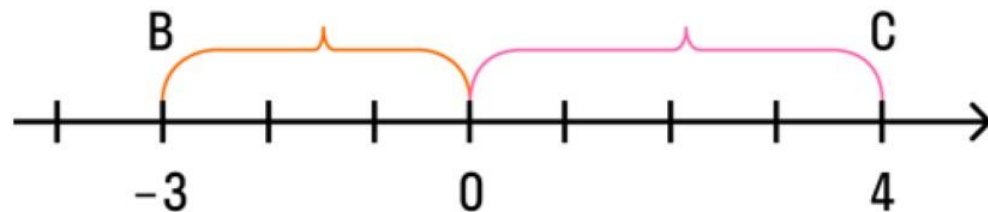
Примеры: $|2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.

Из (1)



$$x \leq |x|.$$

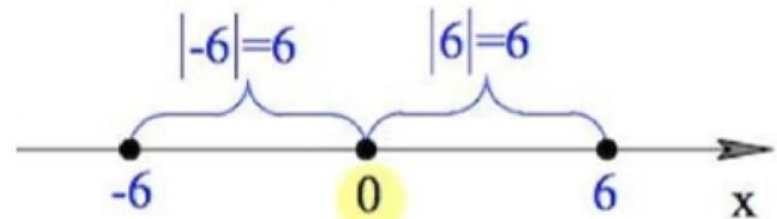
Модуль - это расстояние от точки до начала координат



$$|-3| = 3$$

$$|+4| = 4$$

$$|-x| = |x|$$



Свойства абсолютных величин

1.

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

2.

$$|x - y| \geq |x| - |y|, \quad |x| > |y|.$$

3.

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

4.

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

2. Переменные величины

Величина – это математическое обобщение конкретных понятий: длины, площади, веса и т.д. Выбор одной из величин данного рода (единицы измерения) позволяет сравнивать (соизмерять) величины.

Величина – это то, что имеет постоянное или переменное числовое выражение

Области изменения переменной величины- промежутки, или интервалы

Отрезок, или сегмент – это замкнутый промежуток	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
Полузамкнутый промежуток. Например:	$[a, b[$, $[a; +\infty)$	$a \leq x < b$ $a \leq x < +\infty$
Открытый промежуток	$(a; b)$ $(-\infty; +\infty)$	$a < x < b$ $-\infty < x < +\infty$

3. **Функции**

Определение. *Функцией f , определённой на множестве X со значениями в множестве Y называется «правило» $f(x)$ такое, что каждому элементу x из множества X поставлен в соответствие элемент $y=f(x)$ из множества Y (и притом только один).*

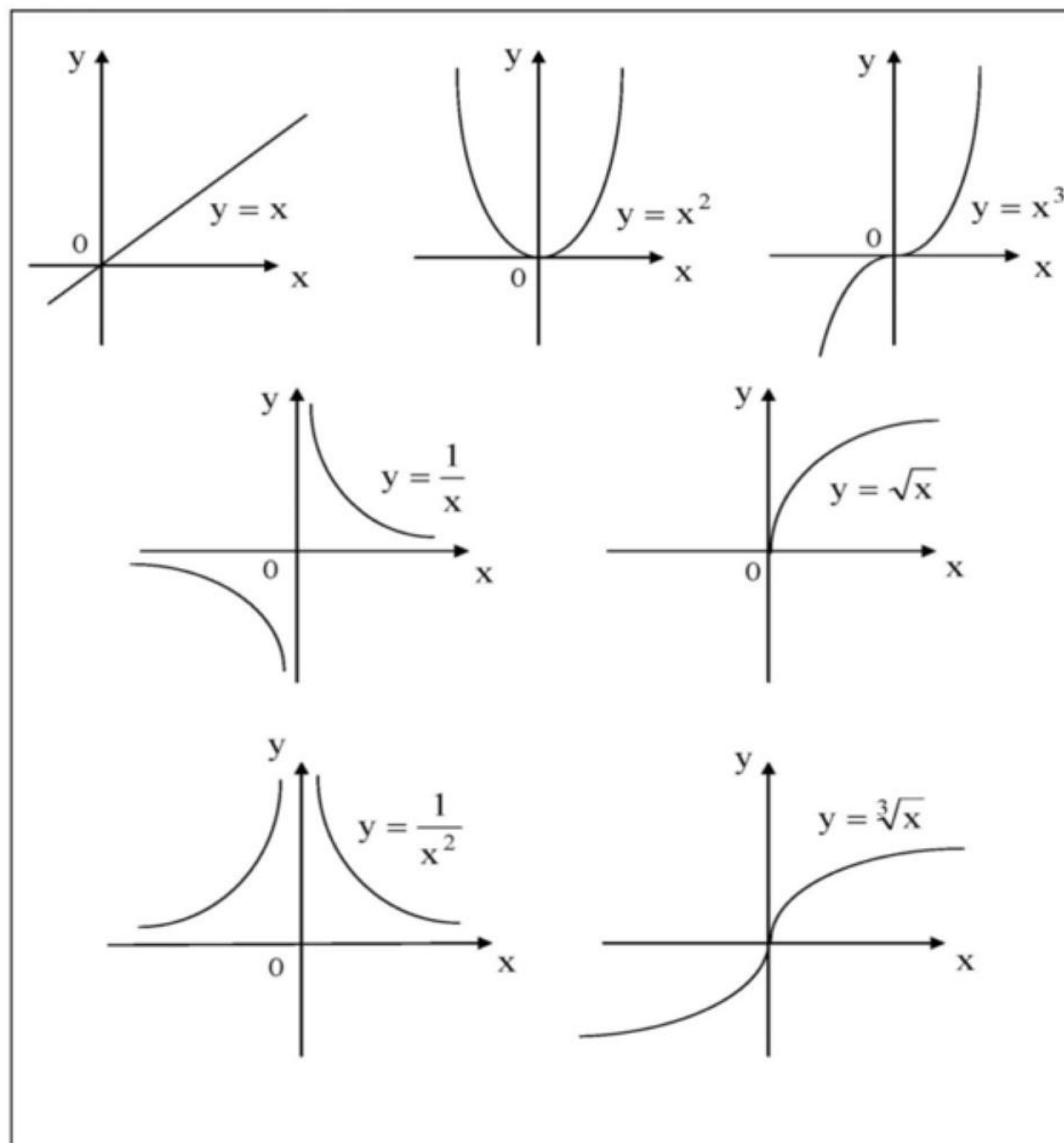
Функции обозначаются: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, и т. п.

*Множество X – это **область определения функции, $D(f)$.***

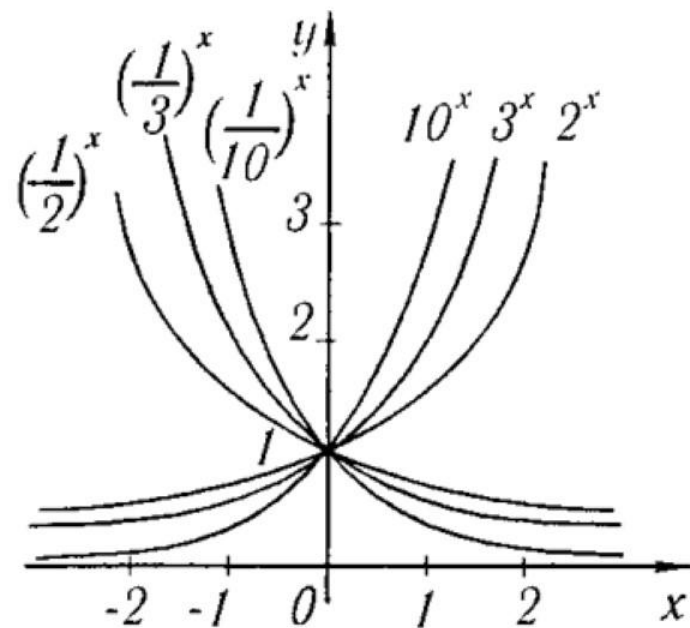
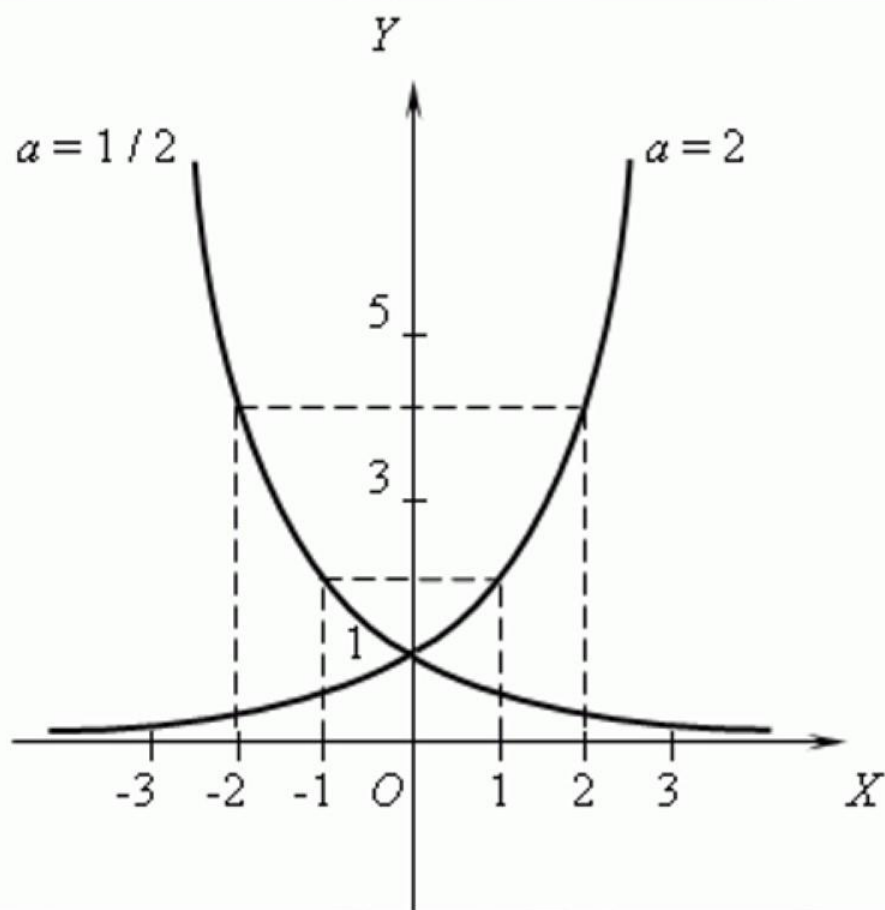
*Множество Y – это **область значения функции, $E(f)$.***

3. Основные элементарные функции

3.1. Степенная функция $y = x^a$, a - действительное число.



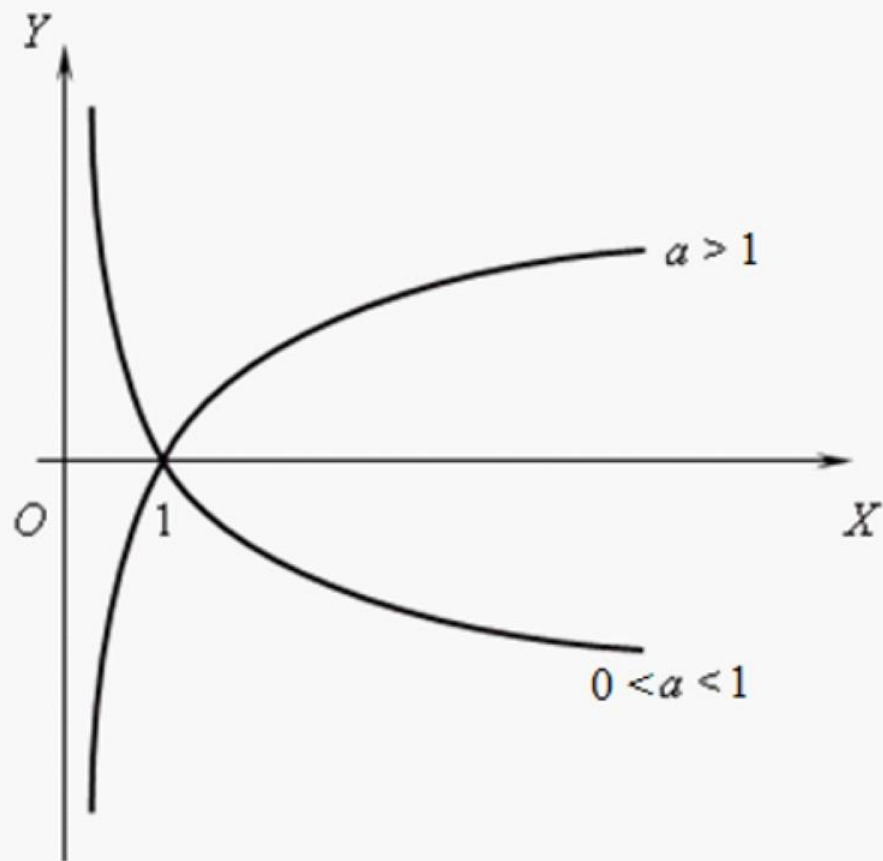
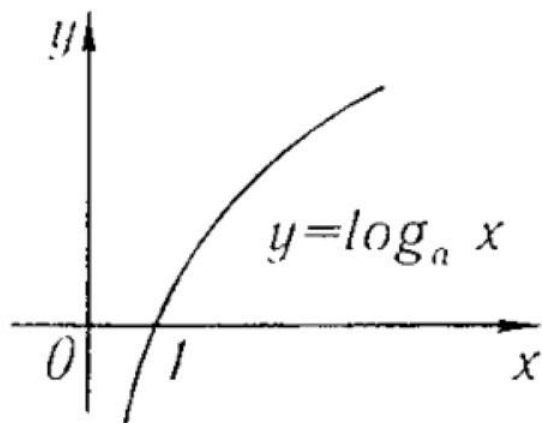
3.2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.



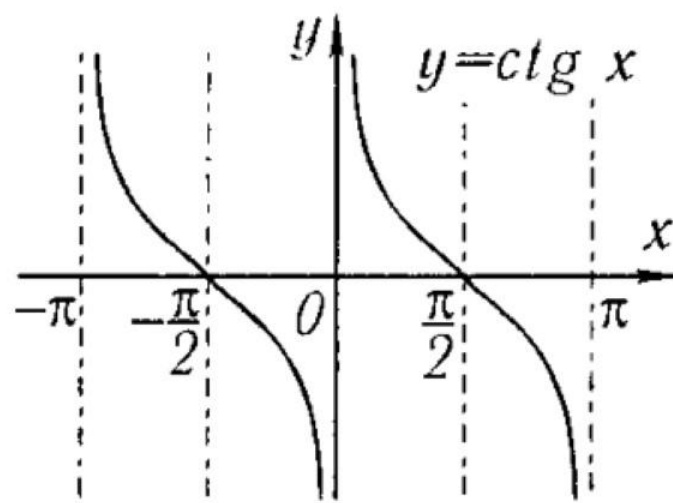
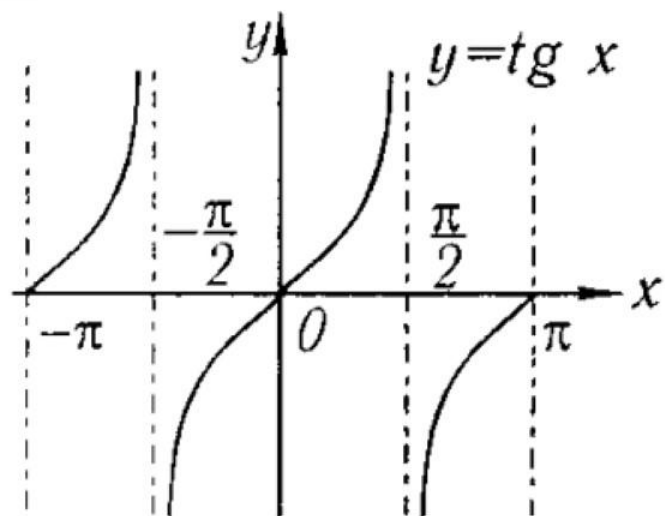
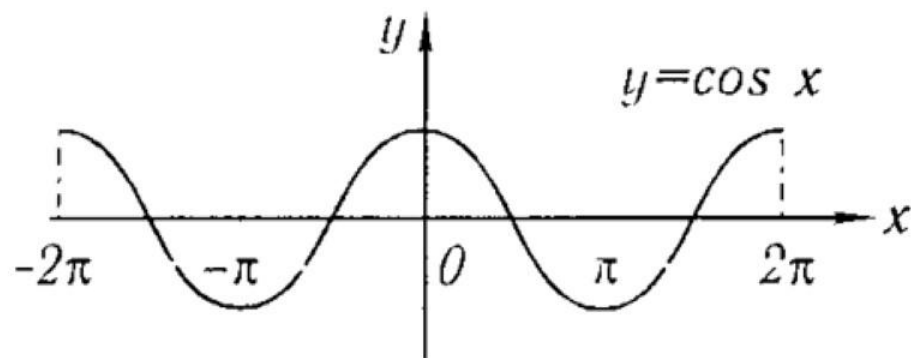
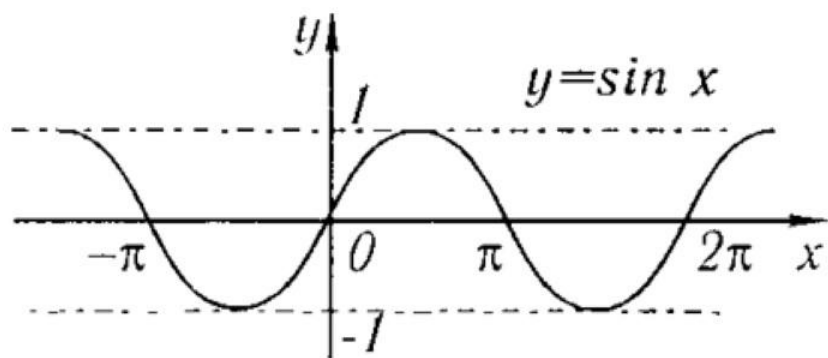
3.3. Логарифмическая функция

$$y = \log_a x$$

$$a > 0, a \neq 1.$$

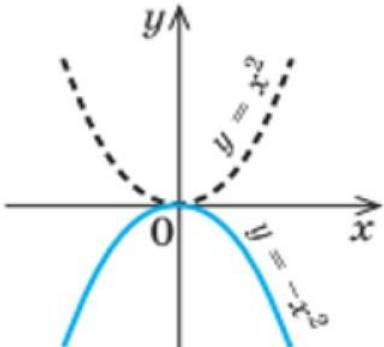


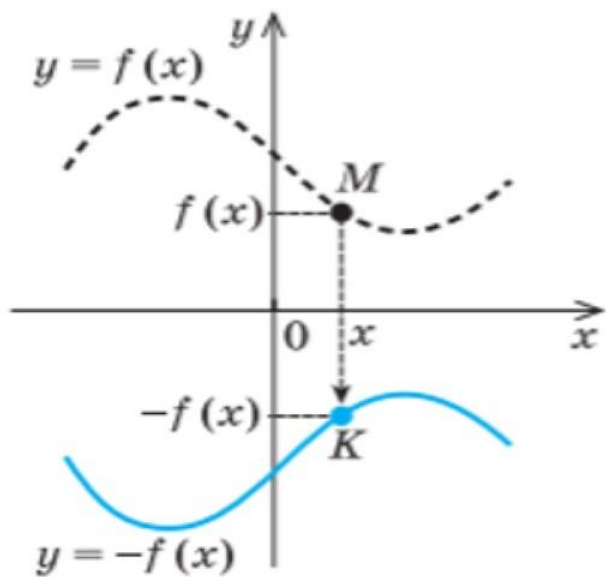
3.4. Тригонометрические функции (включая обратные тригонометрические)



4. Преобразования графиков функций

Преобразование графика функции $y = f(x)$

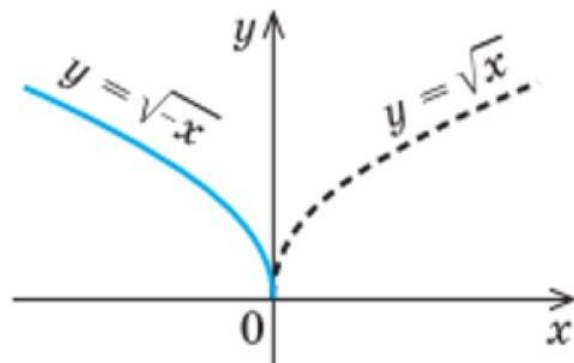
№	Формула зависимости	Пример	Преобразование
1	2	3	4
1	$y = -f(x)$		<p>Симметрия относительно оси Ox</p>



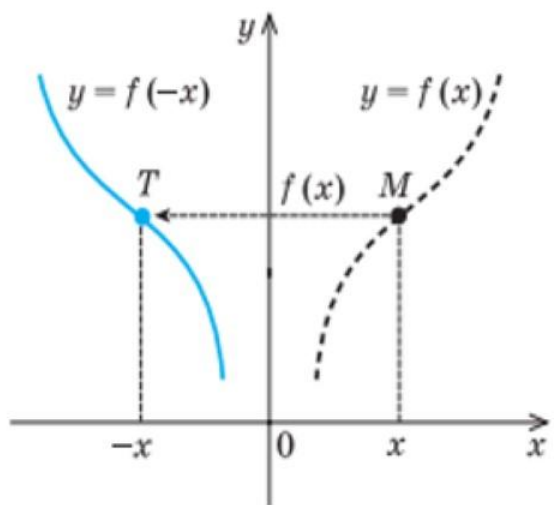
Симметрия относительно оси Ox

2

$$y = f(-x)$$



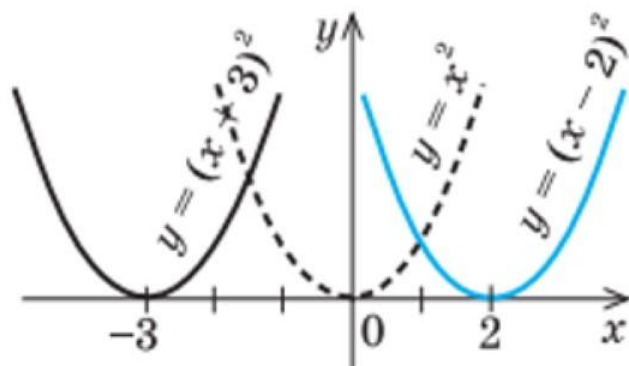
Симметрия относительно
оси Oy



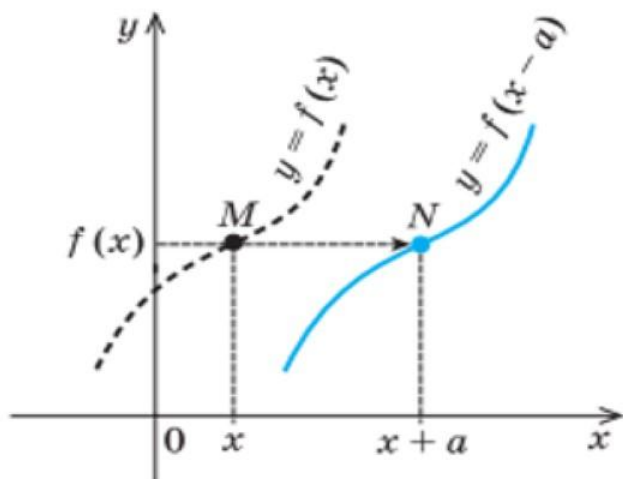
Симметрия относительно оси Oy

3

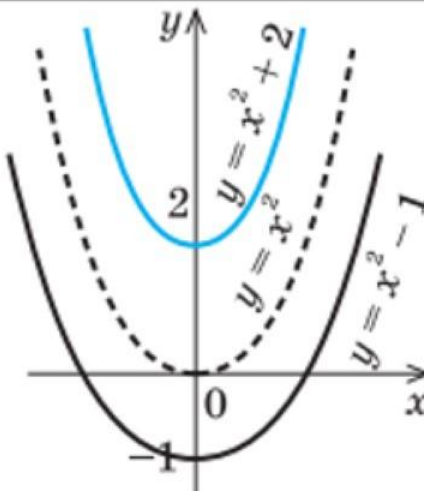
$$y = f(x - a)$$

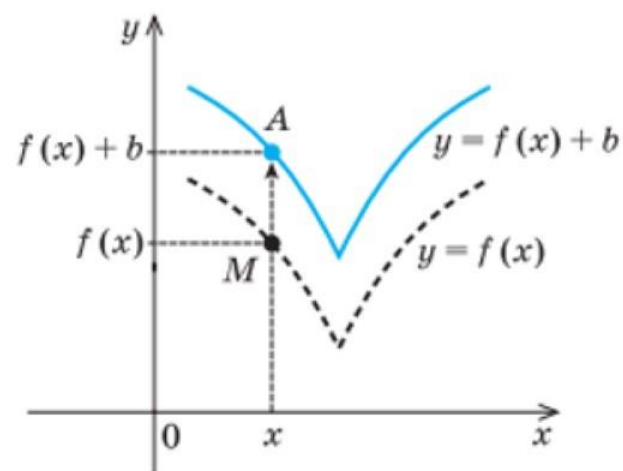


Параллельный перенос
графика функции
 $y = f(x)$ вдоль оси Ox
на a единиц



Параллельный перенос графика вдоль оси Ox

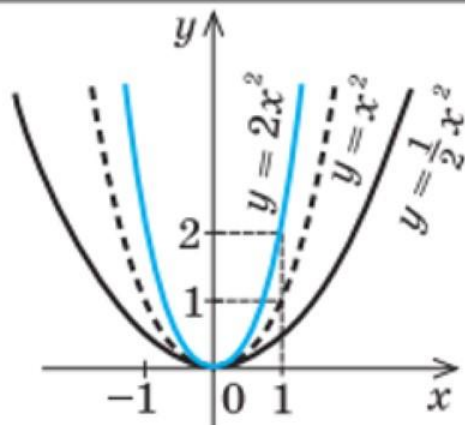
1	2	3	4
4	$y = f(x) + c$		<p>Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на c единиц</p>



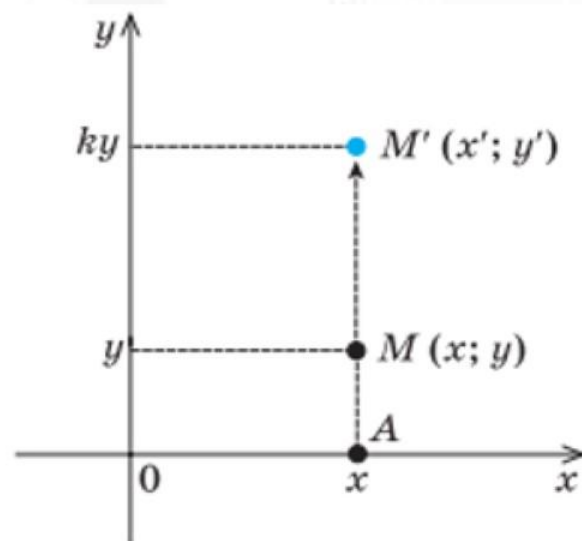
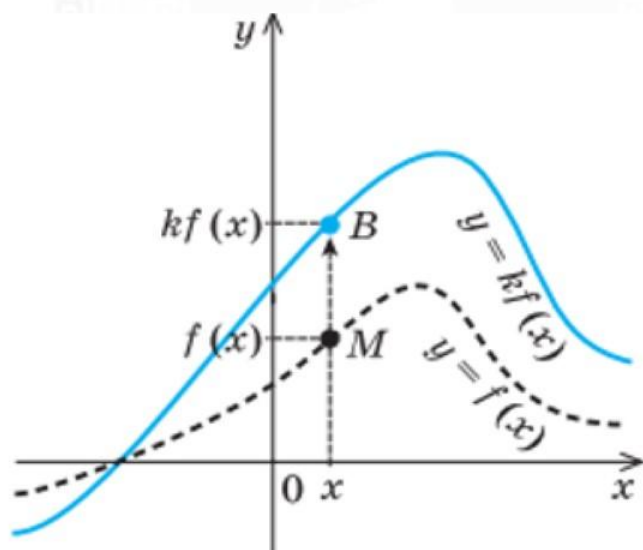
Параллельный сдвиг графика вдоль оси Oy

5

$$y = kf(x) \quad (k > 0)$$

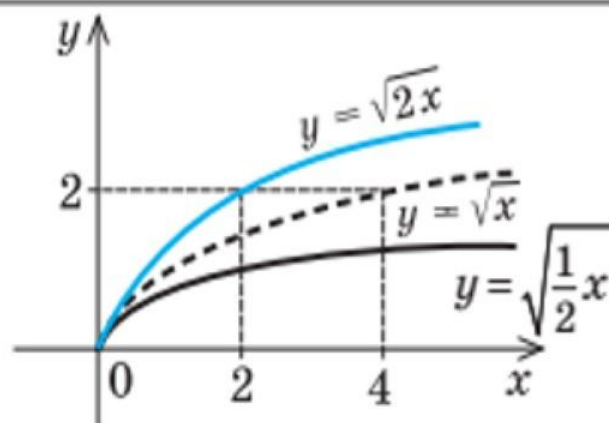


Растяжение или сжатие
вдоль оси Oy (при $k > 1$ —
растяжение,
при $0 < k < 1$ — сжатие)

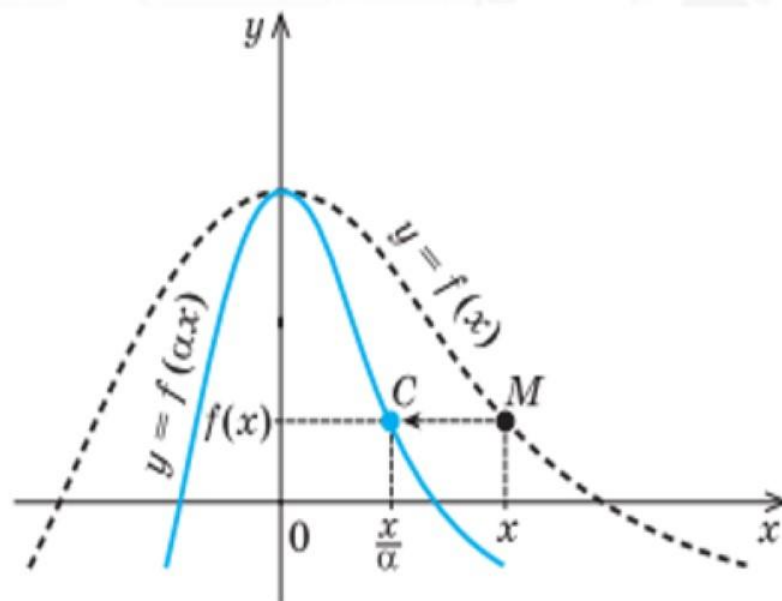


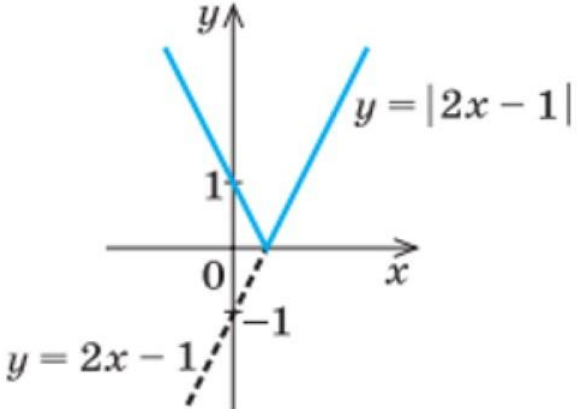
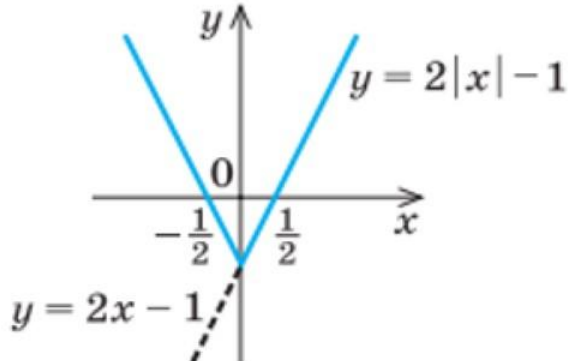
6

$$y = f(\alpha x) \\ (\alpha > 0)$$



Растяжение или сжатие
вдоль оси Ox
(при $\alpha > 1$ — сжатие,
при $0 < \alpha < 1$ —
растяжение)



7	$y = f(x) $	 <p>The graph shows a coordinate system with x and y axes. A dashed line represents the function $y = 2x - 1$, which passes through the y-axis at $(0, -1)$. A solid blue V-shaped line represents the function $y = 2x - 1$, which is the reflection of the dashed line across the x-axis. The vertex of the V is at $(0.5, 0)$ on the x-axis. The y-axis has tick marks at 1 and -1.</p>	<p>Выше оси Ox (и на самой оси) график функции $y = f(x)$ — без изменений, ниже оси Ox — симметрия относительно оси Ox</p>
8	$y = f(x)$	 <p>The graph shows a coordinate system with x and y axes. A dashed line represents the function $y = 2x - 1$, which passes through the y-axis at $(0, -1)$. A solid blue V-shaped line represents the function $y = 2 x - 1$, which is symmetric about the y-axis. The vertex of the V is at $(0, -1)$ on the y-axis. The x-axis has tick marks at $-\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{2}$.</p>	<p>Справа от оси Oy (и на самой оси) — без изменений, и эта же часть графика — симметрия относительно оси Oy</p>

В итоге необходимо знать:

- 1) **определения понятий**
 - **действительное, или вещественное число;**
 - **рациональное и иррациональное число;**
 - **абсолютная величина, или модуль числа;**
 - **функция;**
- 2) **свойства абсолютной величины;**
- 3) **графики элементарных функций.**

и уметь:

- 1) **вычислять значения функций;**
- 2) **находить области определения и области значений функций;**
- 3) **Преобразовывать графики функций.**