



**Волгоградский государственный  
университет**

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**Богачкова Людмила Юрьевна, профессор,  
доктор экономических наук, канд. физ.-мат. наук.**

***В каждой науке заключено столько истины,  
сколько в ней математики***

*© Иммануил Кант (1724-1804, немецкий философ, родоначальник  
немецкой классической философии. )*

***Один из моих учеников стал поэтом – для  
математики у него не хватало фантазии***

*© Давид Гилберт (1862-1943, немецкий математик).*

***Подобно тому как все искусства тяготеют к  
музыке, все науки стремятся к математике***

*© Джордж Сантаяна (1863-1952, американский философ и писатель  
испанского происхождения).*

***Фактов всегда достаточно – не хватает  
фантазии***

*© Дмитрий Блохинцев (1907-1979, советский физик, чл.-корр. АН СССР)*

# Математические методы в экономике

Сообщество причастных к математическим  
методам и информатике в экономике (ВолГУ)



<https://vk.com/club43334653>



# **Итоговая аттестация**

**1 семестр:**

**экзамен;**

**2 семестр:**

**экзамен.**

# **Балльно - рейтинговая система оценки успеваемости в семестре**

## **За работу в течение семестра до 80 баллов:**

**26 баллов - за модуль 1 (итог подводится на 5-6 неделе);**

**26 баллов - за модуль 2 (итог подводится на 11-12 неделе);**

**28 баллов - за модуль 3 (итог подводится на 16-17 неделе).**

**Каждый модуль – это в среднем 5 недель аудиторных занятий плюс 1 неделя контрольная (5+1=6 недель).**

## **За экзамен до 40 баллов:**

**20 баллов – за теоретические вопросы;**

**20 баллов – за решение задач.**

## **За работу по модулю-1, а также по модулю-2 до 26 баллов:**

**аудиторная работа (лекции, семинары, ДР) – до 15 баллов (в среднем 3 балла x 5 недель=15 баллов);**

**за модульную контрольную - до 11 баллов.**

## **За работу по модулю-3 до 28 баллов:**

**аудиторная работа (лекции, семинары, ДР) – до 17 баллов (в среднем 3 балла x 5 недель+2=17 баллов);**

**за модульную контрольную - до 11 баллов.**

## **Балльно - рейтинговая система оценки успеваемости в семестре**

В ведомости за 1, 2 модули выставляется сумма набранных баллов за аудиторные занятия плюс за контрольную работу, *но не более 20 баллов.*

Количества баллов за 1, 2 модули, превосходящее 20, суммируется в конце семестра при условии, что за каждый из трех модулей студент набрал не менее 20 баллов.



## **Основная литература**

**Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х т. – М. – Интеграл-Пресс, 2002.**

# Программа курса в 1-м семестре

**Введение.** Число. Переменная. Функция. Основные элементарные функции и их графики.

**Предел функции.** Предел переменной и предел функции. Бесконечно большие, бесконечно малые и их свойства. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы.

**Непрерывность функции.** Определение непрерывности. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.

**Производная и дифференциал.** Определение и геометрический смысл производной. Производные основных элементарных функций. Правила дифференцирования. Определение и геометрический смысл дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков.

**Теоремы о дифференцируемых функциях.** Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей. Формула Тейлора.

**Исследование поведения функций.** Максимум и минимум. Наибольшее и наименьшее значения на отрезке. Выпуклость и вогнутость кривой. Точка перегиба. Асимптоты. Общий план исследования функций.

**Кривизна кривой.** Длина дуги. Кривизна. Радиус и круг кривизны.

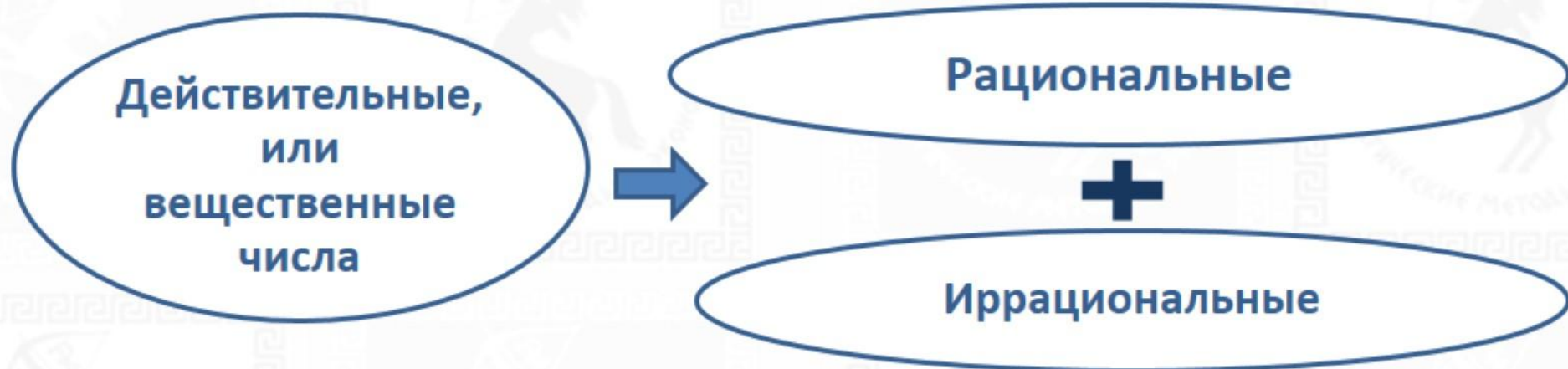


# **Лекция 1.**

## **Введение.**

**Числа. Переменные. Функции.**

# 1. Действительные, или вещественные числа



## 1.1. Рациональное число –

это результат деления целого числа на натуральное число:

$$\frac{p}{q}, \quad p \in Z, \quad q \in N.$$

Здесь  $Z$  – множество целых чисел, а  $N$  – множество натуральных чисел.

$Z$ : ..... - 5, - 4, - 3, - 2, - 1, 0, + 1, + 2, + 3, + 4, + 5, .....

$N$ : 1, 2, 3, 4, 5, .....

Примеры  $\frac{p}{q}$ :  $+\frac{1}{2}$ ;  $-\frac{4}{2}$ ;  $-\frac{7}{3}$ ;  $+\frac{2}{3}$ .



**Рациональное число** можно представить в виде **конечной** или **бесконечной периодической дроби**, например:

$$+\frac{1}{2} = 0,5;$$

$$-\frac{4}{2} = -2,0;$$

$$-\frac{7}{3} = -2,3333(3);$$

$$+\frac{2}{3} = 0,6666(6).$$

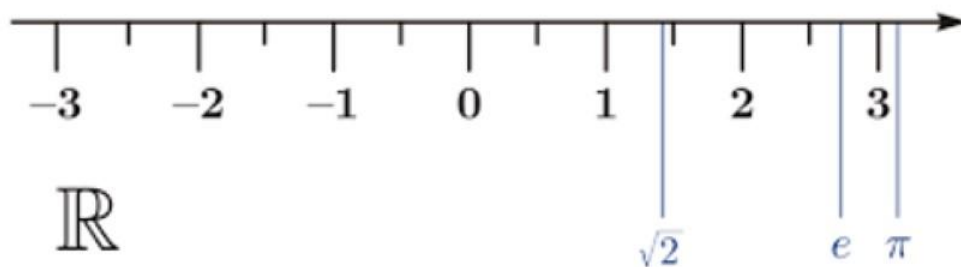
**1.2. Иррациональные числа** можно представить в виде **бесконечной НЕпериодической дроби**, например:

$$\sqrt{7} = 2,64575131106459... \quad -\sqrt{2} = -1,414213562373095...$$

**$\mathbf{R}$**  – множество действительных, или вещественных чисел.

Действительные числа изображают точками числовой оси.

Каждая точка числовой оси – это одно и только одно число, рациональное или иррациональное:



- Между любыми двумя точками на числовой оси найдутся как рациональные, так и иррациональные числа.
- Каждое иррациональное число можно с любой степенью точности выразить с помощью рациональных чисел.

**Пример.** Иррациональное число  $\sqrt{2}$  выражается рациональными числами:

1,4 и 1,5 — с точностью до  $1/10$ ,

1,41 и 1,42 — с точностью до  $1/100$ ,

1,414 и 1,415 — с точностью до  $1/1000$  и т.д.

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095\dots$$



## Определение. Абсолютная величина, или модуль

действительного числа  $x$  (обозначается  $|x|$ ) – это неотрицательное действительное число, которое удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} |x| &= x, & \text{если } x \geq 0; \\ |x| &= -x, & \text{если } x < 0. \end{aligned} \quad (1)$$

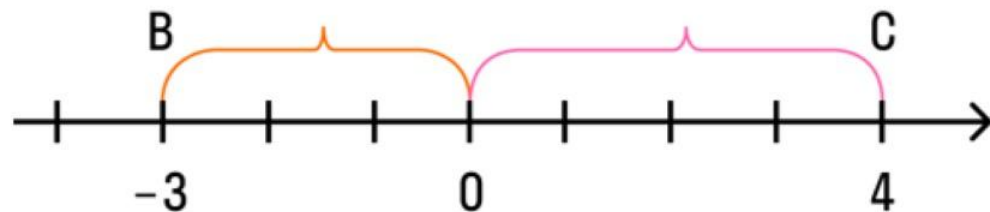
Примеры:  $|2| = 2$ ;  $|-5| = 5$ ;  $|0| = 0$ .

Из (1)



$$x \leq |x|.$$

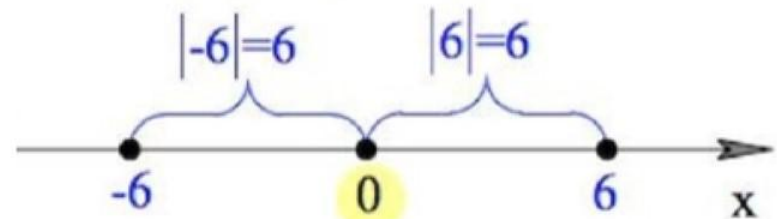
**Модуль - это расстояние от точки до начала координат**



$$|-3| = 3$$

$$|+4| = 4$$

$$|-x| = |x|$$



## Свойства абсолютных величин

1.

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

2.

$$|x - y| \geq |x| - |y|, \quad |x| > |y|.$$

3.

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

4.

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$



## 2. Переменные величины

**Величина** – это математическое обобщение конкретных понятий: длины, площади, веса и т.д. Выбор одной из величин данного рода (единицы измерения) позволяет сравнивать (соизмерять) величины.

**Величина** – это то, что имеет постоянное или переменное числовое выражение

### Области изменения переменной величины- промежутки, или интервалы

Отрезок, или сегмент – это замкнутый промежуток	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
Полузамкнутый промежуток. Например:	$[a, b[$ , $[a; +\infty)$	$a \leq x < b$ $a \leq x < +\infty$
Открытый промежуток	$(a; b)$ $(-\infty; +\infty)$	$a < x < b$ $-\infty < x < +\infty$

### 3. **Функции**

**Определение.** *Функцией  $f$ , определённой на множестве  $X$  со значениями в множестве  $Y$  называется «правило»  $f(x)$  такое, что каждому элементу  $x$  из множества  $X$  поставлен в соответствие элемент  $y=f(x)$  из множества  $Y$  (и притом только один).*

*Функции обозначаются:  $y = f(x)$ ,  $y = \varphi(x)$ , и т. п.*

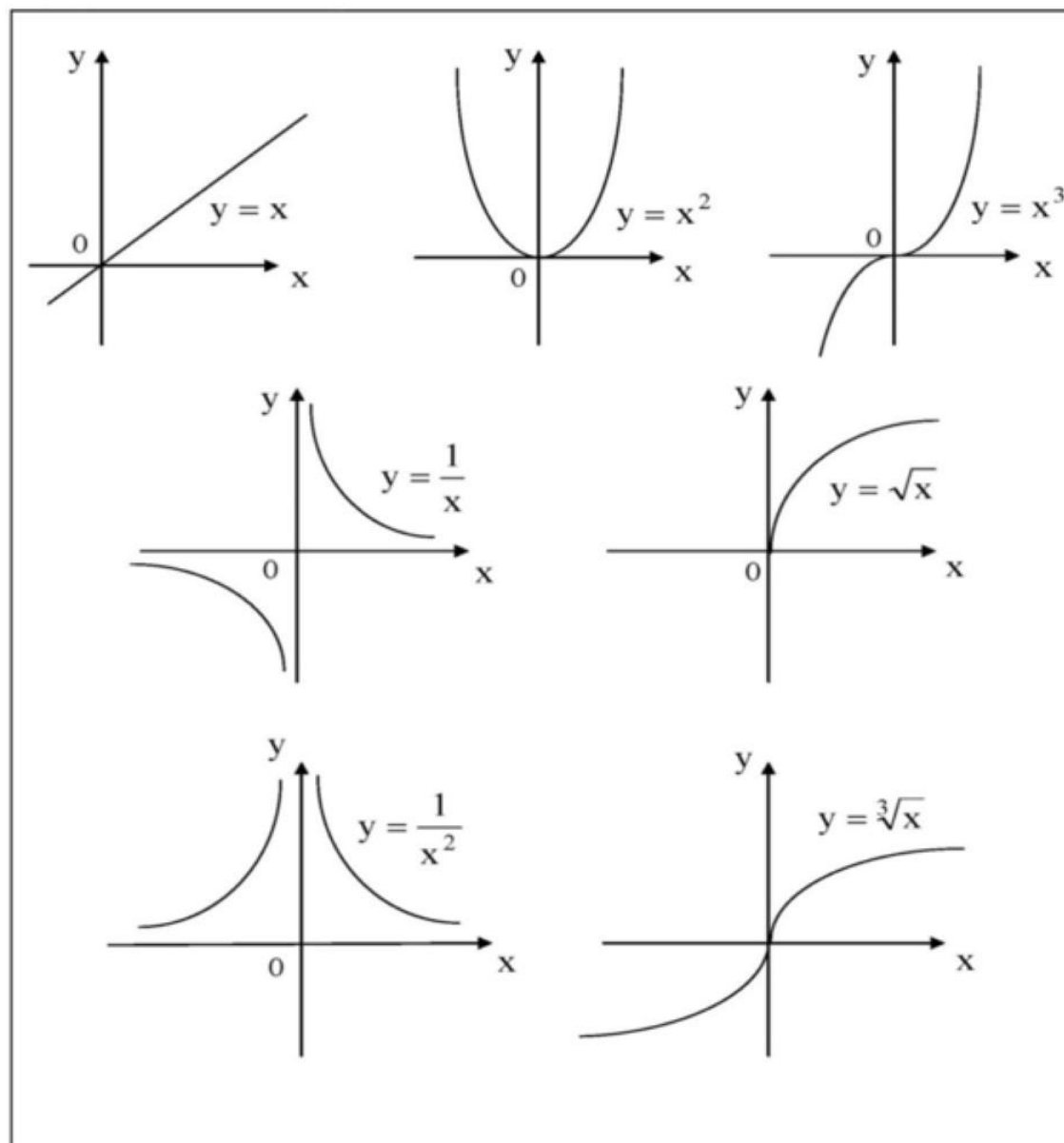
*Множество  $X$  – это **область определения функции,  $D(f)$ .***

*Множество  $Y$  – это **область значения функции,  $E(f)$ .***

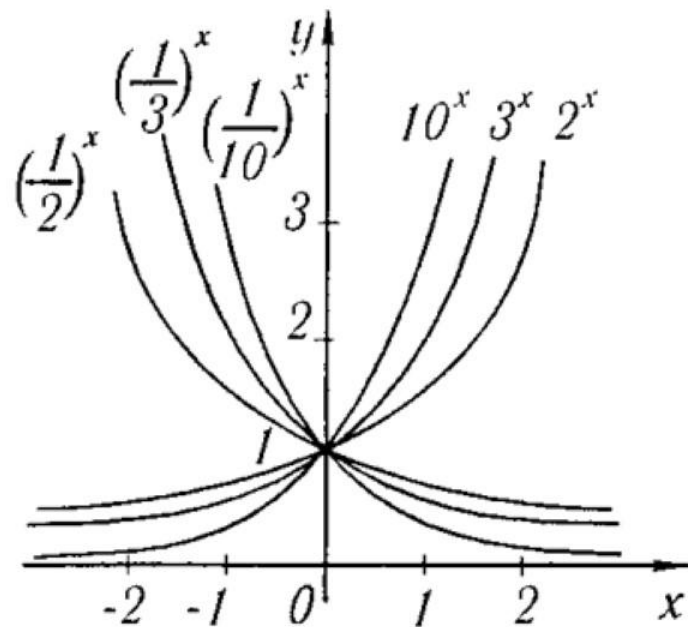
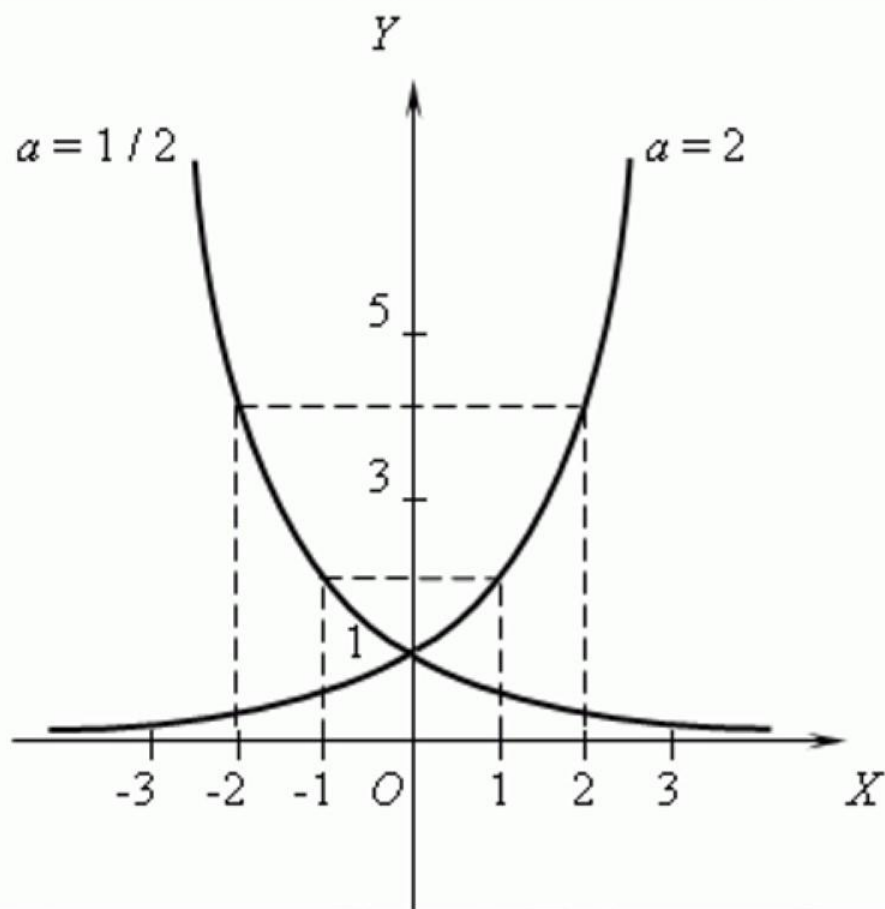


### ***3. Основные элементарные функции***

### 3.1. Степенная функция $y = x^a$ , $a$ - действительное число.



### 3.2. Показательная функция $y = a^x$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ .

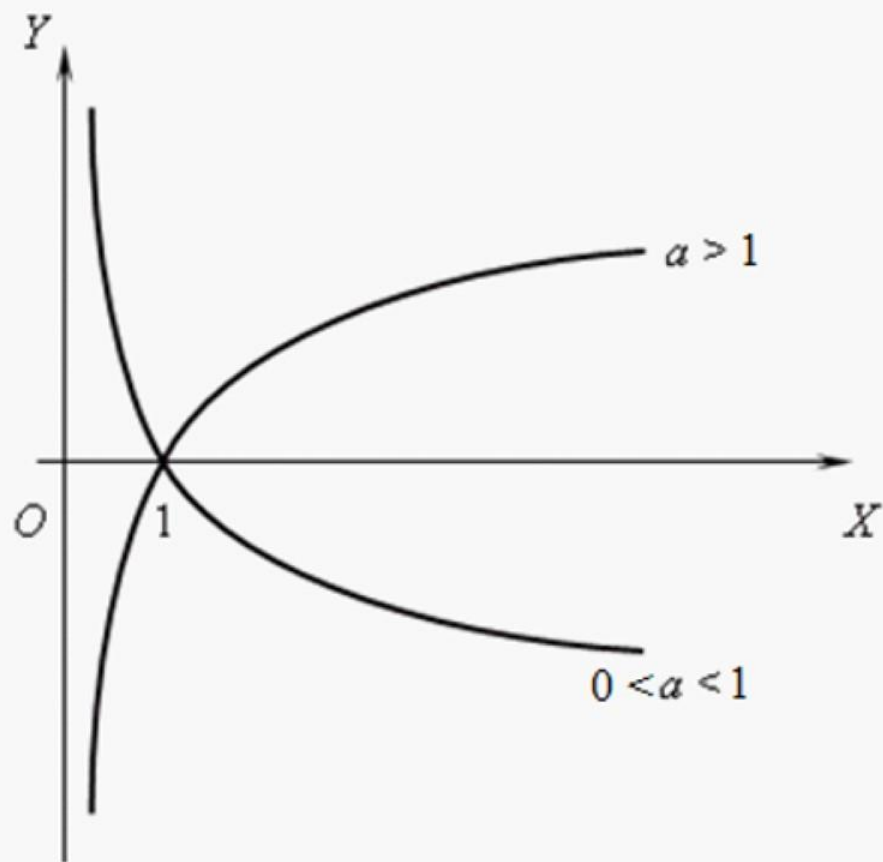
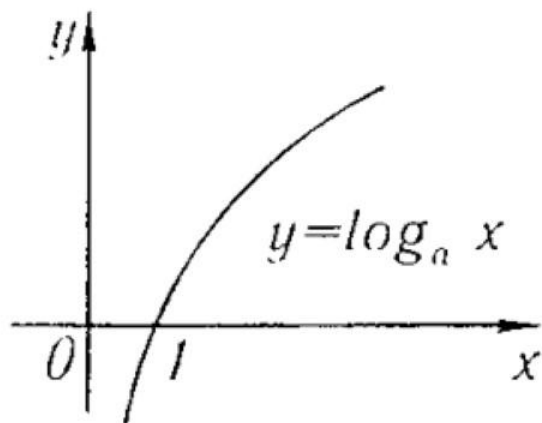




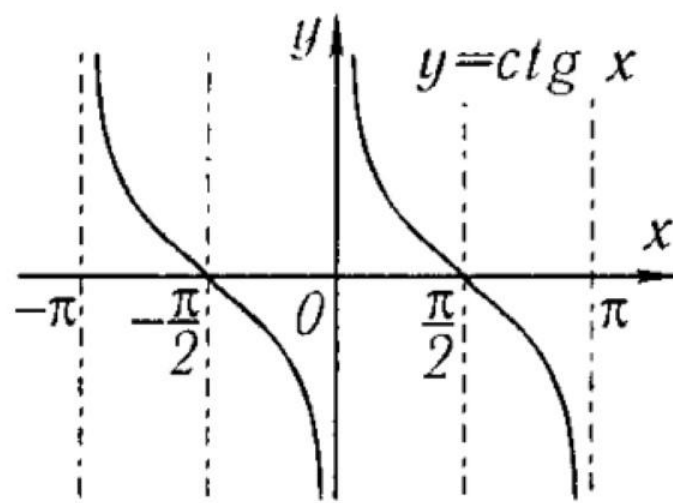
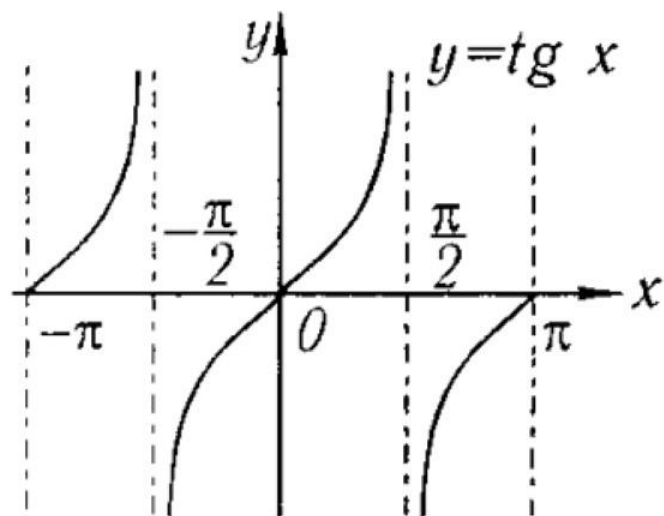
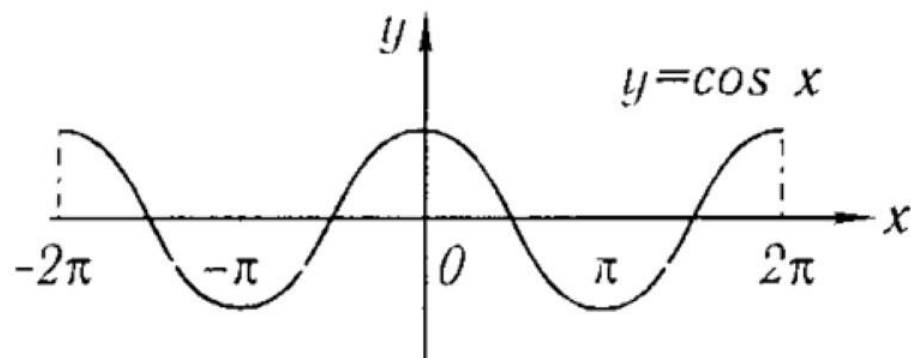
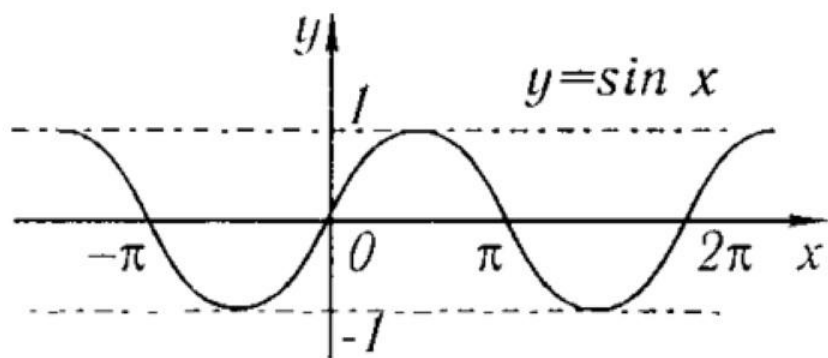
### 3.3. Логарифмическая функция

$$y = \log_a x$$

$$a > 0, a \neq 1.$$



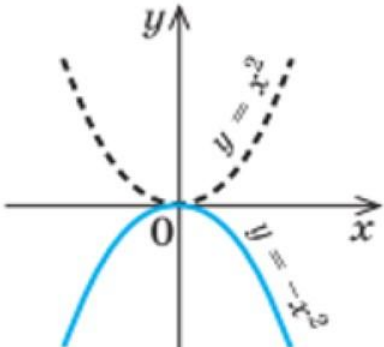
### 3.4. Тригонометрические функции (включая обратные тригонометрические)

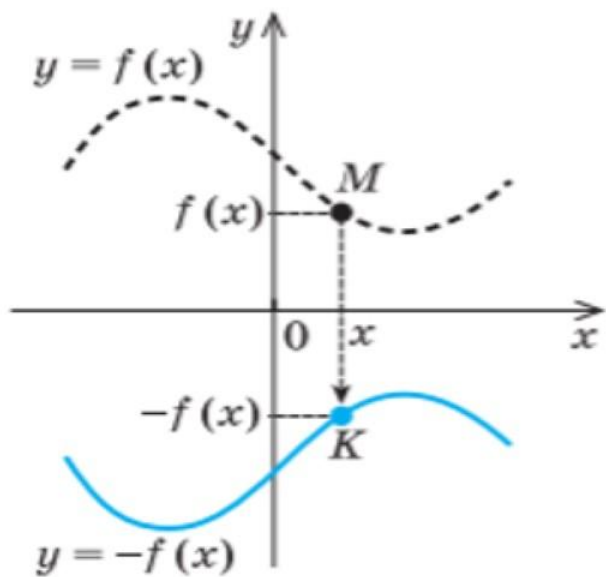


# ***4. Преобразования графиков функций***



## Преобразование графика функции $y = f(x)$

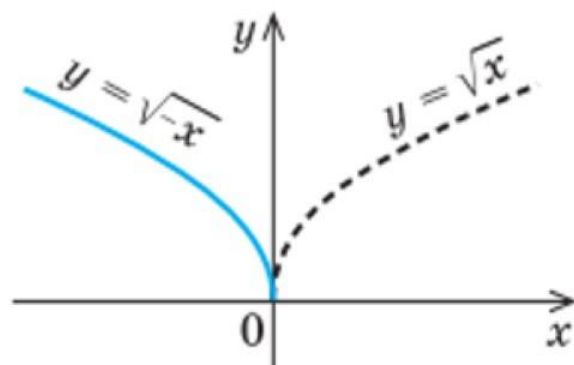
№	Формула зависимости	Пример	Преобразование
1	2	3	4
1	$y = -f(x)$		Симметрия относительно оси $Ox$



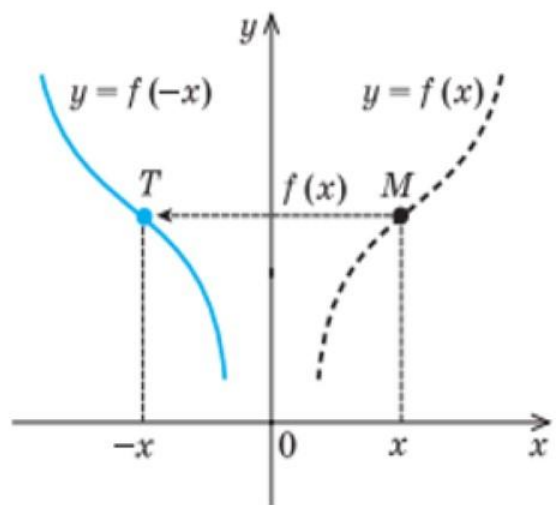
Симметрия относительно оси  $Ox$

2

$$y = f(-x)$$



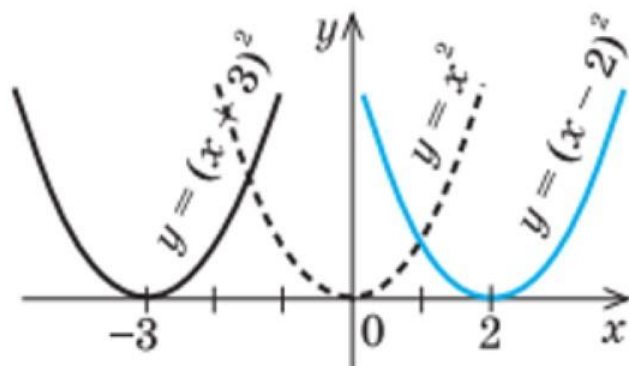
Симметрия относительно  
оси  $Oy$



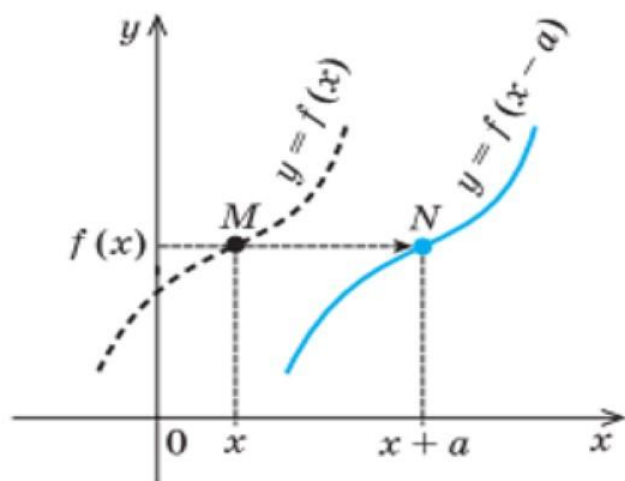
Симметрия относительно оси  $Oy$

3

$$y = f(x - a)$$

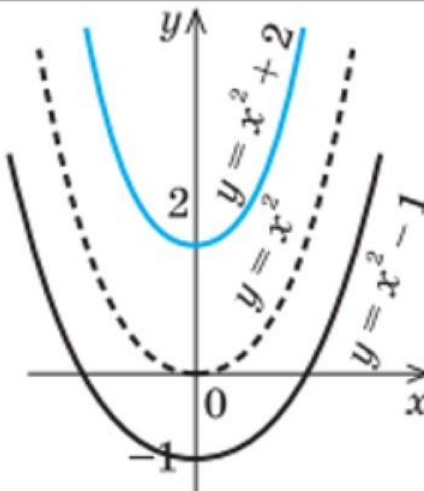


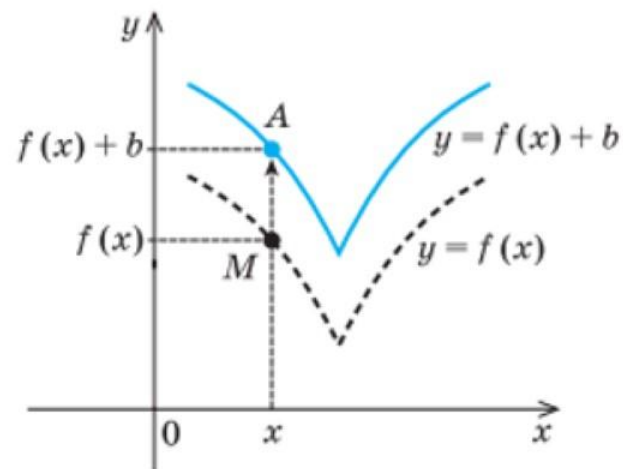
Параллельный перенос  
графика функции  
 $y = f(x)$  вдоль оси  $Ox$   
на  $a$  единиц



Параллельный перенос графика вдоль оси  $Ox$



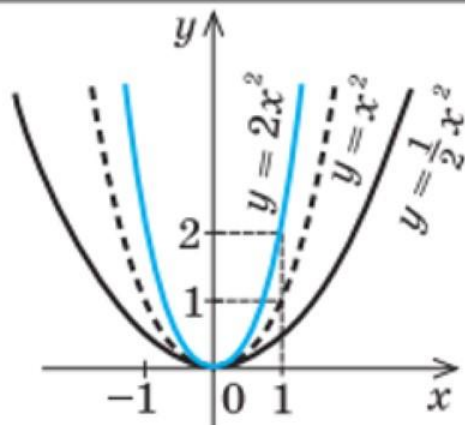
1	2	3	4
4	$y = f(x) + c$		<p>Параллельный перенос графика функции <math>y = f(x)</math> вдоль оси <math>Oy</math> на <math>c</math> единиц</p>



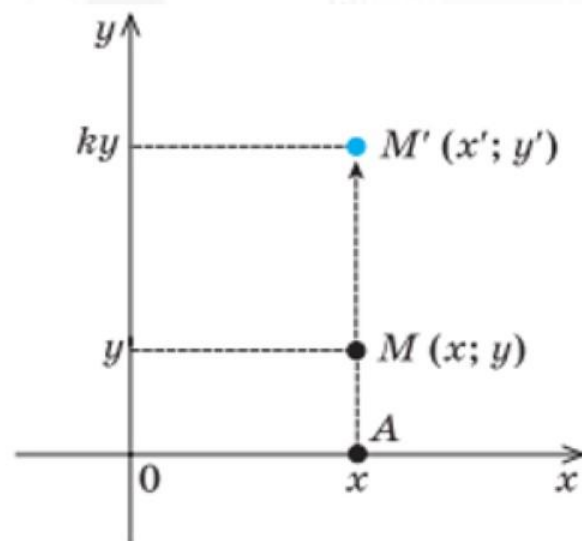
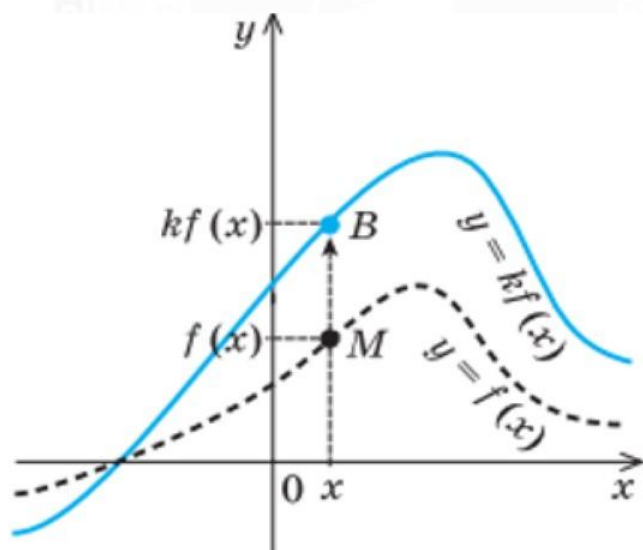
Параллельный сдвиг графика вдоль оси  $Oy$

5

$$y = kf(x) \quad (k > 0)$$

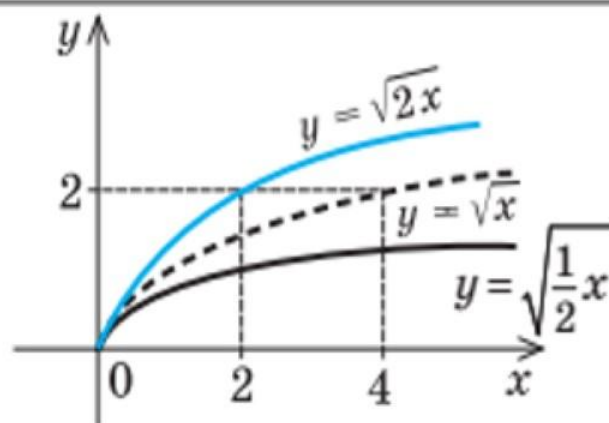


Растяжение или сжатие  
вдоль оси  $Oy$  (при  $k > 1$  —  
растяжение,  
при  $0 < k < 1$  — сжатие)

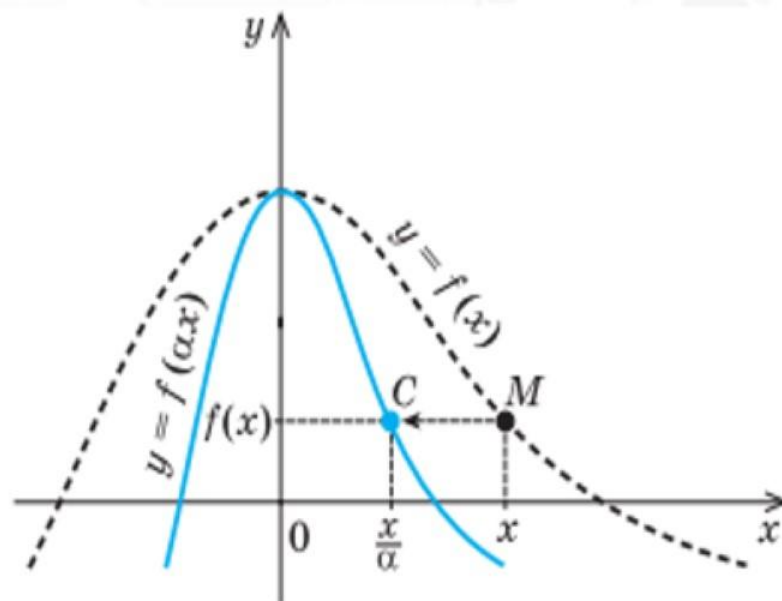


6

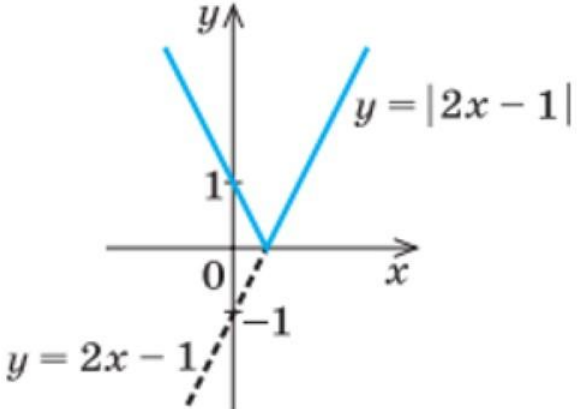
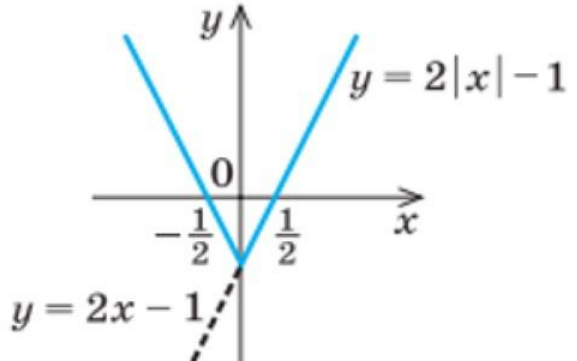
$$y = f(\alpha x) \\ (\alpha > 0)$$



Растяжение или сжатие  
вдоль оси  $Ox$   
(при  $\alpha > 1$  — сжатие,  
при  $0 < \alpha < 1$  —  
растяжение)





7	$y =  f(x) $		<p>Выше оси <math>Ox</math> (и на самой оси) график функции <math>y = f(x)</math> — без изменений, ниже оси <math>Ox</math> — симметрия относительно оси <math>Ox</math></p>
8	$y = f( x )$		<p>Справа от оси <math>Oy</math> (и на самой оси) — без изменений, и эта же часть графика — симметрия относительно оси <math>Oy</math></p>

## **В итоге необходимо знать:**

- 1) **определения понятий**
  - **действительное, или вещественное число;**
  - **рациональное и иррациональное число;**
  - **абсолютная величина, или модуль числа;**
  - **функция;**
- 2) **свойства абсолютной величины;**
- 3) **графики элементарных функций.**

## **и уметь:**

- 1) **вычислять значения функций;**
- 2) **находить области определения и области значений функций;**
- 3) **Преобразовывать графики функций.**