Предельные теоремы теории вероятностей и её практические применения

Выполнила: Рыбакова Дарья

Предельные теоремы теории вероятностей устанавливают зависимость между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом числе испытаний. Изучение закономерностей, проявляющихся в массовых случайных явлениях, позволяет научно предсказывать результаты будущих испытаний.

Предельные теоремы теории вероятностей делятся на две группы, одна из которых получила название **закона больших чисел**, а другая — **центральные предельные теоремы**.

Зако́н бо́льши́х чи́сел

это ряд теорем, которые доказывают устойчивость средних арифметических случайных величин

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n}:$$

при большом количестве испытаний n они перестают быть случайными и стремятся к некоторым постоянным.

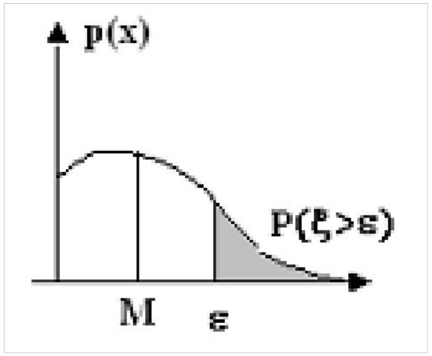
Сущность закона больших чисел

Есть независимые случайные величины, каждая из которых может принимать значения, далекие от своего математического ожидания. Но если мы их просуммируем, то среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью принимает значения, близкие к определенному неслучайному постоянному числу т.е. значения отдельных случайных величин могут иметь большой разброс, а их среднее арифметическое - малый.

Первое неравенство Чебышева

Для каждой неотрицательной случайной величины ξ, имеющей математическое ожидание $M[\xi]$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{M[\xi]}{\varepsilon}$$



Первое неравенство Чебышева
ПРИМЕР 1

Пусть ξ - время опоздания студентов на лекцию. Известно, что $M[\xi]=1$ мин. Оценить вероятность того, что студент опоздает не менее чем на 5 минут.

$$P\{\xi > \varepsilon\} \le \frac{M[\xi]}{\varepsilon},$$

$$P\{\xi > 5\} \le \frac{1}{5}$$

Первое неравенство Чебышева

ПРИМЕР 2

Среднее число сообщений, поступающих на телефон в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число сообщений будет не более 500.

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{M[\xi]}{\varepsilon} <=> P\{\xi \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{M[\xi]}{\varepsilon}$$

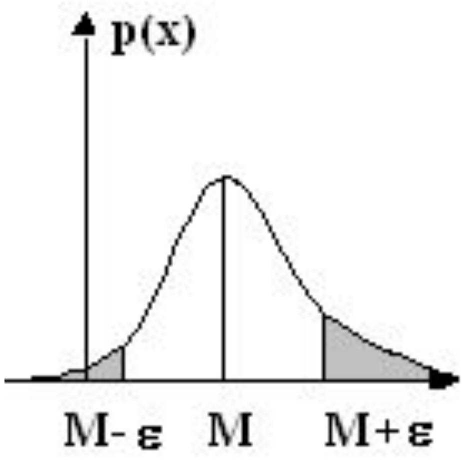
$$M[\xi] = 300,\ P\{\xi \leq 500\} \geq 1 - \frac{300}{500} = 0.4$$

Вероятность не менее 0.4

Второе неравенство Чебышева

Для каждой случайной величины ξ, имеющей дисперсию $D[\xi]=\sigma^2$, при любом $\varepsilon>0$ справедливо

$$P\{|\xi - M[\xi]| \ge \varepsilon\} \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$



Второе неравенство Чебышева ПРИМЕР

Средний расход воды на ферме составляет 1000 л в день, а среднее квадратичное σ=200 л. Оценить вероятность того, что расход воды в любой выбранный день не превысит 2000 л.

Т.к. границы интервала $0 \le \xi \le 2000$ симметричны относительно $M[\xi] = 1000$ и

$$P\{\xi \le 2000\} = P\{0 \le \xi \le 2000\} = P\{|\xi - 1000| < 1000\},$$

тогда, учитывая

$$P\{|\xi - M[\xi]| \ge \varepsilon\} \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P\{|\xi - M[\xi]| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

получим

$$P\{|\xi - 1000| < 1000\} \ge 1 - \frac{200^2}{1000^2} = 0.96$$

Теорема Чебышева

Если ξ_1, ξ_2, ξ_n – независимые случайные величины, для которых существуют $M[\xi_i] = m_i$ и $D[\xi_i] = \sigma_i^2$, причем дисперсии их не превышают некоторой константы С, то, как бы мало не было $\varepsilon > 0$,

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Доказательство теоремы Чебышева

$$M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i\text{,}\quad D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\le\frac{Cn}{n^2}=\frac{C}{n}$$

Применим второе неравенство Чебышева к

случайной величине $\varphi_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$:

$$P\left\{\left|\varphi_n-M[\varphi_n]\right|<\varepsilon\right\}\ge 1-\frac{D[\varphi_n]}{\varepsilon^2}.$$

Т.к. $M[\varphi_i]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i$ и $D[\varphi_i]\le\frac{C}{n}$:

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{m_1+\ldots+m_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}\ge 1-\frac{C}{\varepsilon^2 n}\to 1 \text{ при } n\to\infty \ ■$$

Следствие теоремы Чебышева

Если $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$ – независимые случайные величины, имеющие одинаковые $M[\xi_i]=m$ и ограниченные дисперсии, то, как бы мало не было $\varepsilon > 0$,

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-m\right|<\varepsilon\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Практическое значение теоремы Чебышева. ПРИМЕР 1.

Страховой компании необходимо установить размер страхового взноса.

Рассматривая убытки, как случайные величины, и обладая статистикой, можно определить средние убытки, которые на основании теоремы Чебышева можно считать величиной почти не случайной.

Тогда на основании этих данных и предполагаемой страховой суммы определяется размер страхового взноса.

Практическое значение теоремы Чебышева. ПРИМЕР 2.

При измерении некоторой физической величины, истинное значение которой равно m, проводят n независимых измерений этой величины. Результат каждого измерения – случайная величина ξ_i. Если при измерениях отсутствуют систематические погрешности, то на основании следствия из теоремы Чебышева

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \to m \text{ при } n \to \infty.$$

Если все измерения проводятся с одинаковой точностью σ^2, то дисперсия их средней

$$D\left[\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} D[\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n] =$$

$$= \frac{1}{n^2}(D[\xi_1] + D[\xi_2] + \ldots + D[\xi_n]) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Т.о. увеличивая число измерений, можно увеличивать точность измерений.

Якоб Бернулли

1654 - 1705

Швейцарский математик.

Наиболее значительны достижения в развитии анализа бесконечно малых, теории рядов, вариационного исчислении и теории вероятностей. Благодаря его работам теория вероятностей приобрела важнейшее значение в практической деятельности.

Теорема Бернулли

Пусть проводится n испытаний по схеме Бернулли и m – общее число успехов. Тогда справедливо

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\} = 1,$$

где p – вероятность успеха в одном испытании.

Теорема Бернулли

Теорема Бернулли – следствие теоремы Чебышева, т.к. статистическую вероятность события $\frac{m}{n}$ можно представить как среднее арифметическое n независимых случайных величин ξ, имеющих одинаковый закон распределения: $\frac{1}{n}\sum\xi$.

Теорема Бернулли

Теорема Бернулли дает теоретическое обоснование замены неизвестной вероятности события его статистической вероятностью, утверждая, что при $n \to \infty$ статистическая вероятность стремиться *по вероятности* к постоянной вероятности события:

$$\frac{m}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{P} p$$

Центральные предельные теоремы (Ц.П.Т.)

Ц.П.Т.— класс теорем в теории вероятностей, утверждающих, что сумма достаточно большого количества слабо зависимых случайных величин, имеющих примерно одинаковые масштабы (ни одно из слагаемых не доминирует, не вносит в сумму определяющего вклада), имеет распределение, близкое к нормальному

Практическое значение Ц.П.Т. ПРИМЕР.

Пусть производится измерение некоторой физической величины. Каждое из измерений является приблизительным, на него влияют многие факторы – температура, колебания прибора, влажность и т.д. Каждый из факторов порождает ничтожно малую ошибку, но совокупность факторов – заметную суммарную ошибку. Рассматривая суммарную ошибку как сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, можно заключить, что ошибка имеет нормальное распределение. На этом строится статистическое оценивание погрешности.

Ляпунов Александр Михайлович

1857-1918

Русский математик и механик.

Исследовал проблемы устойчивости движения материальных систем. Методы, предложенные Ляпуновым применяются во многих разделах теории дифференциальных уравнений.. Дал простое и строгое доказательство центральной предельной теоремы в общем виде. Для доказательства разработал метод характеристических функций, который широко применяется в современной теории вероятностей.

Теорема Ляпунова

Если ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ..., –независимые случайные величины, для которых существуют $M[\xi_i]=m_i$ и $D[\xi_i]=\sigma_i^2$, абсолютный центральный момент третьего порядка $M[|\xi_i - m_i|^3]=\mu_i$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0$$

то закон распределения $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ при $n\to\infty$ неограниченно приближается к нормальному с математическим ожиданием $\sum_{i=1}^{n}m_i$ и дисперсией $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$.

Теорема Ляпунова

Смысл условия $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0$ состоит в том, чтобы в сумме $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ не было слагаемых, влияние которых на разброс подавляюще велико по сравнению с остальными и не должно быть большого числа слагаемых, влияние которых очень мало. Т.о. удельный вес каждого отдельного слагаемого должен стремиться к нулю при увеличении числа слагаемых.

Следствие теоремы Ляпунова

Если все случайные величины ξ_i одинаково распределены с $D[\xi_i] = \sigma^2$, то закон распределения $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ при $n \to \infty$ неограниченно приближается к нормальному.

Теорема Ляпунова Пример.

Потребление электроэнергии за месяц в каждой квартире можно представить как n случайных величин. Если потребление электроэнергии в каждой квартире резко не выделяется среди остальных, то на основании теоремы Ляпунова можно считать, что потребление энергии всего дома будет случайной величиной, имеющей приближенно нормальный закон распределения.

Но если в одной из квартир находится прачечная, то вывод о приближенно нормальной энергии всего дома будет неправомерен.

Спасибо за внимание!

Конец