

Уявіть собі, що ви біля ставка, кидаєте камінці у воду і спостерігаєте як на поверхні утворюються хвилі у вигляді концентричних кіл (центр кожного кола розміщений саме там, де камінець торкнувся води)

Станьте перед дзеркалом, підніміть праву руку - і дзеркало «перетворить» вас на лівшу (ваш двійник підняв ліву руку).

У шухляді вашого столу лежить косинець; ви трохи висунули шухляду - і косинець перемістився разом з нею.

Так чи інакше, в кожному з цих випадків фігури, про які йдеться, зазнають певних змін, перетворень.



Спроби правильно відобразити на плоскому рисунку природні форми предметів були задовго до виникнення писемності - люди малювали на стінах печер рослини, тварин тощо. Тривала практика підказувала митцям, як передати на рисунку зображуваний предмет - так зароджувалося вчення про відповідності й перетворення.

За допомогою геометричних перетворень і комп'ютерної графіки кінематографи бентежать уяву глядача дивовижними образами і незвичайними перетвореннями на екрані.

Перетворення допомагають художникам правильно будувати композиції картин, а хімікам - досліджувати структуру кристалів. На цьому уроці ми пригадаємо вже відомі вам основні види геометричних перетворень на площині та познайомимося з деякими новими. **Але це буде нелегко.**

**Через терни до зірок.** У житті нічого не дається задарма. Звичайно, якщо ви не зловили удачу за хвіст. Терни -це дуже колюча рослина, так ,уявіть, скільки потрібно пробиратися через ці тернии (праця,невдачі, непорозуміння...), щоб добитися результату який ви бажаєте(зірки).

Це величезна праця, люди все життя домагаються бажаного. Є ті люди, які просто пливуть за течією і нічого не роблять що б жити краще.

Пам'ятаєте притчу про жаб? Одна потонула склавши лапки, інша збила масло і вибралася назовні. Так давайте будемо йти через терни, збивати масло. Але жити так, щоб соромно нам не було і все у нас було. **Отож, вперед!**





**Через терни до зірок...**

Девіз уроку:

Працью наполегливо,  
Швидко, старанно,  
Щоб кожна хвилина  
Не втратилась марно.



# Терен №1

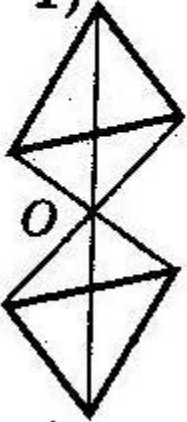


# Терен №1 ХТО зайвий ?

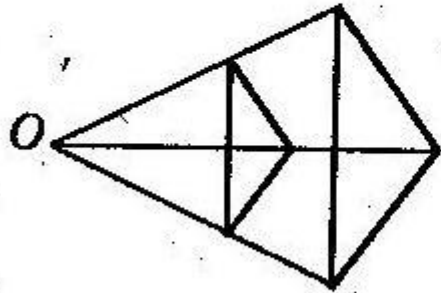
*Логічне завдання*

*Який із рисунків зайвий?*

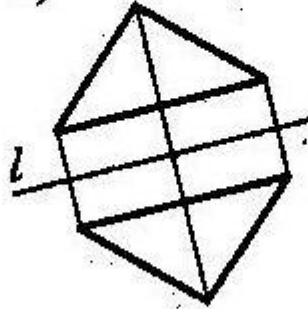
1)



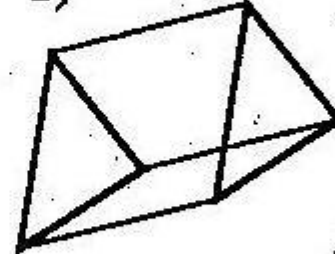
2)



3)



4)



Терен № 2

“Згадати все”





# Які перетворення ви вивчили ?

ПЕРЕТВОРЕННЯ

РУХ

??????????

Центральна  
симетрія

Осьова  
симетрія

поворот

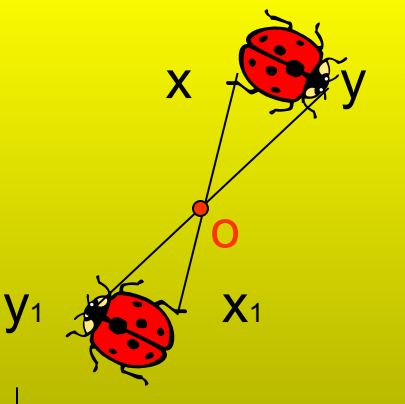
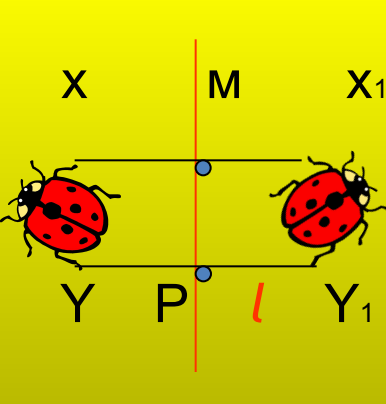
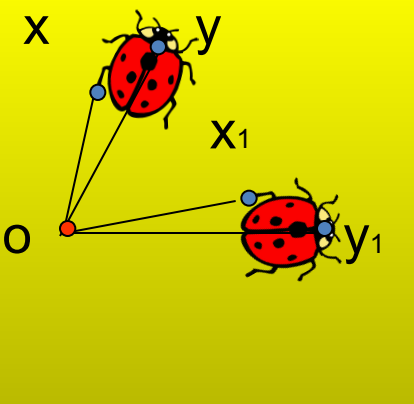
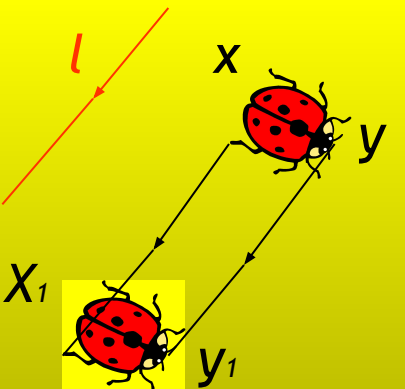
Паралельне  
перенесення

???????

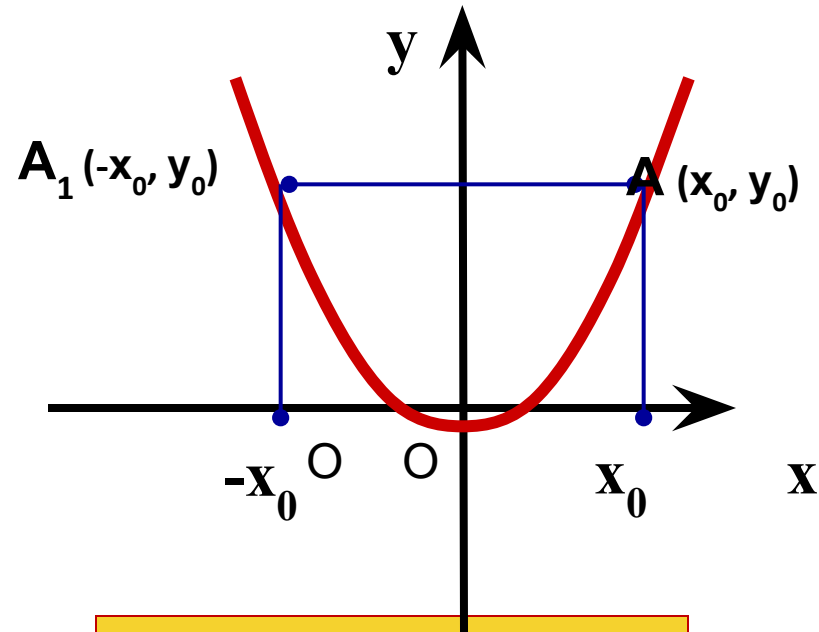


# Перетворення фігур

## Рух

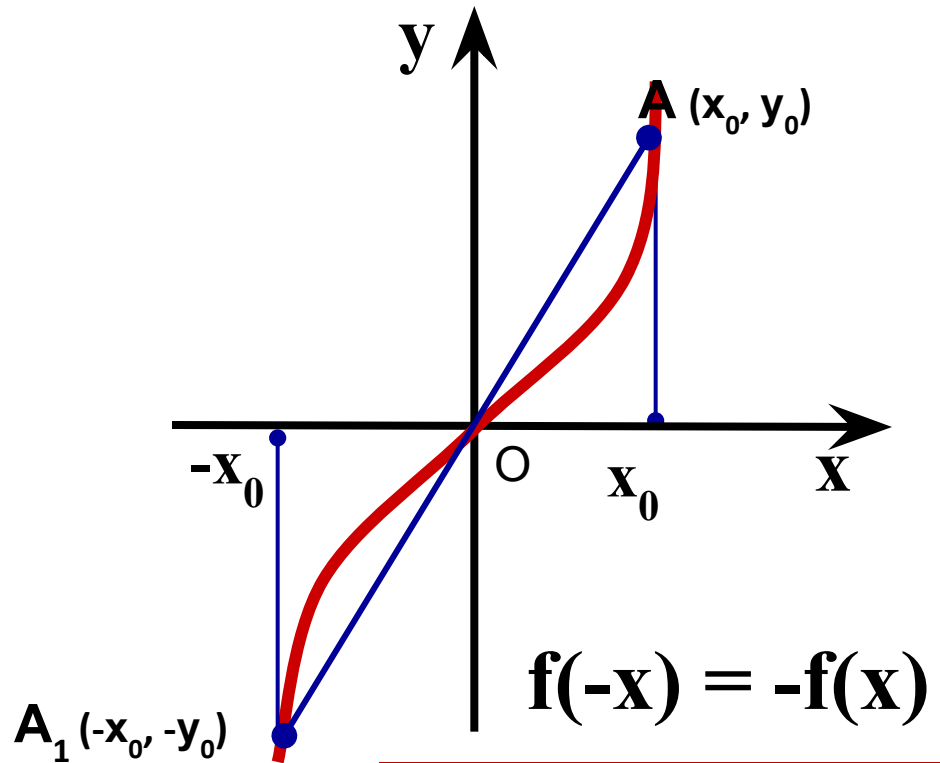
Симетрія відносно точки	Симетрія відносно прямої	Поворот відносно точки на кут $\alpha$	Паралельне перенесення на відстань $l$
			
<p>O – центр симетрії  <math>OX_1=OX</math>,  <math>OY_1=OY</math>  <math>X_1Y_1 = XY</math></p>	<p><math>l</math> - вісь симетрії,  <math>MX_1=MX</math>, <math>PY_1=PY</math>  <math>XX_1 \perp l</math>, <math>YY_1 \perp l</math>  <math>X_1Y_1 = XY</math></p>	<p>O – центр повороту  <math>\angle XOY = \angle X_1OY_1 = \alpha</math>,  <math>OX_1=OX</math>, <math>OY_1=OY</math>  <math>X_1Y_1 = XY</math></p>	<p><math>l</math> - напрямлений вектор,  <math>XX_1 \parallel l</math>,  <math>YY_1 \parallel l</math>, <math>X_1Y_1 = XY</math></p>

# Перетворення симетрії в координатній площині



$$f(-x) = f(x)$$

Oy – вісь симетрії



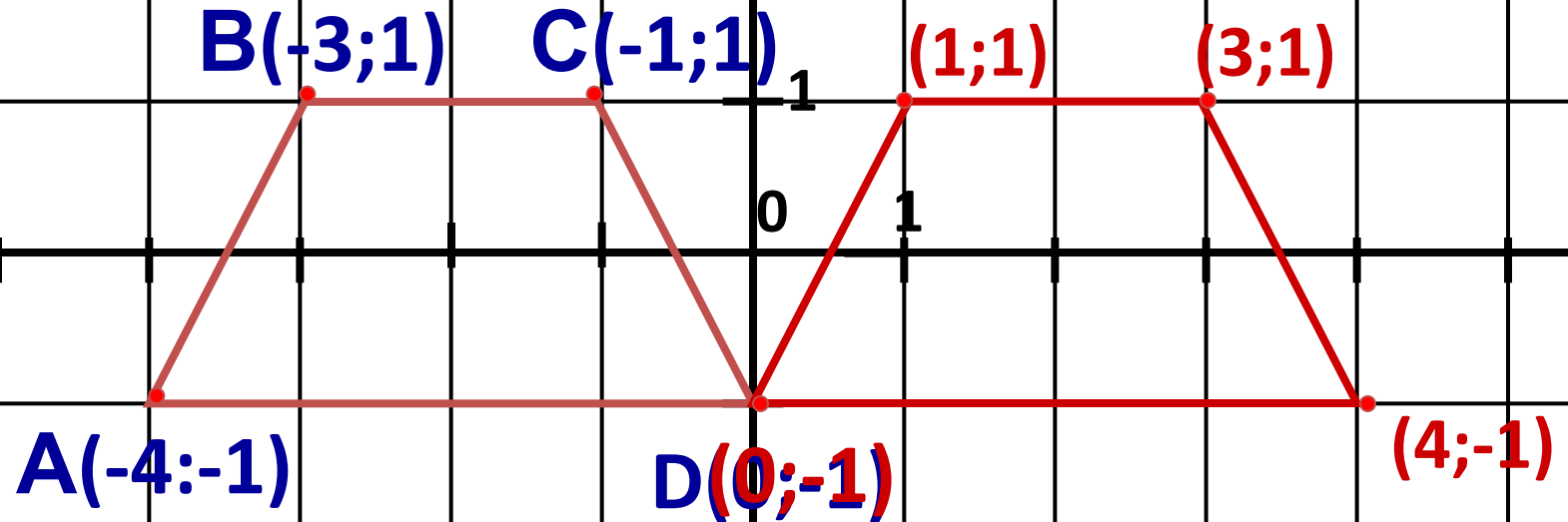
$$f(-x) = -f(x)$$

O – центр симетрії

# Задача:

Побудувати образ трапеції ABCD при симетрії з віссю Oy.

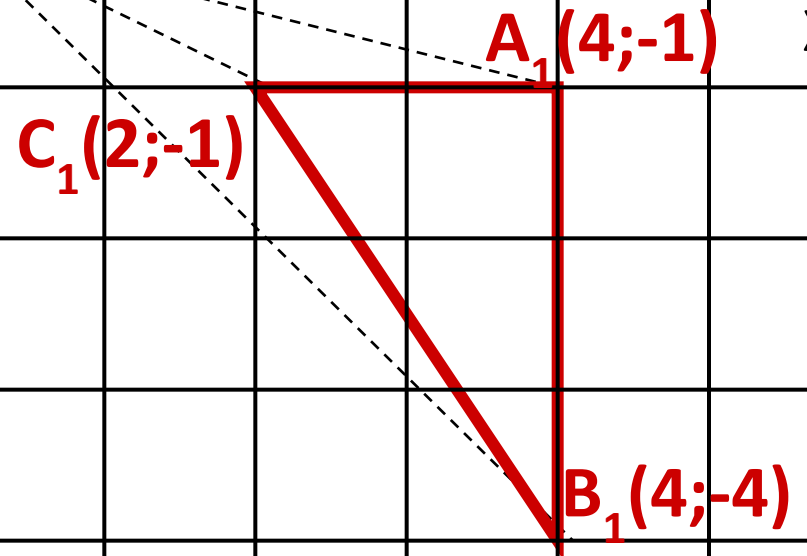
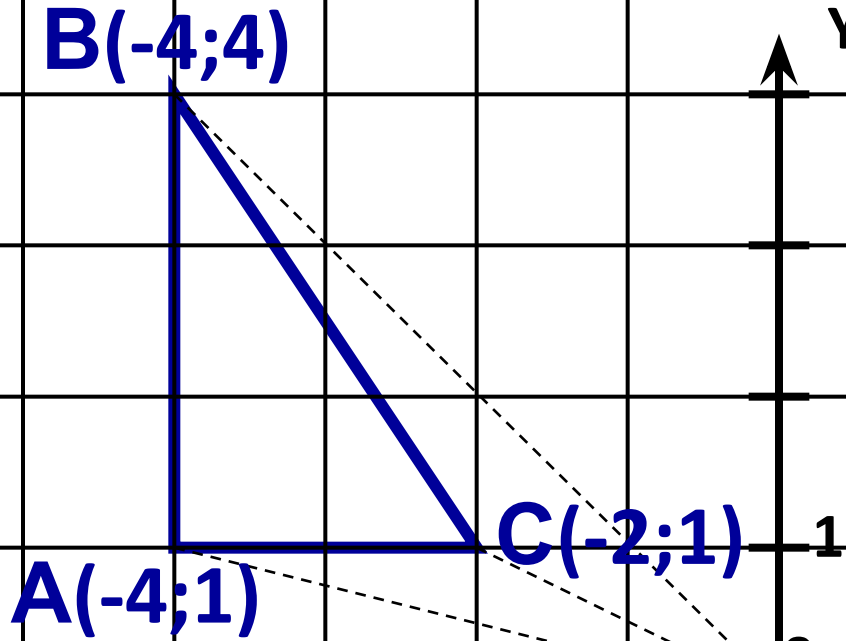
Побудова



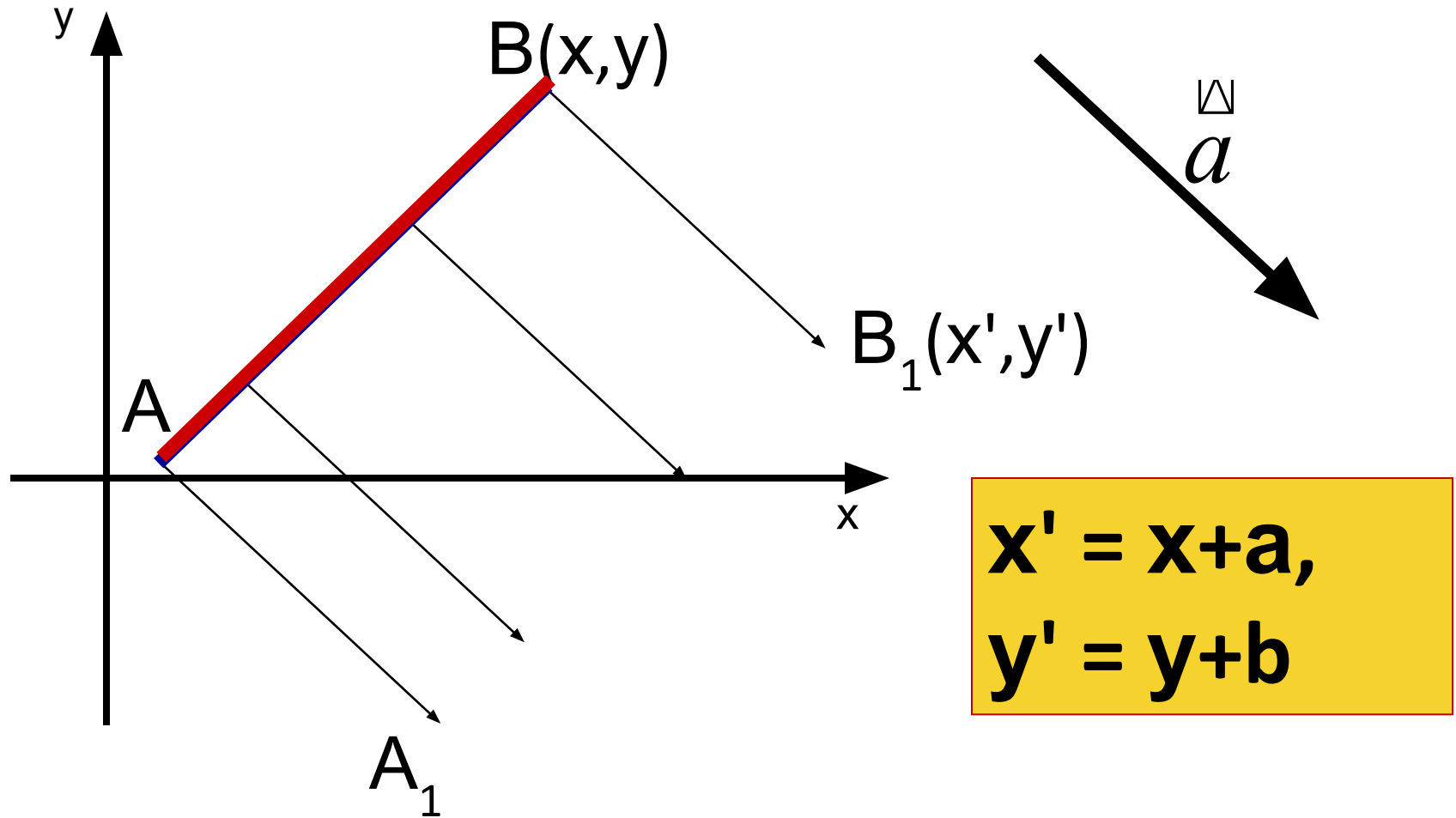
# Задача:

Побудувати образ трикутника ABC при симетрії з центром у початку координат.

## Побудова



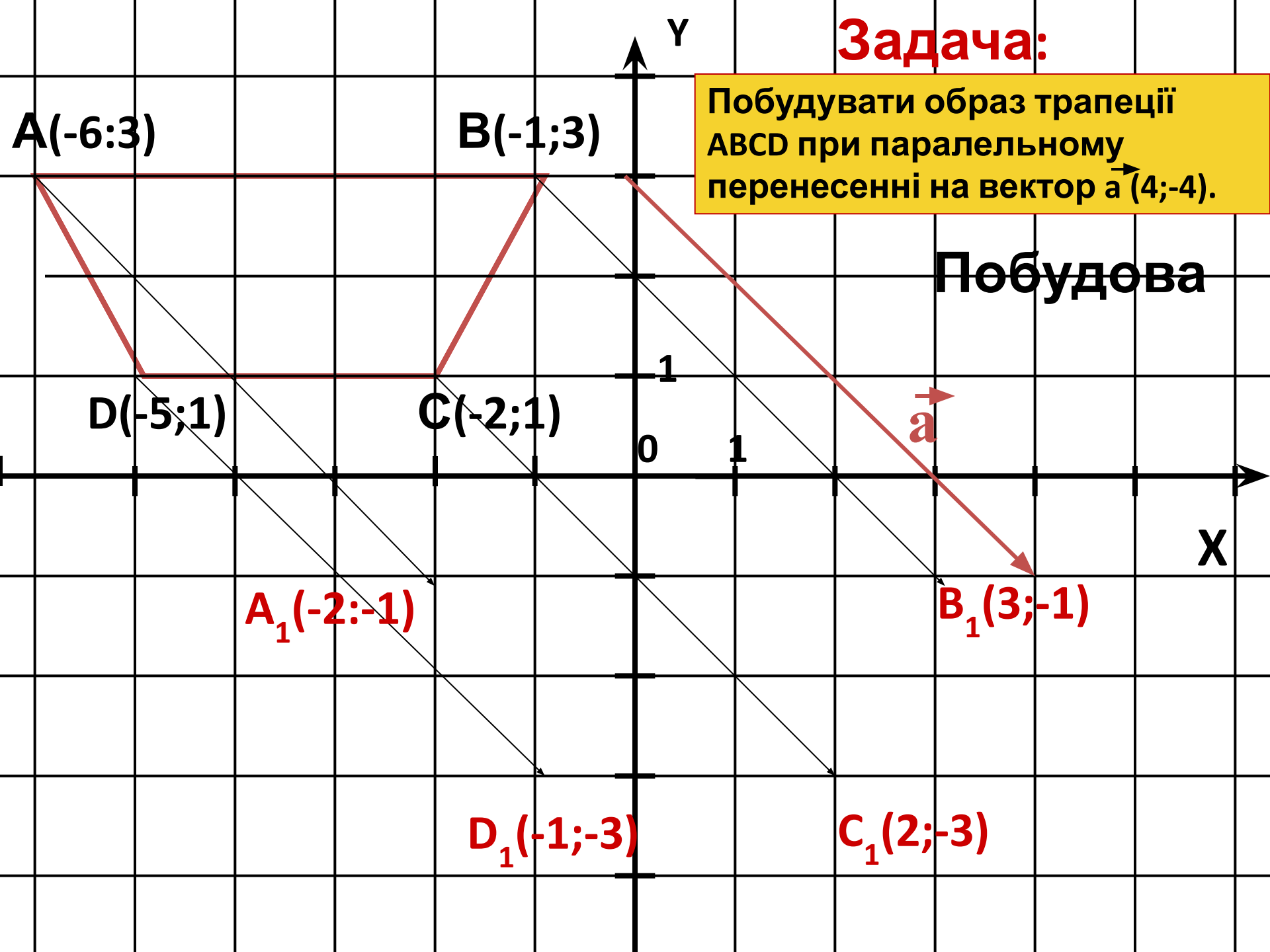
# Паралельне перенесення в координатній площині



## Задача:

Побудувати образ трапеції  
ABCD при паралельному  
перенесенні на вектор  $\vec{a}(4;-4)$ .

## Побудова



A(-6;3)

B(-1;3)

D(-5;1)

C(-2;1)

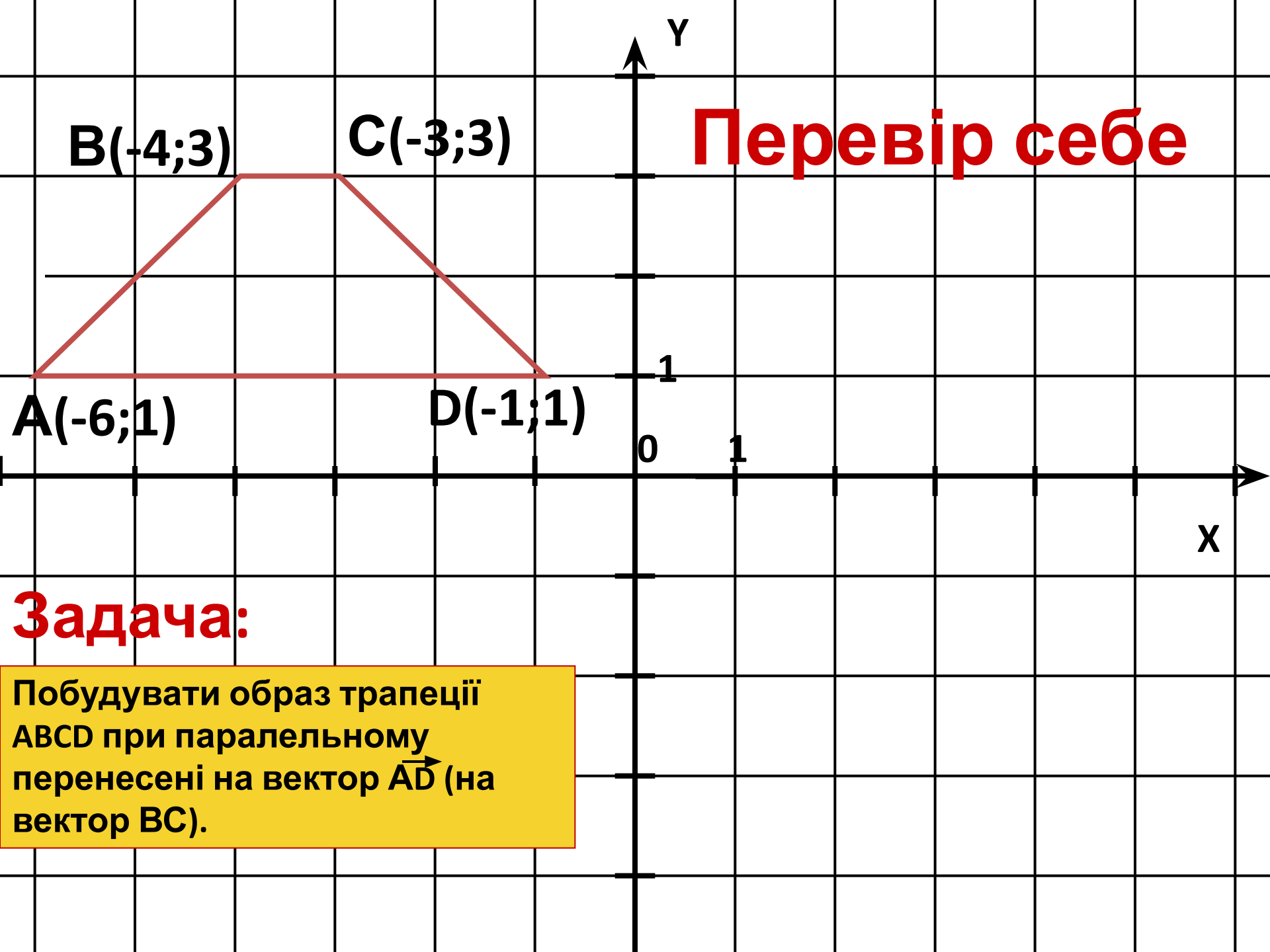
A<sub>1</sub>(-2;-1)

B<sub>1</sub>(3;-1)

D<sub>1</sub>(-1;-3)

C<sub>1</sub>(2;-3)

**Перевір себе**



**B(-4;3)**

**C(-3;3)**

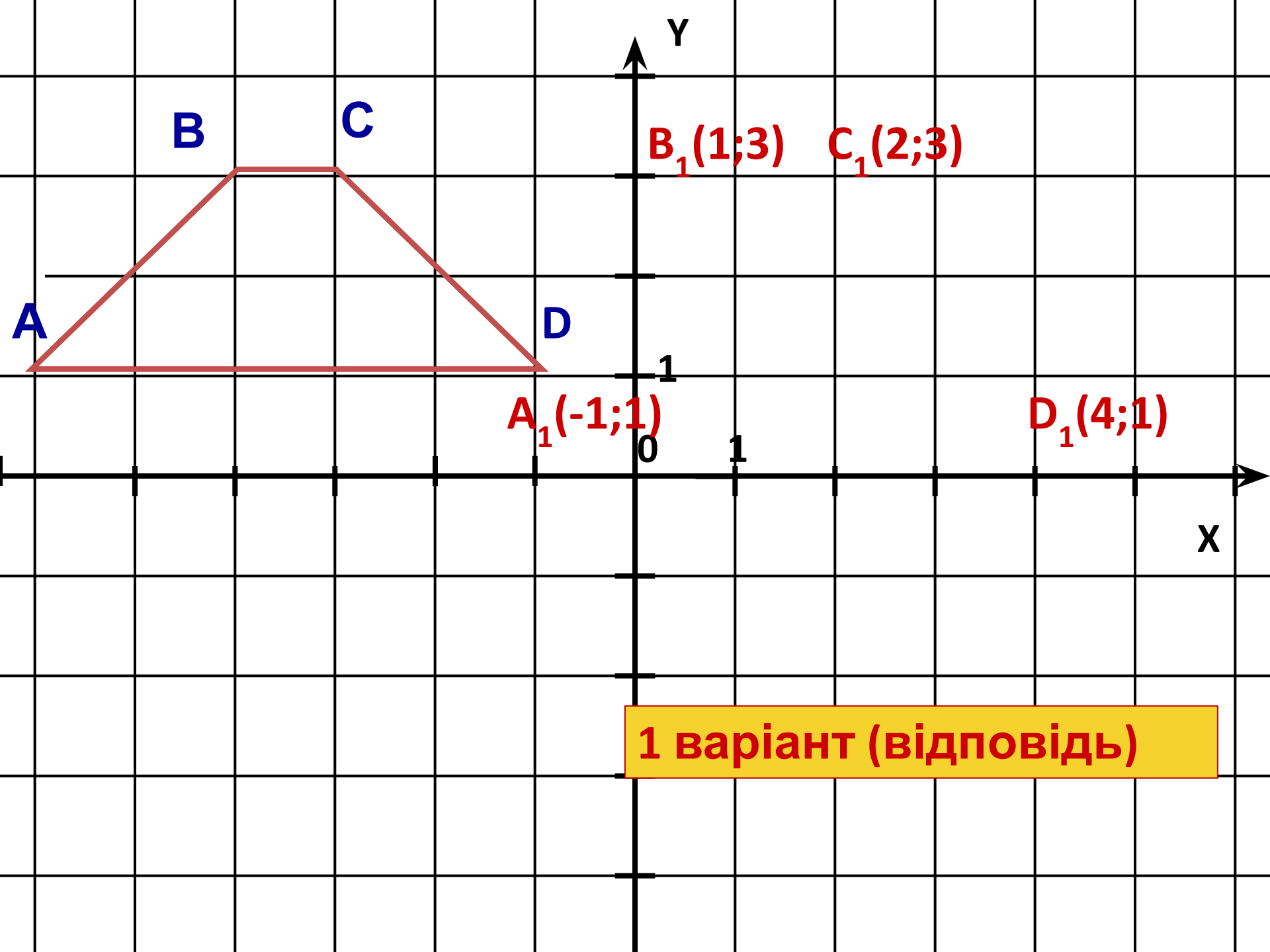
**A(-6;1)**

**D(-1;1)**

**Задача:**

Побудувати образ трапеції ABCD при паралельному перенесенні на вектор  $\vec{AD}$  (на вектор BC).





**B**

**C**

**A**

**D**

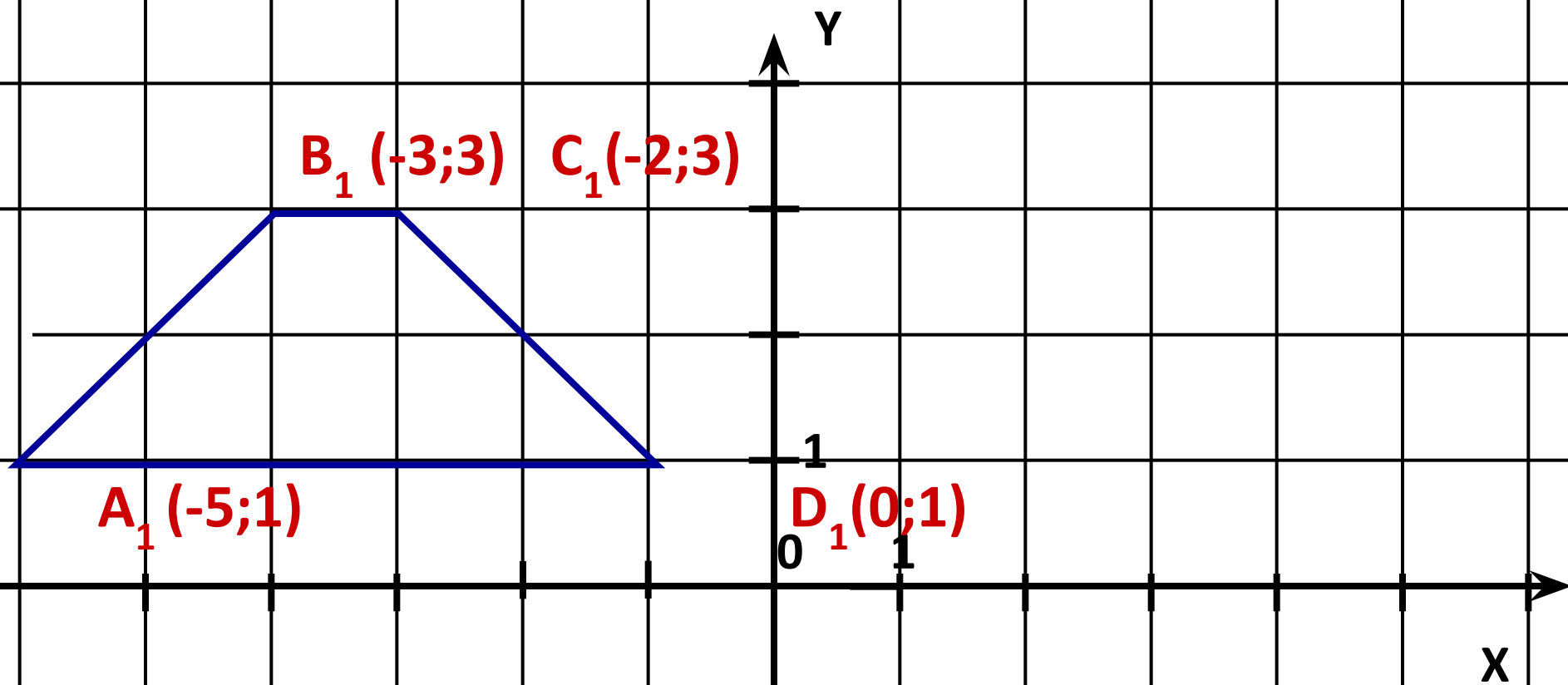
$B_1(1;3)$

$C_1(2;3)$

$A_1(-1;1)$

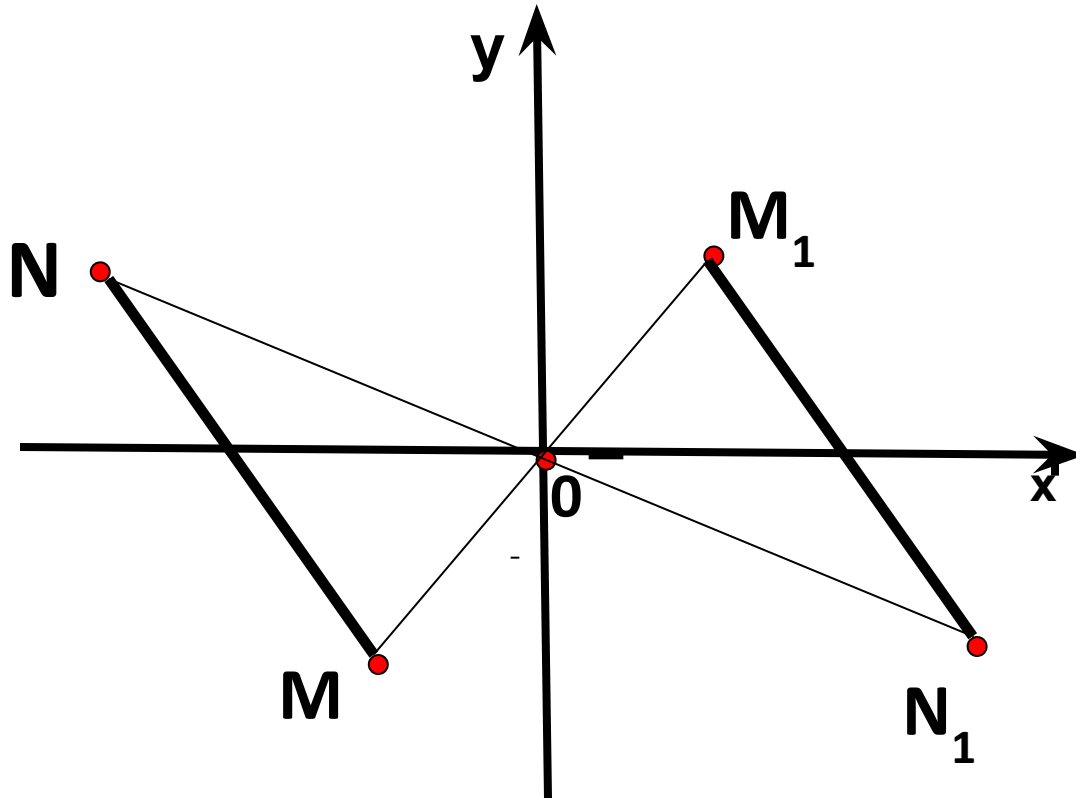
$D_1(4;1)$

**1 варіант (відповідь)**

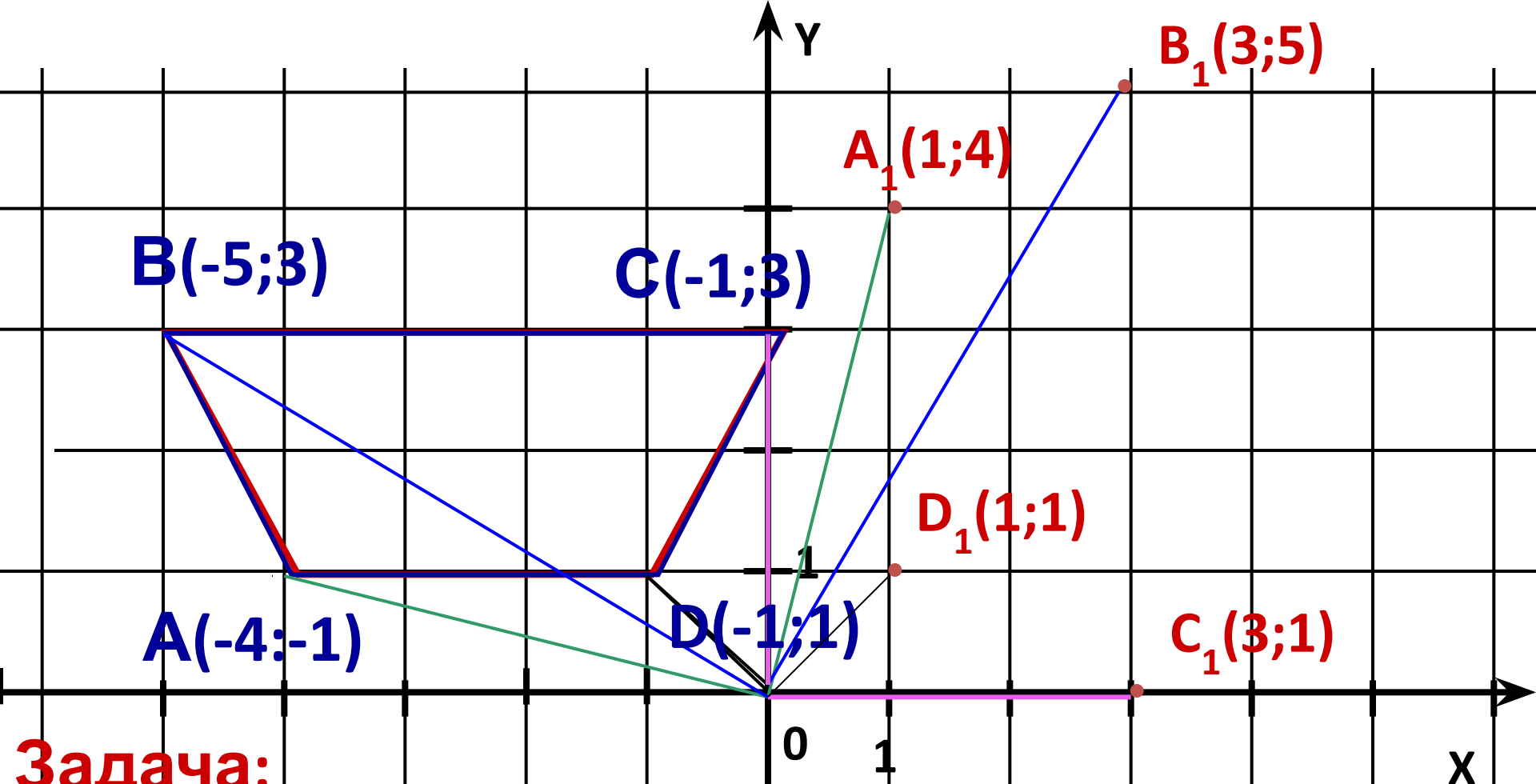


**2 вариант  
(відповідь)**

# Поворот в координатній площині



Поворот на  $180^\circ$  є центральна симетрія



**Задача:**

Побудувати образ трапеції ABCD при повороті на 90° навколо O(0,0) за годинниковою стрілкою.

**Побудова**

Терен №3

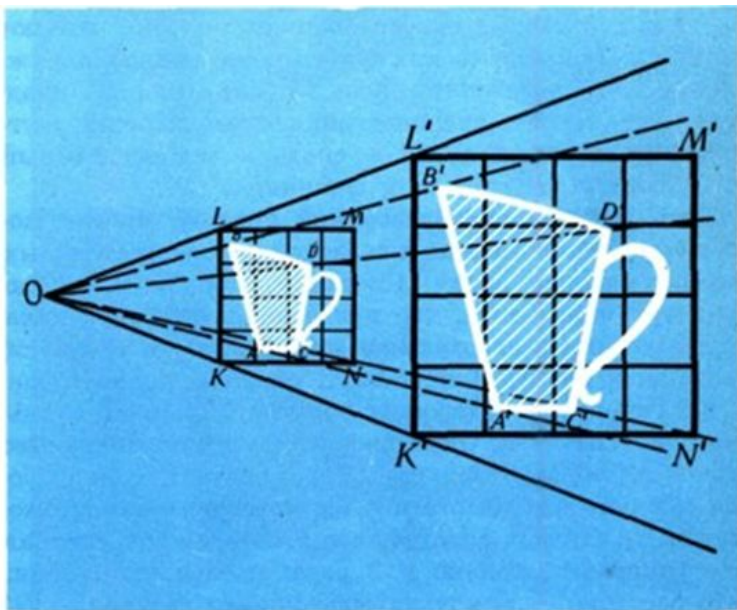
“Спробуй  
зрозумій”



Що ж таке ???????



# Тема уроку: Перетворення подібності. Гомотетія



# Означення

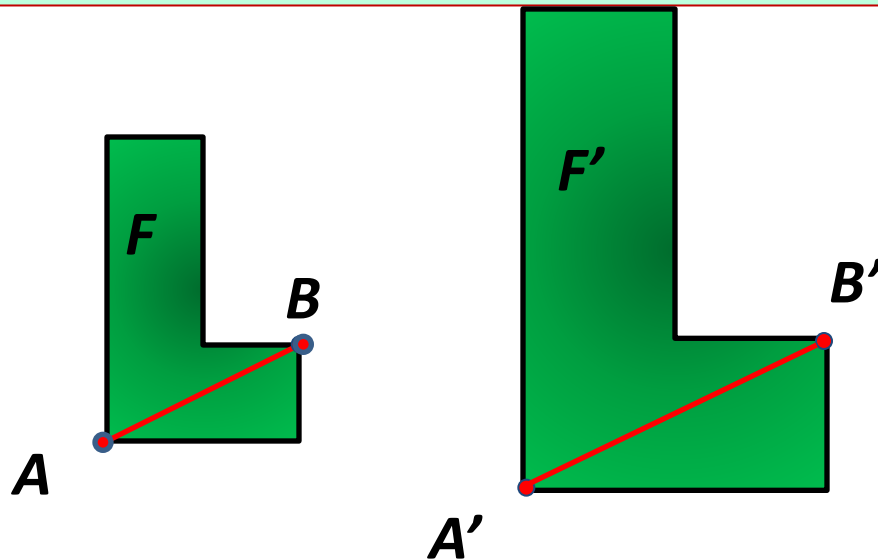
**Перетворенням подібності (подібністю)**

називається таке перетворення фігури  $F$  у фігуру  $F'$ , внаслідок якого відстань між точками змінюється в тому самому відношенні  $k$  ( $k > 0$ ).

Число  $k > 0$  називається **коефіцієнтом подібності**.

**Якщо  $k = 1$** , то маємо **переміщення**.

**Переміщення** – окремий випадок **подібності**.



$$A'B' = k AB$$

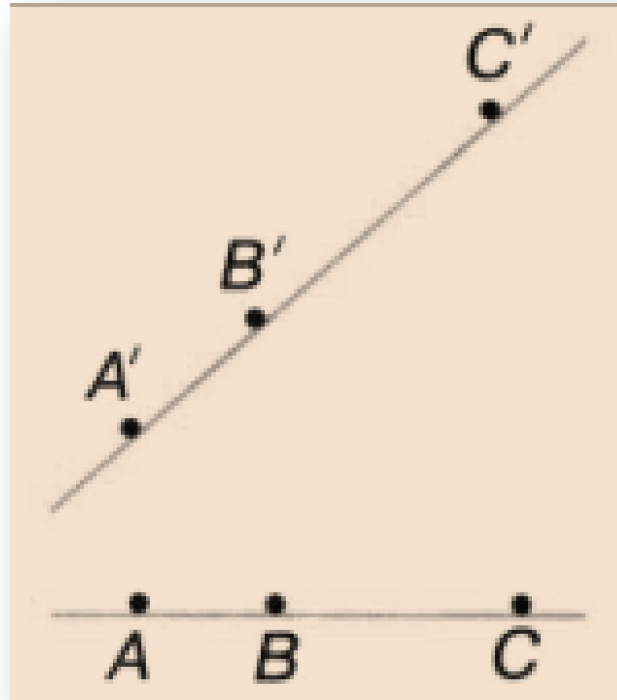


**Які ж властивості має  
перетворення подібності ?**



# Властивість перетворення подібності

Теорема. При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.



# Властивість перетворення подібності

## Доведення.

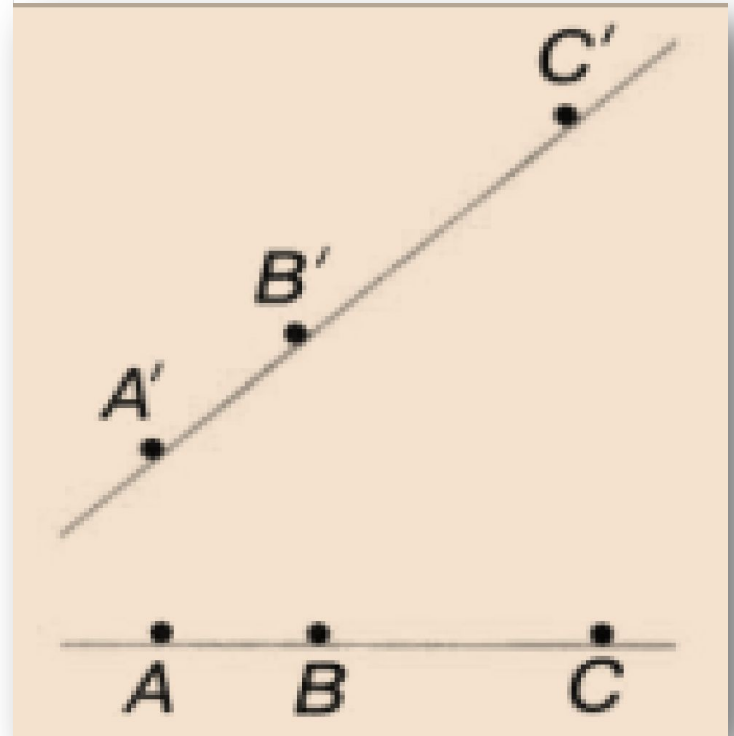
Нехай точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій і точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$ .

Тоді  $AC = AB + BC$ . Деяке перетворення подібності переводить точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  у точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .

За означенням перетворення подібності, маємо:

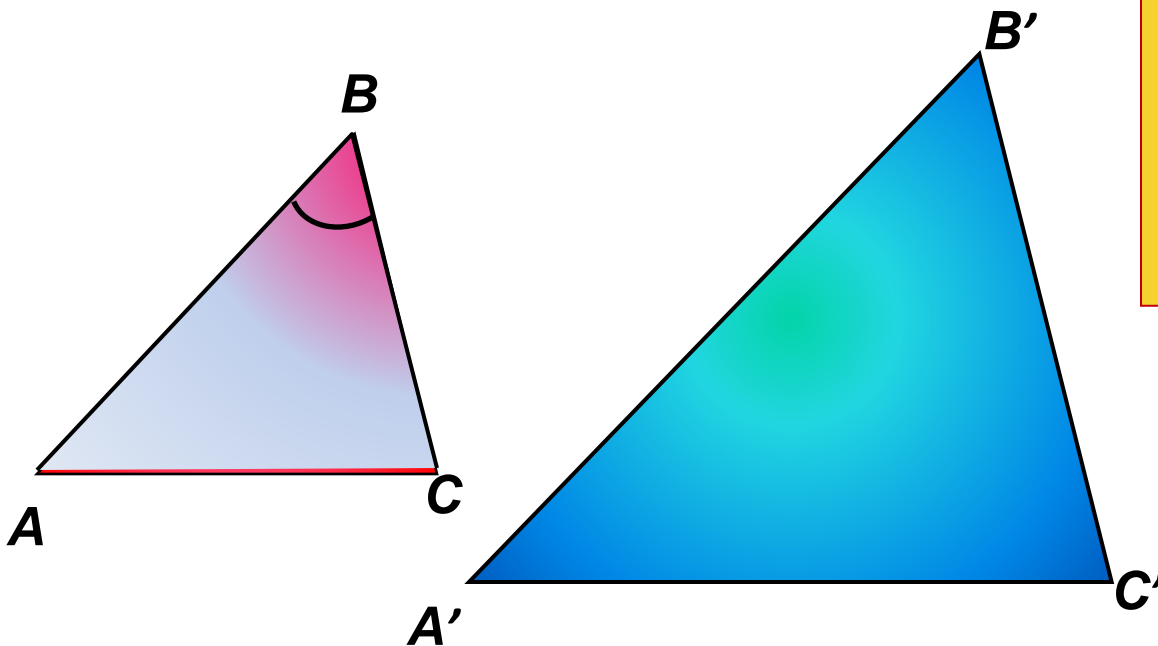
$$A'C' = k \cdot AC = k \cdot (AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'.$$

З рівності  $A'C' = A'B' + B'C'$  випливає, що точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежать на одній прямій, а точка  $B'$  лежить між точками  $A'$  і  $C'$ .



# Властивості перетворення подібності

- 1) Перетворення подібності переводить **прямі в прямі, промені – в промені, відрізки – у відрізки.**
- 2) **Кожна фігура подібна сама собі** з коефіцієнтом подібності  $k=1$ .
- 3) Перетворення подібності **зберігає кути між променями.**

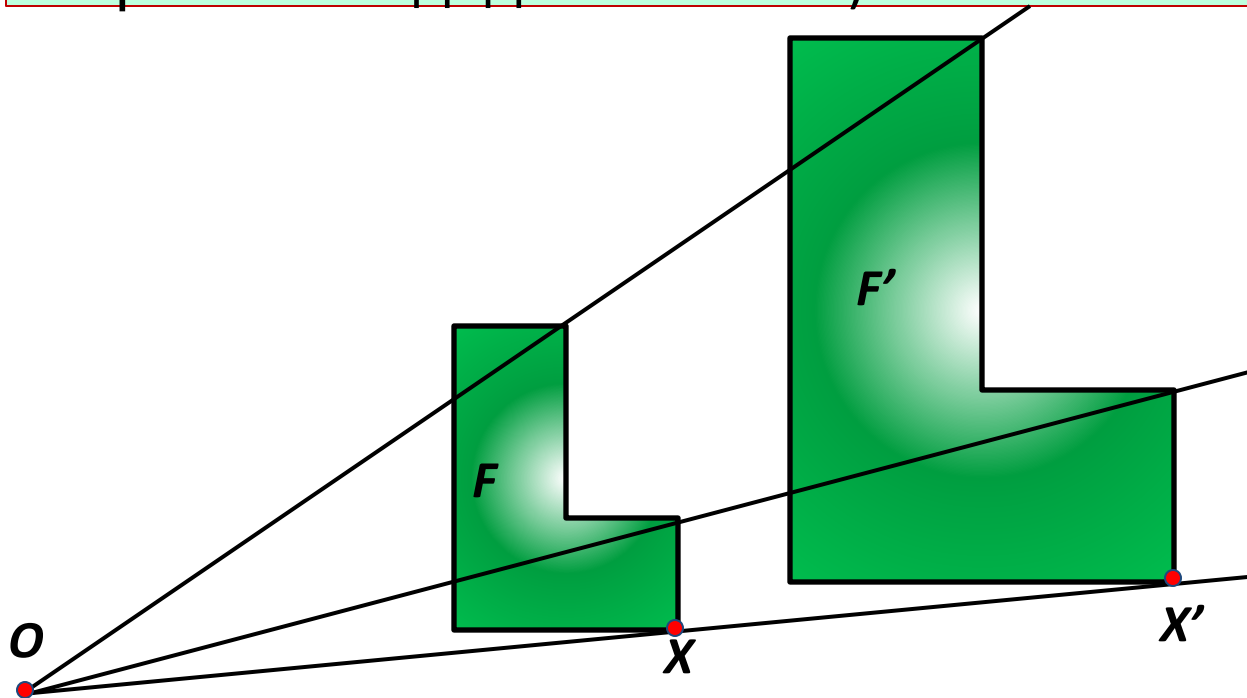


Трикутник ABC  
подібний  
трикутнику A'B'  
C'.

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$

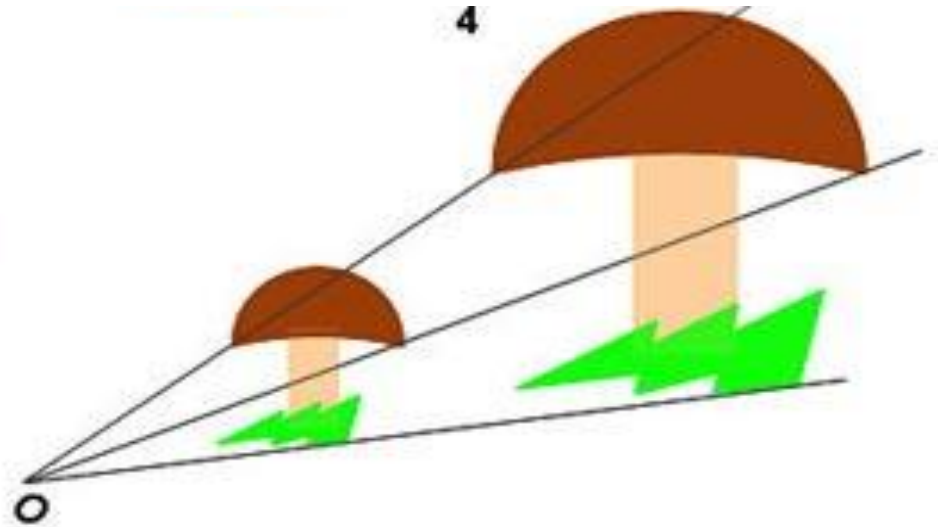
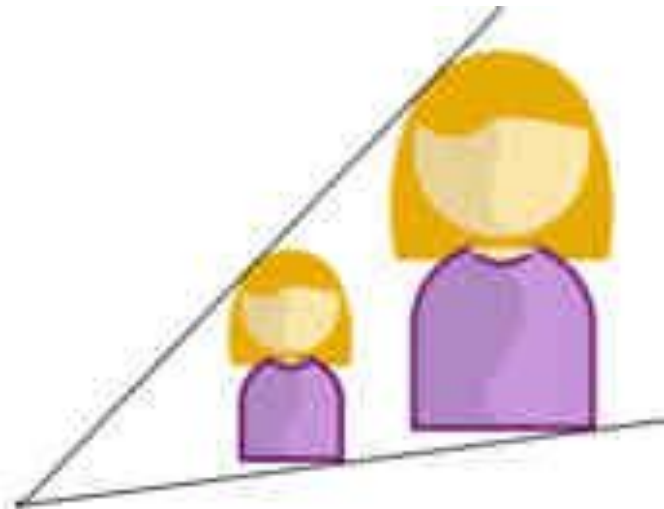
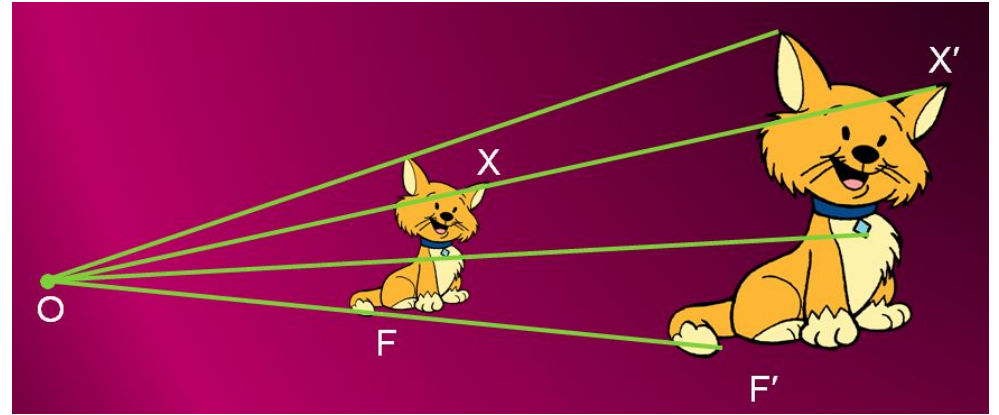
# Означення

**Гомотетією з центром  $O$**  називається таке перетворення фігури  $F$  у фігуру  $F'$ , внаслідок якого кожна точка  $X$  фігури  $F$  переходить у точку  $X'$  фігури  $F'$  так, що точка  $X'$  лежить на промені  $OX$  і  $OX' = k \cdot OX$  ( $k$  – фіксоване додатне число).



Число  $k$  – коефіцієнт гомотетії, фігури  $F$  і  $F'$  називають гомотетичними.

Які ж  
власивості  
має  
гомотетія ?

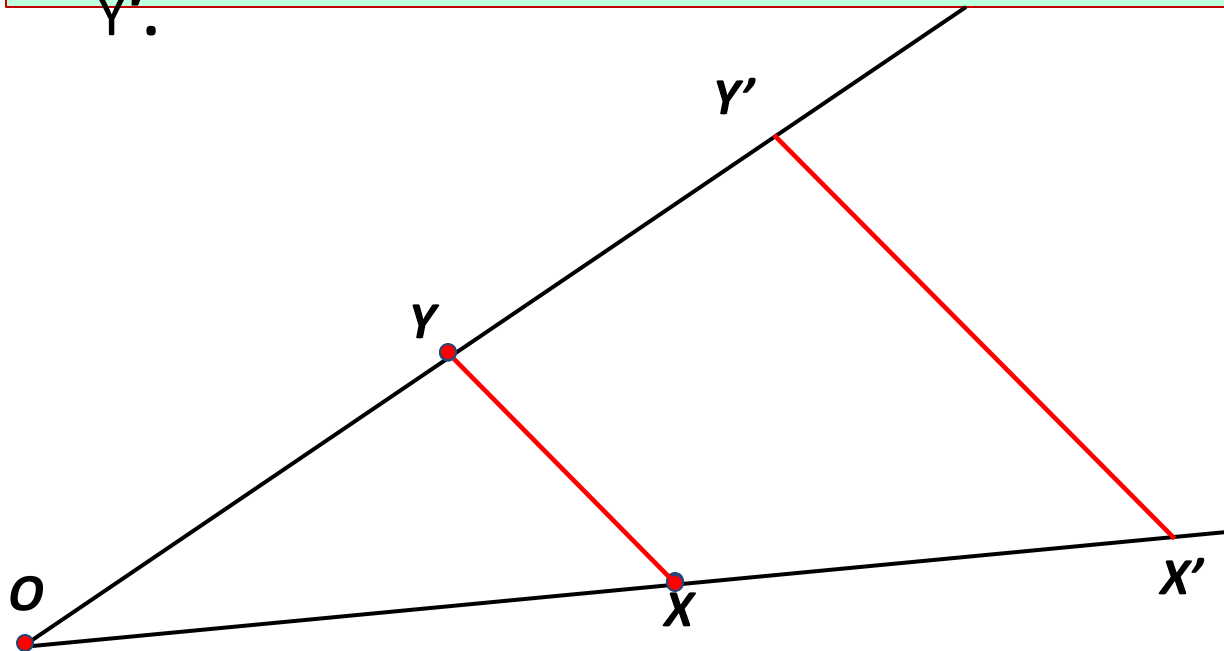


# Основна властивість гомотетії

Теорема. **Гомотетія є перетворенням подібності.**

Доведення.

- Нехай точки  $O$ ,  $X$ ,  $Y$  не лежать на одній прямій.
- Гомотетія з центром  $O$  і коефіцієнтом  $k$ .
- Точка  $X$  – переходить в точку  $X'$ , точка  $Y$  переходить у точку  $Y'$ .



За означенням гомотетії:  $OX' = k \cdot OX$ ,  $OY' = k \cdot OY$ .  
Отже, трикутники  $OXY$  і  $OXY'$  подібні за двома пропорційними сторонами й кутом між ними.

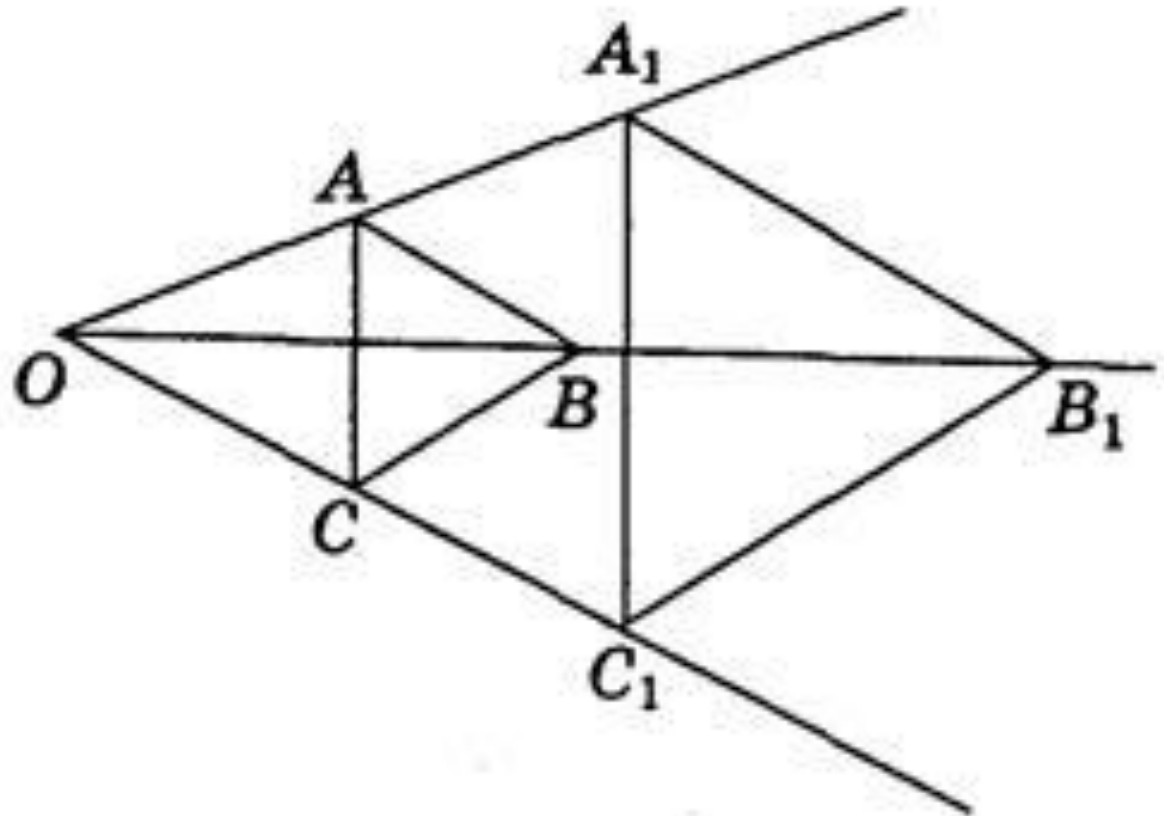
# Властивості гомотетії

- Гомотетія з коефіцієнтом  $k \in$  перетворенням подібності з коефіцієнтом  $k$ .
- При гомотетії пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе; відрізок - у паралельний йому відрізок; кут - у рівний йому кут.
- На координатній площині гомотетія точок  $A(x; y)$  і  $B(x_1; y_1)$  задається формулами:  
$$x_1 = k x; y_1 = k y.$$



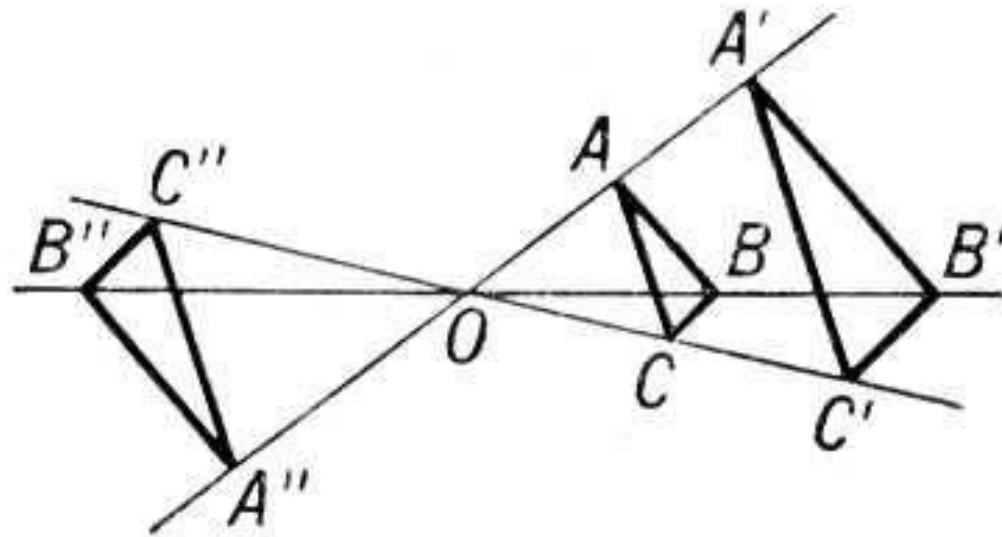
# Коефіцієнт $K$ ...

- Який він може бути?
- Додатний



# Коефіцієнт $K$ ...

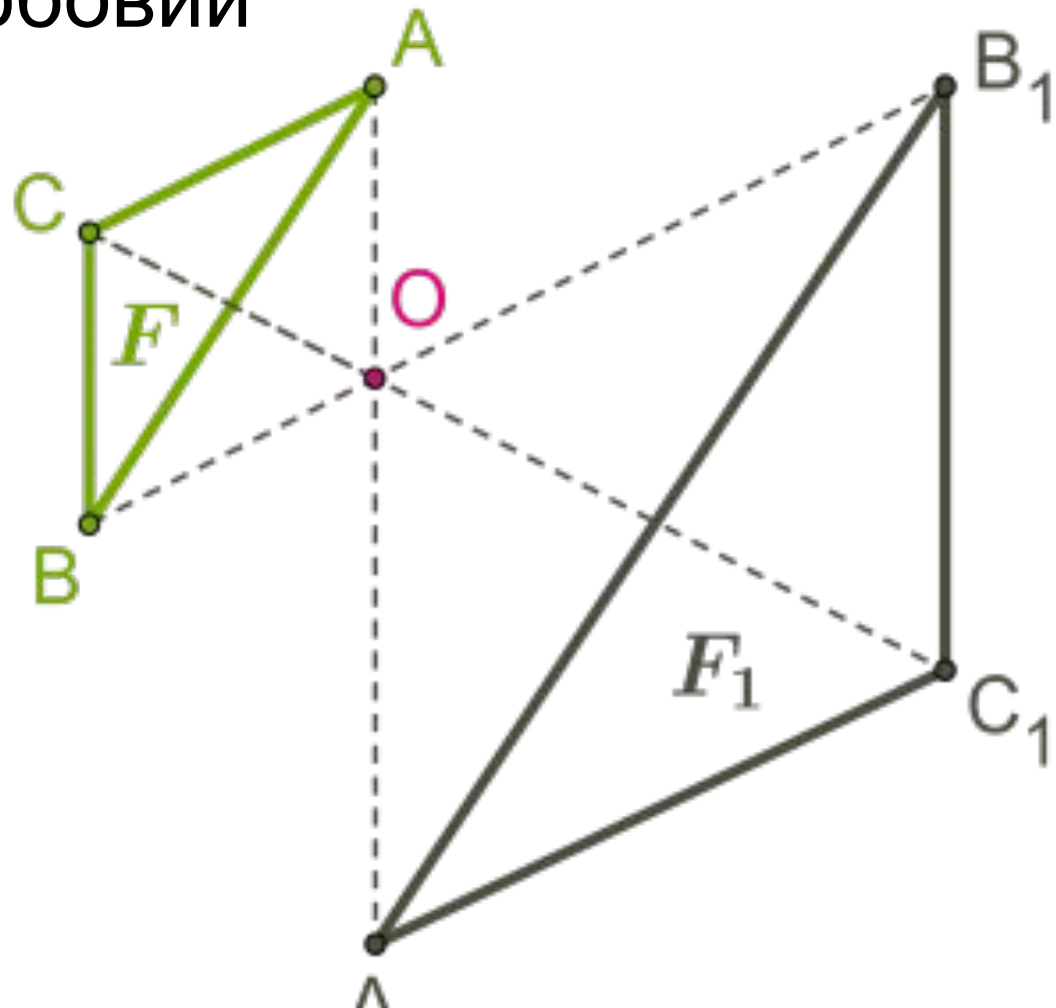
- Який він може бути?
- Від'ємний



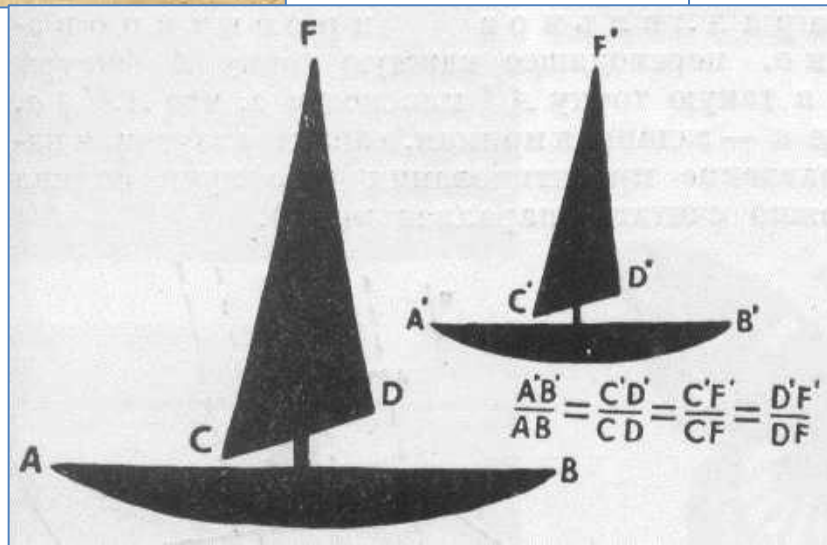
# Коефіцієнт $K$ ...

Який він може бути?

Від'ємний, дробовий



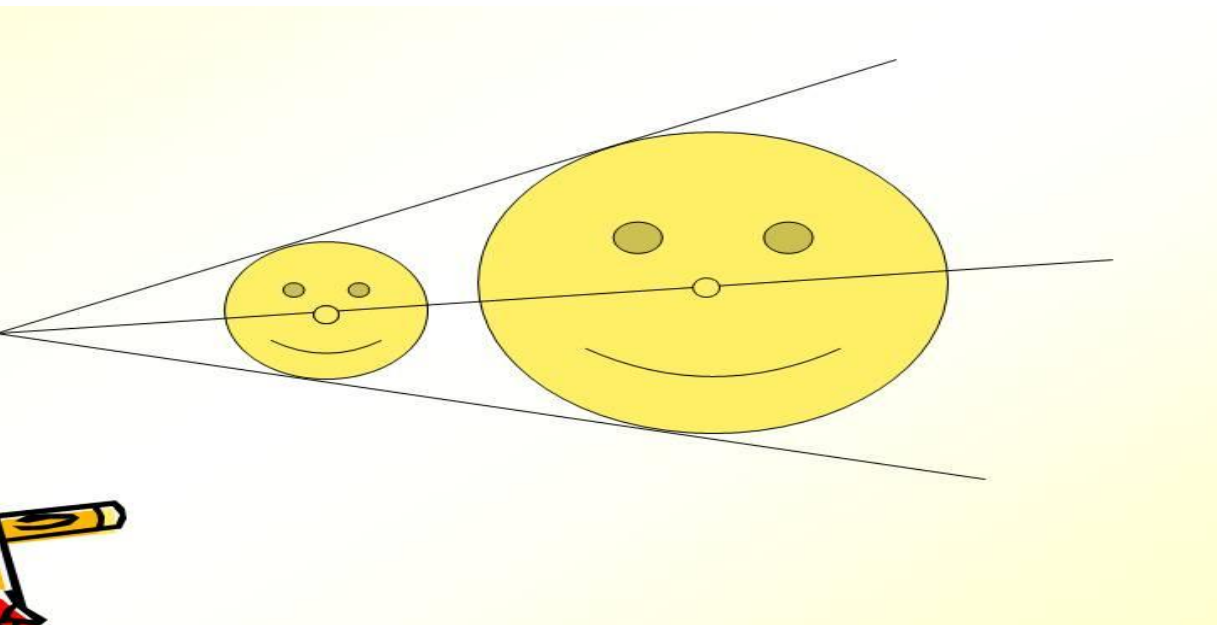
**А як називаються фігури , що утворюються при перетвореннях подібності?**



**Подібні**

# Подібні фігури

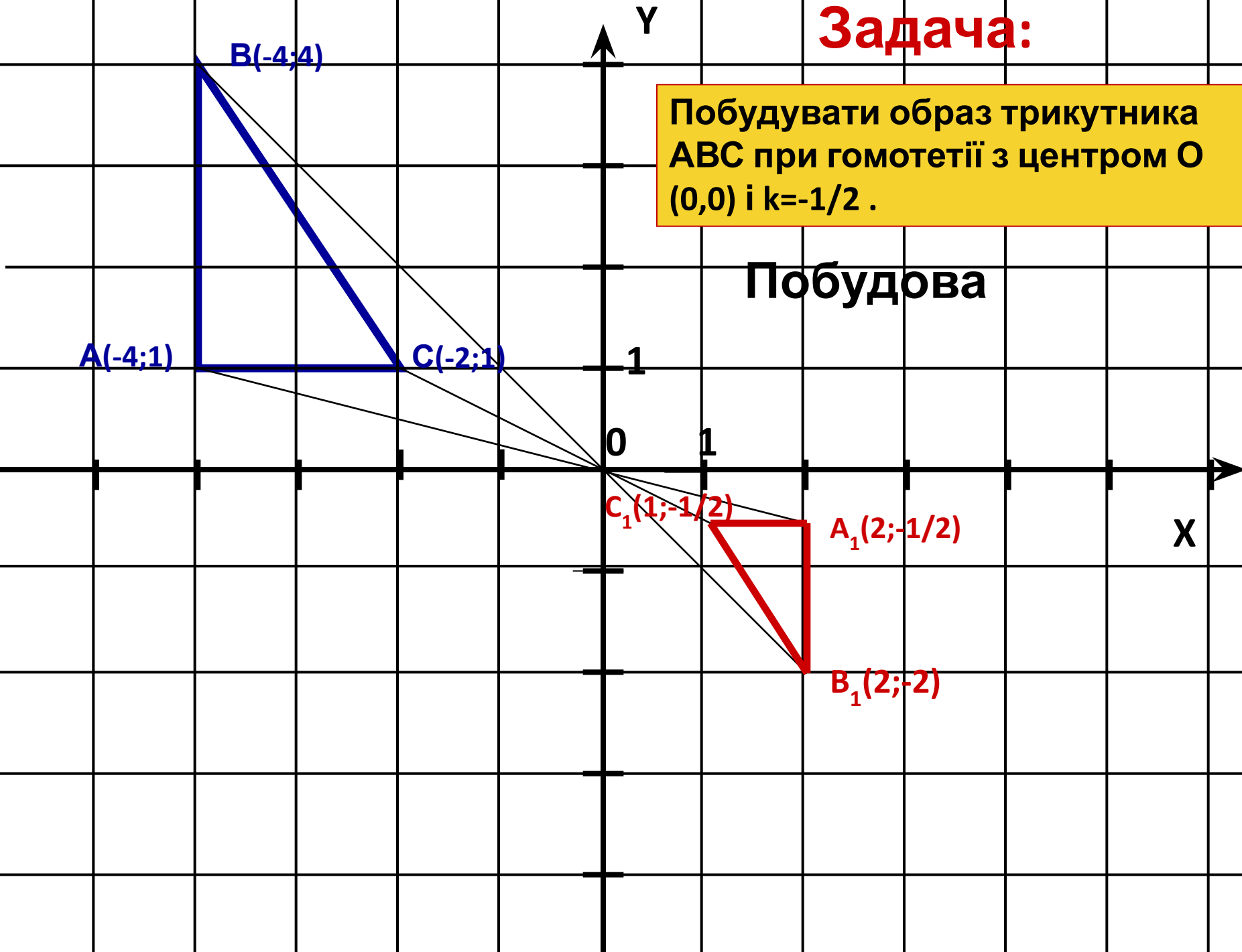
Дві фігури називаються *подібними*, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.



# Задача:

Побудувати образ трикутника ABC при гомотетії з центром O (0,0) і  $k=-1/2$ .

## Побудова



# Терен №2

Будь  
уважний



# Історичні відомості

- Фігури, які мають однакову форму. Але різну величину, зустрічаються у **вавілонських і єгипетських пам'ятках**.
- Учення про подібність фігур виникло в стародавній Греції в V-IV ст. до н. е. Його викладено в **VI книзі “Начал”** Евкліда. Теорія подібності ґрунтується на аксіомі паралельності.
- Поняття подібності лежить в основі складання географічних карт, планів, креслення рисунків.

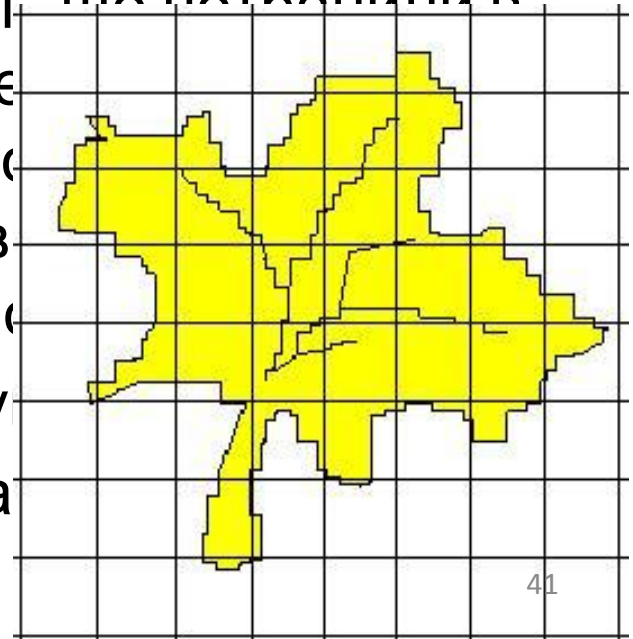
Евклід жив у «315—255 р.р..»

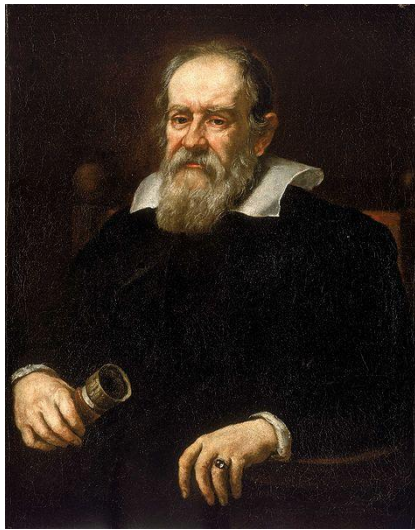




# Історичні відомості

- Для побудови фігур, подібних до даних, є ряд практичних способів. Наприклад, для копіювання рисунків часто користуються *палеткою* ( від французького *palette*) – пластинкою з прозорого паперу, скла або целулоїду з нанесеною на ній сіткою ліній, що утворюють квадрати певного розміру. Накладаючи палетку на рисунок, який треба скопіювати, крапки або деталі окремі квадратики палетки, певні відповідні квадратики тимчасово відмічають на сітці, нанесеної на те місце, в якому треба зобразити копію того або іншого рисунка. Такий спосіб копіювання рисунка був добре відомий художникам давніх часів.





# Історичні відомості

- Принципом подібності користувались ще **художники і скульптори** стародавнього Єгипту, коли їм треба було перевести рисунок на інше місце або збільшити його. У гробниці батька єгипетського фараона Рамзеса II (XIII ст. до н. е.) є стіна, вкрита сіткою квадратиків. За допомогою цієї сітки на стіну перенесено в збільшеному вигляді рисунки менших розмірів.
- Для збільшення і зменшення рисунка в певному відношенні застосовують також пропорціональний циркуль. Його винайшов у 1607 році великий італійський вчений Галілео Галілей.
- Знак  $\sim$  як знак подібності ввів у 1679р. Німецький учений Г.Лейбніц.



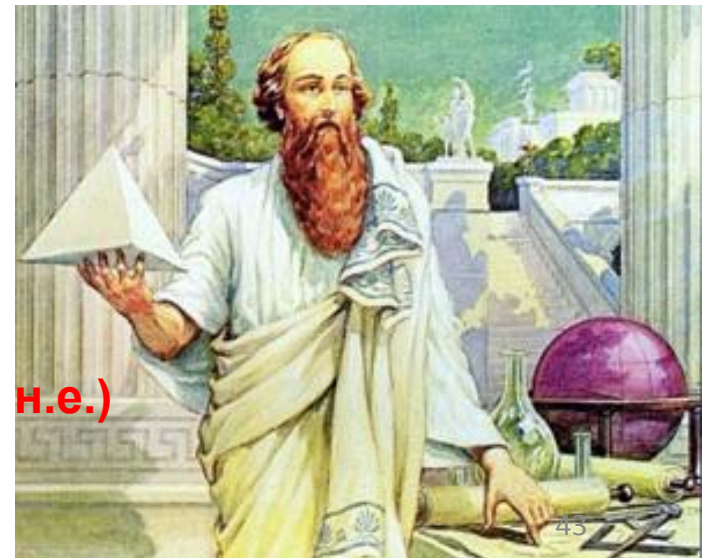
Готфрід Вільгельм Лейбніц  
(1646-1716)

# Історичні відомості

- Застосовуючи поняття подібності астрономи визначали висоти місцевих гір за їх тінями.
- Добре відома всім теорема Піфагора допускає узагальнення, а саме: якщо на катетах і на гіпотенузі прямокутного трикутника побудовано будь-які подібні між собою фігури площею  $S_a$ ,  $S_b$ , і  $S_c$  так, що катети і гіпотенуза є відповідні відрізки цих фігур, то справедлива рівність:  $S_a + S_b = S_c$ .

Вважають, що цю теорему відкрив Евклід; вона міститься в VI книзі його “Начал”. Теорема Піфагора впливає з цієї загальної теорему.

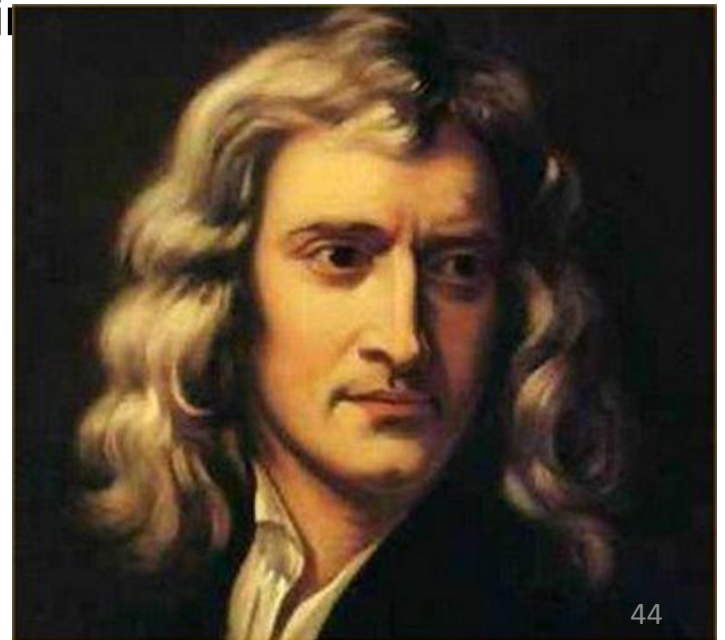
**Піфагор Самоський (570—490 гг. до н.е.)**



# Історичні відомості

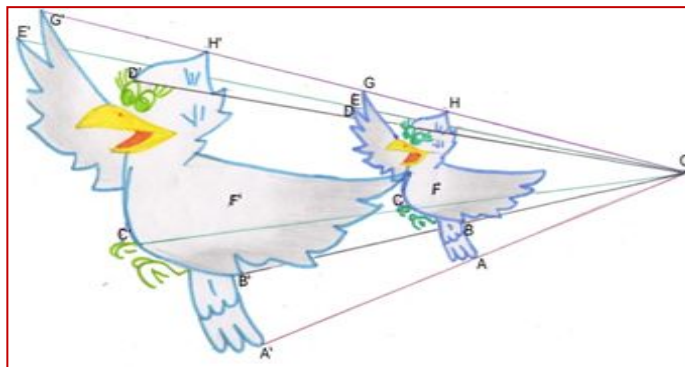
- Поняття подібності лежить в основі **моделювання**. Принцип геометричної подібності переніс на галузь фізичних явищ ще 300 років тому І. Ньютон. Тепер метод моделювання дуже поширений і відіграє в науці і техніці важливу роль. Наприклад, при конструюванні літаків випробують їх моделі. Модель поміщають у так звану аеродинамічну трубу, крізь яку з великою швидкістю пропускають великий повітряний потік, і всебічно вивчають поведження моделі що ніби “нерухомо летить”. Потім аналізують рух літака і складають відповідні рівняння.

**Ісаак Ньютон (1642-1727р.р.)**



# Терен № 5

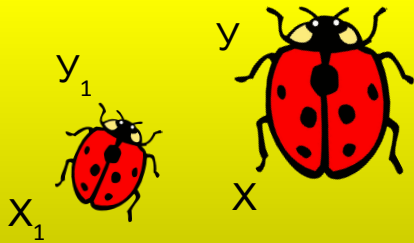
Знайди 10  
відмінностей...



# Перетворення фігур

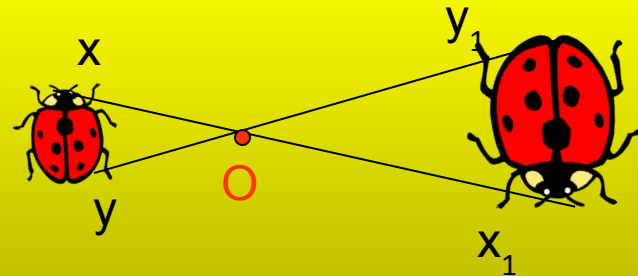
## Перетворення подібності

Перетворення подібності



$$X_1 Y_1 = k \cdot XY$$

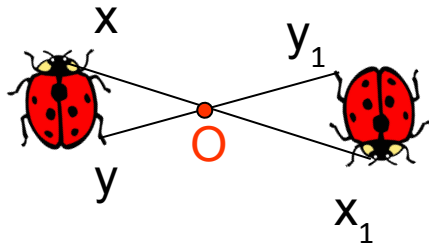
Гомотетія



O – центр гомотетії,  
 $OX_1 = k \cdot OX$ ,  $OY_1 = k \cdot OY$   
 $X_1 Y_1 = k \cdot XY$

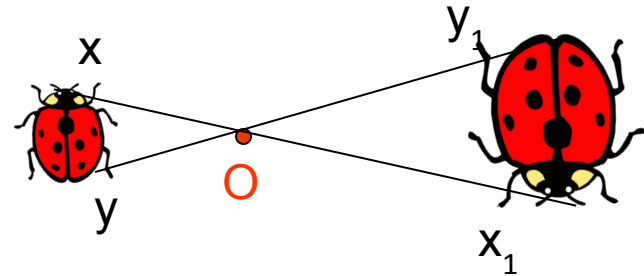
# Перетворення фігур

Рух



$$X_1 Y_1 = XY$$

Перетворення подібності

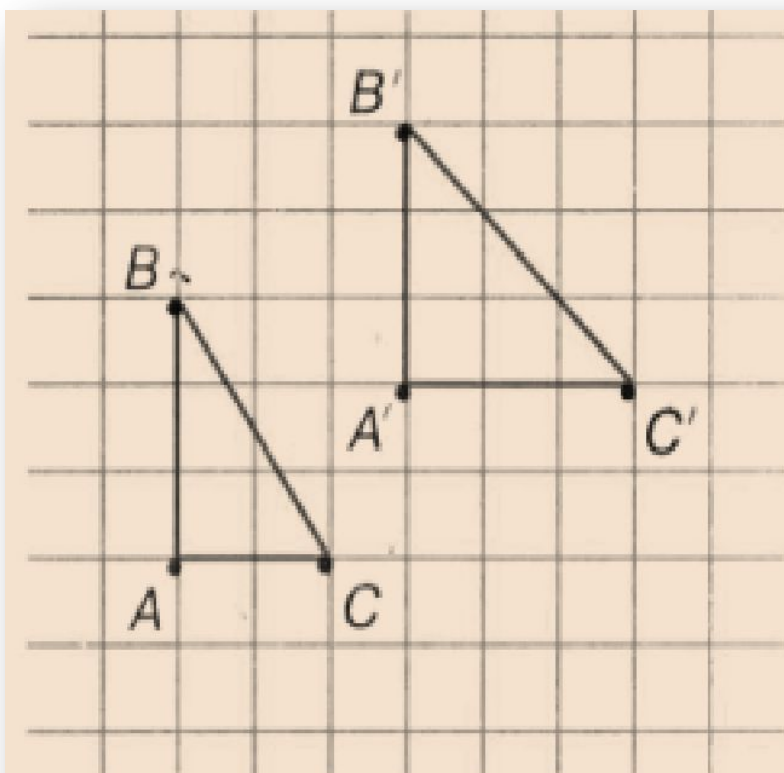


$$X_1 Y_1 = k \cdot XY$$

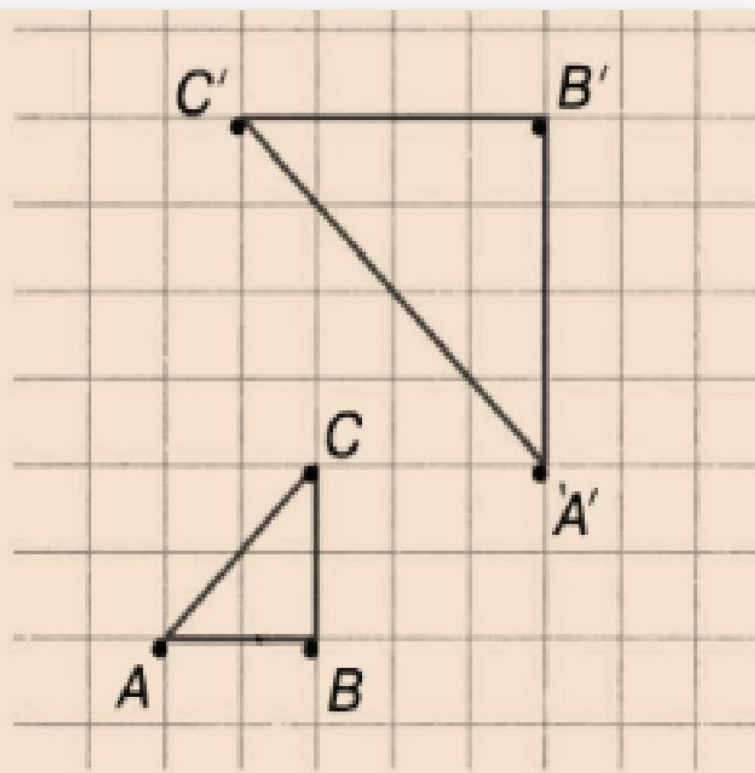
## Властивості руху і перетворення подібності

1. Зберігається взаємне розміщення точок на прямій.
2. образом прямої, променя, відрізка є пряма, промінь, відрізок.
3. Зберігаються кути між променями.

На якому з малюнків зображено перетворення подібності ?



a)



б)



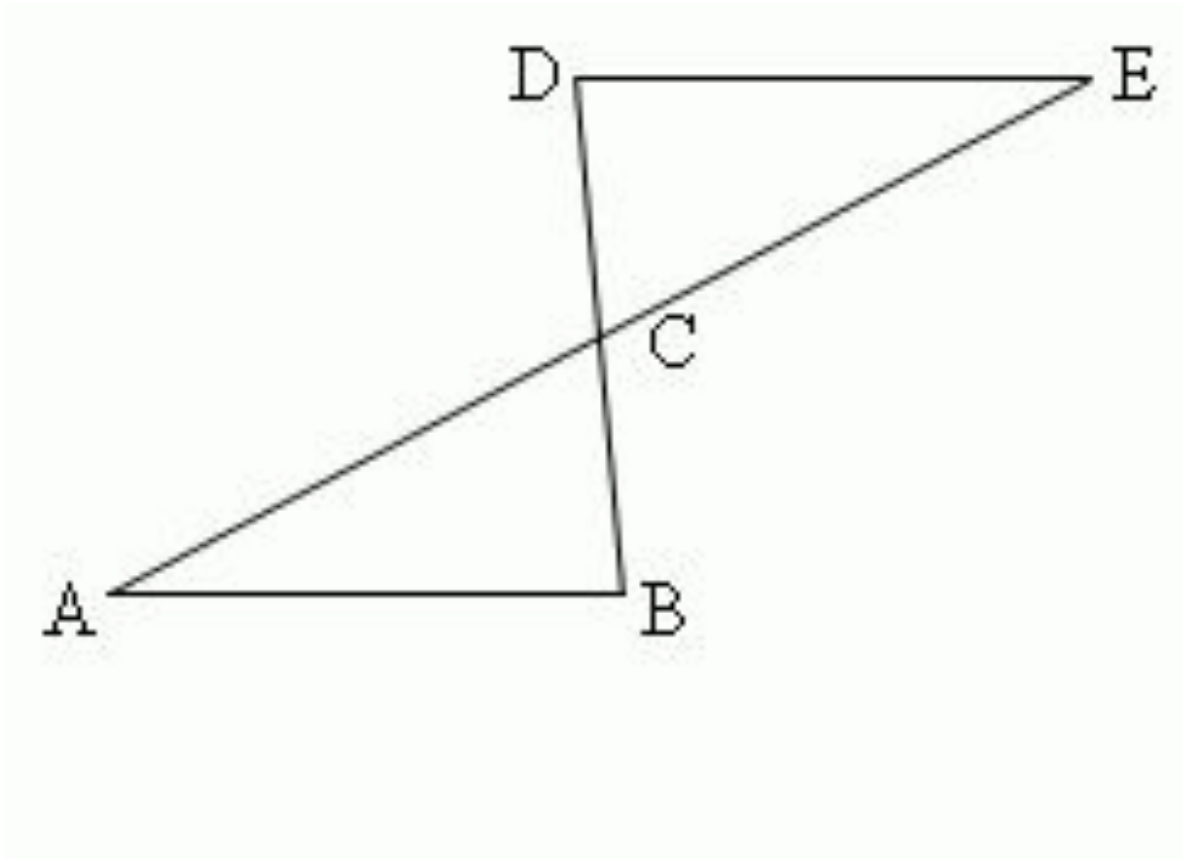


Чи правильно,  
що:

- a. Будь-які дві гомотетичні фігури подібні?
- b. Будь-які дві подібні фігури гомотетичні?
- c. Чи можна вважати рівні фігури подібними? А навпаки?

# Коли це буде ?

За якої умови дві подібні фігури рівні?





**Чи  
подібні:**

- a) Паралелограм із кутом  $40^\circ$  і паралелограм із кутом  $145^\circ$
- b) Ромб із кутом  $120^\circ$  і ромб з діагоналлю, що дорівнює стороні
- c) Чи будуть подібними:
  - 1) два будь-яких квадрати
  - 2) два будь-яких прямокутники
  - 3) два будь-яких кола?

# Тренувальні вправи

1. Позначте точки  $O$  і  $X$ . Побудуйте точку  $X'$ , в яку переходить точка  $X$  при гомотетії з центром  $O$  і коефіцієнтом:

1)  $k=3$       2)  $k = -3$       3)  $k=1/2$

2. Гомотетія точку  $X$  переводить у точку  $X'$ . Побудуйте центр гомотетії, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює:

1) 4;    2) -2;    3) 0,5.

3. Позначте точки  $O$  і  $A$ . Побудуйте точку  $A'$  так, щоб:

1)  $OA' = 3OA$ ; 2)  $OA' = -2OA$ ; 3)  $OA' = 1/3 \cdot OA$ .

4. Гомотетія з центром  $O$  точку  $A$  переводить у точку  $A'$ . Як розміщені точки  $A$  і  $A'$  відносно центра гомотетії, якщо:

1)  $k > 0$       2)  $k < 0$       3)  $k > 1$ ?

# Задача

Знайдіть рівняння кола, в яке переходить коло  $x^2 + y^2 = 4$  внаслідок гомотетії з центром в точці  $O$  і коефіцієнтом гомотетії  $0,5$ .



**Терен № 6**

**Тест - драйв**



# Перетворення подібності та його властивості

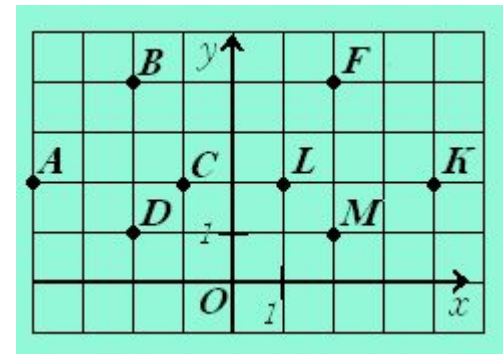
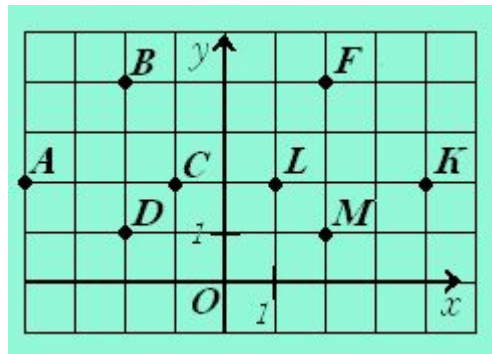
1-варіант

2-варіант

1. Користуючись рисунком, назвіть точку, в яку внаслідок гомотетії з центром  $O$  і коефіцієнтом 2 перейде:

точка  $L$

точка  $M$



А. Точка  $L$

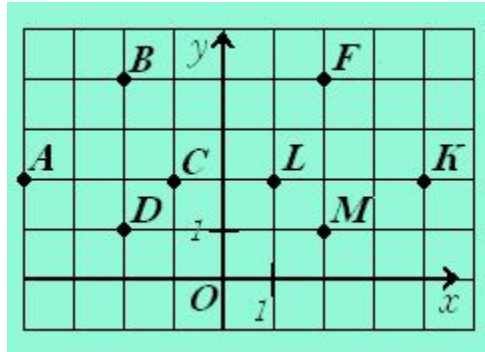
Б. Точка  $M$

В. Точка  $F$

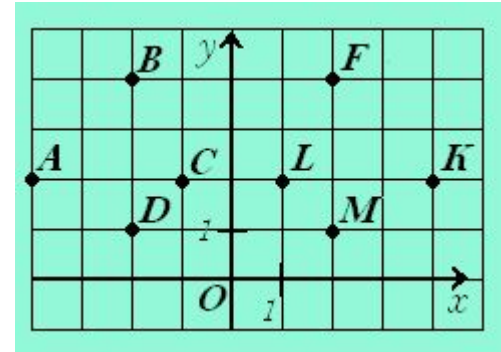
Г. Точка  $K$

2. Користуючись рисунком, визначте пряму, в яку внаслідок гомотетії з центром  $O$  і коефіцієнтом  $0,5$  перейде:

пряма  $FK$



: пряма  $AB$



- А. Пряма  $DL$     Б. Пряма  $CM$     В. Пряма  $DC$     Г. Пряма  $LM$

3. Користуючись рисунком до завдання 2, укажіть трикутник, у який внаслідок гомотетії з центром  $O$  і коефіцієнтом  $2$  перейде:

трикутник  $OSM$

трикутник  $ODL$

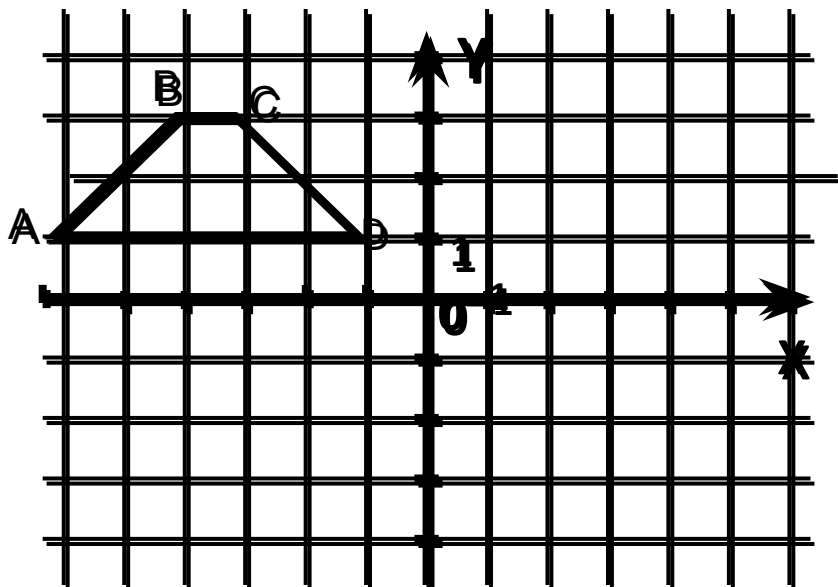
- А.  $\triangle OAK$     Б.  $\triangle OBK$     В.  $\triangle OAF$     Г.  $\triangle OBF$



# Роздатковий матеріал

Варіант 1

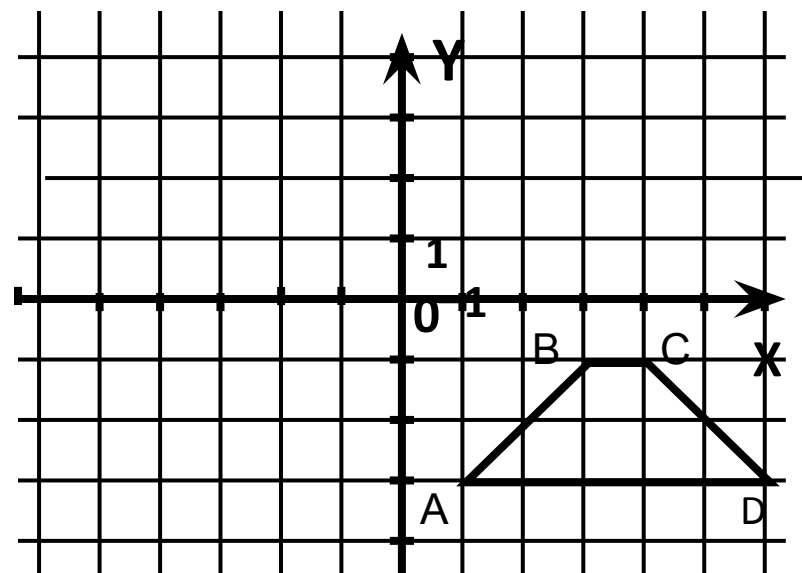
Дано:  $A(-6;1)$ ,  $B(-4;3)$ ,  $C(-3;3)$ ,  $D(-1;1)$



Побудувати образ даної трапеції при гомотетії з центром  $O$  і коефіцієнтом  $k=-1$ .

Варіант 2

Дано:  $A(1;-3)$ ,  $B(3;-1)$ ,  $C(4;-1)$ ,  $D(6;-3)$



Побудувати образ даної трапеції при гомотетії з центром  $O$  і коефіцієнтом  $k=-1$ .

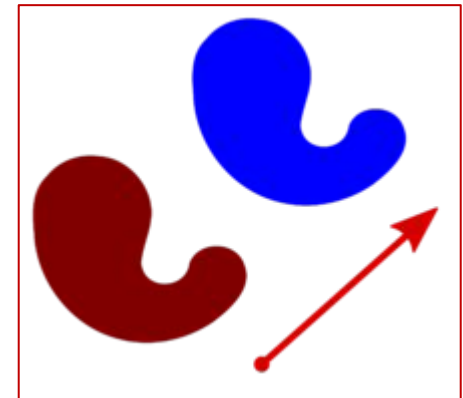
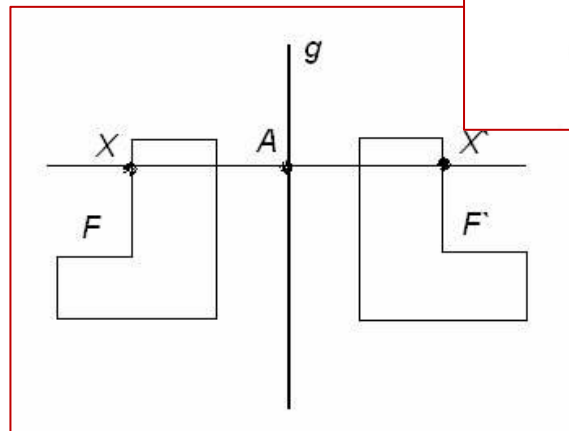
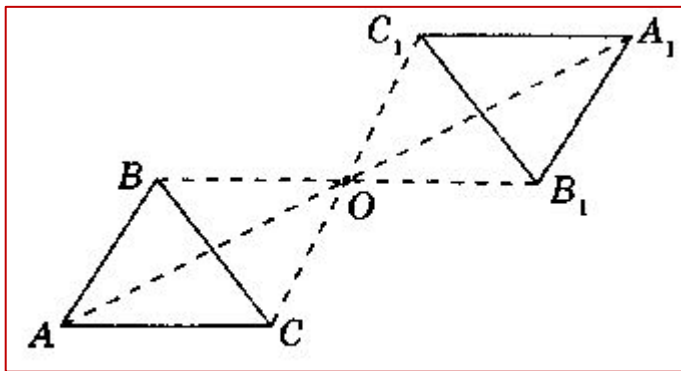
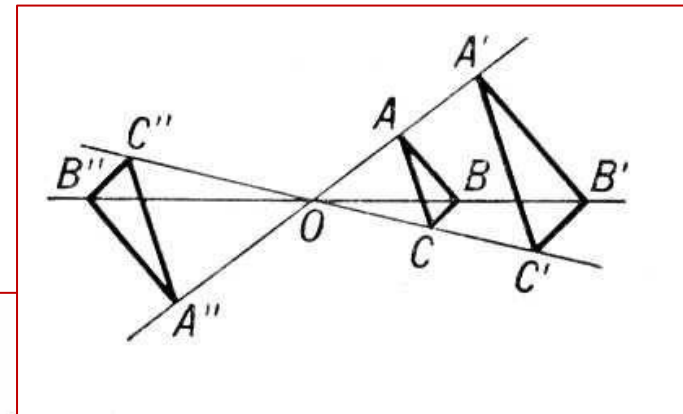
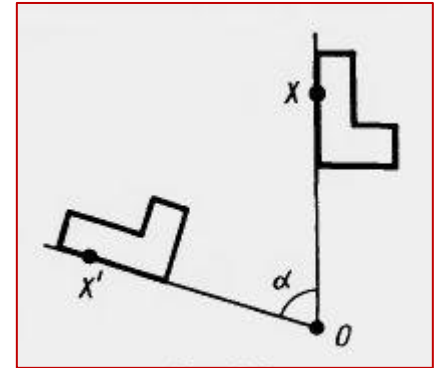
# Терен № 7

**Робимо  
ВИСНОВКИ...**



# Перетворенням подібності є...

- Поворот
- Паралельне перенесення
- Симетрія відносно точки
- Симетрія відносно прямої
- Гомотетія



**Подібність = Гомотетія + рух**

# Які перетворення ви вивчили ?

ПЕРЕТВОРЕННЯ

```
graph TD; A[ПЕРЕТВОРЕННЯ] --> B[РУХ]; A --> C[Подібність]; B --> D[Центральна симетрія]; B --> E[Осьова симетрія]; B --> F[поворот]; B --> G[Паралельне перенесення]; C --> H[Гомотетія]; I[↻]
```

РУХ

Подібність

Центральна  
симетрія

Осьова  
симетрія

поворот

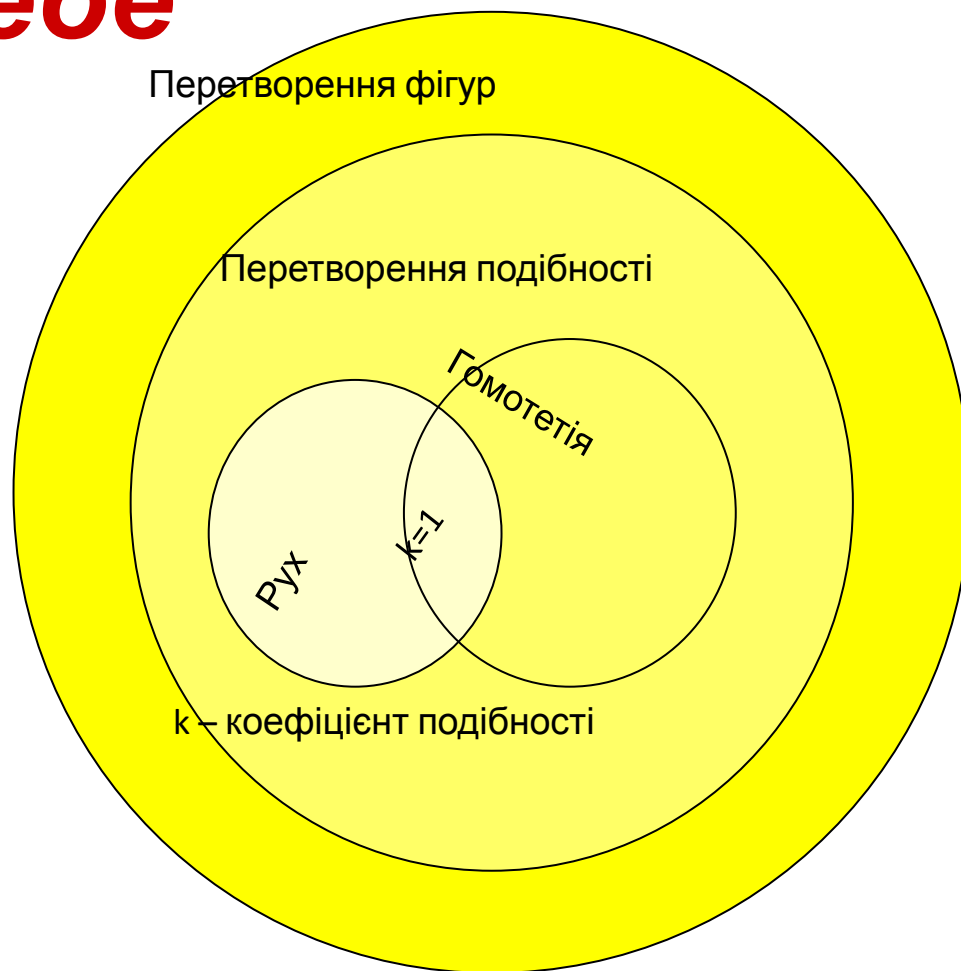
Паралельне  
перенесення

Гомотетія



# Перевір себе

1. Назвіть основні види вивчених перетворень фігур.
2. На кругах Ейлера є інформація про поняття різних видів перетворень фігур. Які з тверджень правильні:
  - а) гомотетія є перетворення подібності;
  - б) перетворення подібності є гомотетія;
  - в) рух є перетворення подібності;
  - г) перетворення подібності є рух?

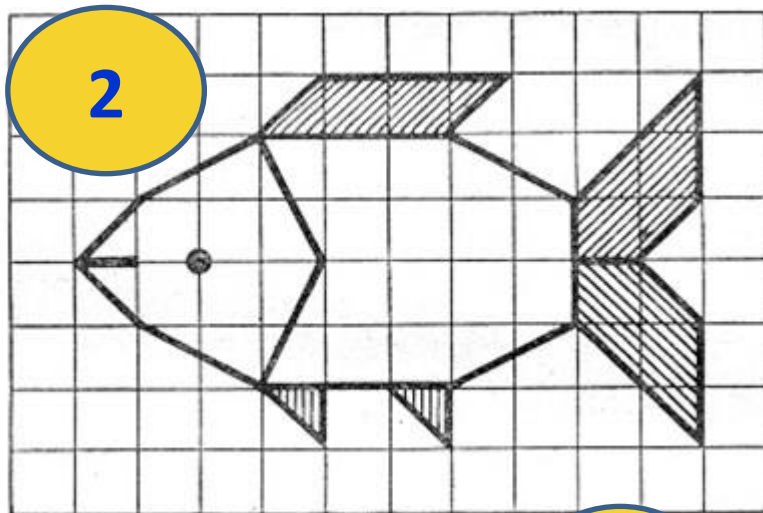


**Відповіді:**

1. **Рух і перетворення подібності.**
2. **а), в).**

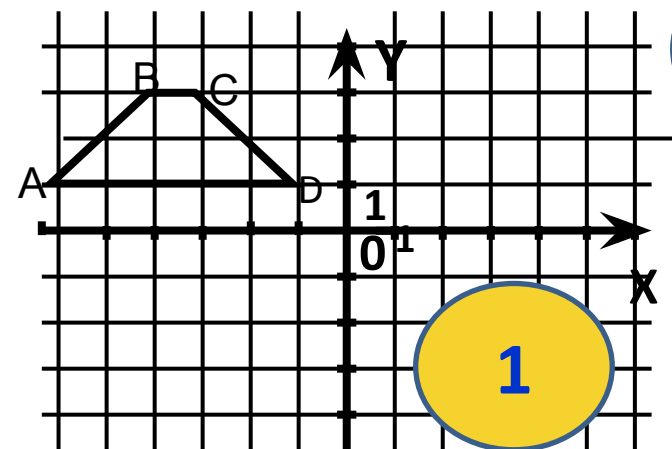
# Пора на перерву...

Теорія  
Апостолова Г.В.  
Параграф 14  
Ст.113



Перетворення  
подібності  $k=2$

Завдання 19(1,2)



Гомотетія з  
коефієнтом 2  
відносно точки А

## Збираємо зірочки...



Мені на згадку приходять  
слова відомого поета  
В. Симоненка:

Ти знаєш, що ти — людина?  
Ти знаєш про це чи ні?  
Усмішка твоя — єдина,  
Мука твоя — єдина,  
Очі твої — одні...

## Загадуємо бажання...

Будьте  
неповторними  
та неподібними  
ні на кого...



# У Новому році бажаю:

- **12** місяців без хвороб
- **53** тижні позитиву
- **365** днів щастя
- **8760** годин успіху
- **525600** хвилин любові
- **31536000** секунд приємних моментів!





**Дякуємо за увагу та позитив!**

