Булева алгебра

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

Перейдем к обозначениям, принятым в булевой записи

$\wedge, \vee$ и $\sim$ → $\cdot, +$ и $'$

$(p \wedge q) \vee \sim r$ → $(p \cdot q) + r'$

$$(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$$

↓

$$(p \cdot q \cdot r') + (p \cdot q' \cdot r) + (p' \cdot q \cdot r')$$

Дж. Буль –основатель логики

Операция, заданная на некотором множестве, называется ***бинарной***, если она действует на два элемента этого множества и её результатом является элемент этого же множества.

Операция, заданная на некотором множестве, называется ***унитарной***, если она действует на один элемент множества и её результатом является элемент этого же множества.

Булева алгебра есть множество B, содержащее специальные элементы 1 и 0, на котором заданы бинарные операции + · ′

Для всех *x, y, z* из *B* должны выполняться аксиомы

а) ***Законы коммутативности***

$$x \cdot y = y \cdot x;$$
$$x + y = y + x.$$

б) ***Законы ассоциативности***

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$
$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

в) ***Законы дистрибутивности***

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z);$$
$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z).$$

г) *Законы тождества*

$$x + 0 = x;$$
$$x \cdot 1 = x.$$

д) *Законы дополнения*

$$x + x' = 1;$$
$$x \cdot x' = 0.$$

1 – единичный элемент (единица),

0 – нулевой элемент (ноль),

x' – дополнение *x*.

Теорема. Для всех элементов *x* и *y* булевой алгебры выполняются соотношения:

а) ***Законы идемпотентности***

$$x + x = x;$$
$$x \cdot x = x.$$

б) ***Свойства констант***

$$x + 1 = 1;$$
$$x \cdot 0 = 0.$$

в) ***Законы поглощения***

$$x + (x \cdot y) = x;$$
$$x \cdot (x + y) = x.$$

Доказательство:

а)	$x + x = (x + x) \cdot 1 =$	свойство констант
	$= (x + x) \cdot (x + x') =$	закон дополнения
	$= x + (x \cdot x') =$	закон дистрибутивности
	$= x + 0 =$	закон дополнения
	$= x;$	закон тождества
б)	$x + 1 = (x + 1) \cdot 1 =$	закон тождества
	$= (x + 1) \cdot (x + x') =$	закон дополнения
	$= x + (1 \cdot x') =$	закон дистрибутивности
	$= x + (x' \cdot 1) =$	закон коммутативности
	$= x + x' =$	закон тождества
	$= 1;$	закон дополнения

Доказательство:

в) $x + (x \cdot y) = (x \cdot 1) + (x \cdot y) =$ закон тождества

$= x \cdot (1 + y) =$ закон дистрибутивности

$= x \cdot (y + 1) =$ закон коммутативности

$= x \cdot 1 =$ свойство констант

$= x.$ закон тождества

Теорема. (Закон единственности дополнения) Дополнение произвольного элемента *x* булевой алгебры единственным образом определяется его свойствами:

если $x + x' = 1$, $x \cdot x' = 0$, $x + x^* = 1$, а $x \cdot x^* = 0$, то $x' = x^*$

Доказательство:

Если $x + x' = 1$ и $x + x^* = 1$, тогда

$x' = x' \cdot 1 =$	закон тождества
$= x' \cdot (x + x^*) =$	задано
$= x' \cdot x + x' \cdot x^* =$	закон дистрибутивности
$= x \cdot x' + x' \cdot x^* =$	закон дополнения
$= 0 + x' \cdot x^* =$	задано
$= x' \cdot x^* + 0 =$	закон коммутативности
$= x' \cdot x^*$	закон тождества

Доказательство:

$$
\begin{aligned}
x^* = x^* \cdot 1 &= && \text{закон тождества}\\
= x^* \cdot (x + x') &= && \text{задано}\\
= x^* \cdot x + x^* \cdot x' &= && \text{закон дистрибутивности}\\
= x \cdot x^* + x' \cdot x^* &= && \text{закон коммутативности}\\
= 0 + x' \cdot x^* &= && \text{задано}\\
= x' \cdot x^* + 0 &= && \text{закон коммутативности}\\
= x' \cdot x^*, & && \text{закон тождества}
\end{aligned}
$$

так что $x^* = x'x^* = x'$.

Теорема. Для всех элементов *x* и *y* булевой алгебры имеют место соотношения:

а) ***Закон инволюции***

$$(x')' = x.$$

б) ***Дополнение законов тождества***

$$0' = 1;$$
$$1' = 0.$$

в) ***Законы де Моргана***

$$(x + y)' = x' \cdot y';$$
$$(x \cdot y)' = x' + y'.$$

Доказательство (а):

$$
\begin{aligned}
x' + x = x + x' &= && \text{закон коммутативности} \\
&= 1; && \text{закон дополнения} \\
x' \cdot x = x \cdot x' &= && \text{закон коммутативности} \\
&= 0. && \text{закон дополнения}
\end{aligned}
$$

x – дополнение *x’* . В соответствии с законом единственности дополнения

$$(x')' = x\,.$$

Каждая теорема обладает двойственностью. Замена

$+$ на $\cdot$, $\cdot$ на $+$, 0 на 1 и 1 на 0

Первый закон де Моргана $(x+y)' = x' \cdot y'$

$$
\begin{aligned}
(x+y)+x'\cdot y' &= ((x+y)+x')\cdot((x+y)+y') = && \text{закон дистрибутивности}\\
&= ((y+x)+x')\cdot((x+y)+y') = && \text{закон коммутативности}\\
&= (y+(x+x'))\cdot(x+(y+y')) = && \text{закон ассоциативности}\\
&= (y+1)\cdot(x+1) = && \text{закон дополнения}\\
&= 1\cdot 1 = && \text{свойство констант}\\
&= 1; && \text{закон тождества}
\end{aligned}
$$

$$(x+y)+x'\cdot y' = 1$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)\cdot(x'\cdot y') &= (x'\cdot y')\cdot(x+y) = && \text{закон коммутативности}\\
&= ((x'\cdot y')\cdot x) + ((x'\cdot y')\cdot y) = && \text{закон дистрибутивности}\\
&= (x\cdot(x'\cdot y')) + ((x'\cdot y')\cdot y) = && \text{закон коммутативности}\\
&= ((x\cdot x')\cdot y') + (x'\cdot(y'\cdot y)) = && \text{закон ассоциативности}\\
&= ((x\cdot x')\cdot y') + (x'\cdot(y\cdot y')) = && \text{закон коммутативности}\\
&= (0\cdot y') + (x'\cdot 0) = && \text{закон дополнения}\\
&= (y'\cdot 0) + (x'\cdot 0) = && \text{закон коммутативности}\\
&= 0+0 = && \text{свойство констант}\\
&= 0. && \text{закон тождества}
\end{aligned}
$$

$$(x+y)\cdot(x'\cdot y') = 0.$$

$$(x+y)' = x'\cdot y'$$

Второй закон де Моргана $(x \cdot y)' = x' + y'$

$$
\begin{array}{llll}
(x \cdot y) \cdot (x' + y') & = & ((x \cdot y) \cdot x') + \cdot((x \cdot y) \cdot y') = & \text{закон дистрибутивности} \\
 & = & ((y \cdot x) \cdot x') + ((x \cdot y) \cdot y') = & \text{закон коммутативности} \\
 & = & (y \cdot (x \cdot x')) + (x \cdot (y \cdot y')) = & \text{закон ассоциативности} \\
 & = & (y \cdot 0) \cdot (x \cdot 0) = & \text{закон дополнения} \\
 & = & 0 \cdot 0 = & \text{свойство констант} \\
 & = & 0; & \text{закон тождества}
\end{array}
$$

$$(x \cdot y) \cdot (x' + y') \quad = \quad 0$$

$$
\begin{aligned}
(x \cdot y) + (x' + y') &= (x' + y') + (x \cdot y) = && \text{закон коммутативности}\\
&= ((x' + y') + x) \cdot ((x' + y') + y) = && \text{закон дистрибутивности}\\
&= (x + (x' + y')) \cdot ((x' + y') + y) = && \text{закон коммутативности}\\
&= ((x + x') + y') \cdot (x' + (y' + y)) = && \text{закон ассоциативности}\\
&= ((x + x') + y') \cdot (x' + (y + y')) = && \text{закон коммутативности}\\
&= (1 + y') \cdot (x' + 1) = && \text{закон дополнения}\\
&= (y' + 1) \cdot (x' + 1) = && \text{закон коммутативности}\\
&= 1 \cdot 1 = && \text{свойство констант}\\
&= 1. && \text{закон тождества}
\end{aligned}
$$

$$(x \cdot y) + (x' + y') = 1$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

Подмножества произвольного множества *A* образуют булеву алгебру

$\cap$ и $\cup$

$A - B$

A

$\varnothing$

$\cdot$ и $+$

B'

1

0

Теорема. Нулевой элемент 0 и единичный элемент 1 определены своими свойствами единственным образом.

Определение. Множество называется ***коконечным***, если его дополнение конечно.

Теорема. Пусть универсальное множество ***U*** есть множество всех конечных и всех коконечных подмножеств множества положительных целых чисел. Подмножество ***U*** вместе с операциями объединения, пересечения и дополнения образуют булеву алгебру.

Последний слайд лекции