
Булева алгебра

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

Перейдем к обозначениям, принятым в булевой записи

\wedge, \vee и \sim

$\cdot, +$ и $'$



$(p \wedge q) \vee \sim r$

$(p \cdot q) + r'$

$(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$



$(p \cdot q \cdot r') + (p \cdot q' \cdot r) + (p' \cdot q \cdot r')$

Дж. Буль –основатель логики

Операция, заданная на некотором множестве, называется **бинарной**, если она действует на два элемента этого множества и её результатом является элемент этого же множества.

Операция, заданная на некотором множестве, называется **унитарной**, если она действует на один элемент множества и её результатом является элемент этого же множества.

Булева алгебра есть множество B , содержащее специальные элементы 1 и 0, на котором заданы бинарные операции $+$ и \cdot .

Для всех x, y, z из B должны выполняться аксиомы

а) Законы коммутативности

$$x \cdot y = y \cdot x;$$

$$x + y = y + x.$$

б) Законы ассоциативности

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

в) Законы дистрибутивности

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z);$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z).$$

г) *Законы тождества*

$$x + 0 = x;$$

$$x \cdot 1 = x.$$

д) *Законы дополнения*

$$x + x' = 1;$$

$$x \cdot x' = 0.$$

1 – единичный элемент (единица),

0 – нулевой элемент (ноль),

x' – дополнение x .

Теорема. Для всех элементов x и y булевой алгебры выполняются соотношения:

а) Законы идемпотентности

$$x + x = x;$$

$$x \cdot x = x.$$

б) Свойства констант

$$x + 1 = 1;$$

$$x \cdot 0 = 0.$$

в) Законы поглощения

$$x + (x \cdot y) = x;$$

$$x \cdot (x + y) = x.$$

Доказательство:

| | |
|---------------------------------------|------------------------|
| a) $x + x = (x + x) \cdot 1 =$ | свойство констант |
| $= (x + x) \cdot (x + x') =$ | закон дополнения |
| $= x + (x \cdot x') =$ | закон дистрибутивности |
| $= x + 0 =$ | закон дополнения |
| $= x;$ | закон тождества |
| | |
| б) $x + 1 = (x + 1) \cdot 1 =$ | закон тождества |
| $= (x + 1) \cdot (x + x') =$ | закон дополнения |
| $= x + (1 \cdot x') =$ | закон дистрибутивности |
| $= x + (x' \cdot 1) =$ | закон коммутативности |
| $= x + x' =$ | закон тождества |
| $= 1;$ | закон дополнения |

Доказательство:

| | |
|---|------------------------|
| $x + (x \cdot y) = (x \cdot 1) + (x \cdot y) =$ | закон тождества |
| $= x \cdot (1 + y) =$ | закон дистрибутивности |
| $= x \cdot (y + 1) =$ | закон коммутативности |
| $= x \cdot 1 =$ | свойство констант |
| $= x.$ | закон тождества |

Теорема. (Закон единственности дополнения) Дополнение произвольного элемента x булевой алгебры единственным образом определяется его свойствами:

если $x + x' = 1$, $x \cdot x' = 0$, $x + x^* = 1$, а $x \cdot x^* = 0$, то $x' = x^*$

Доказательство:

Если $x + x' = 1$ и $x + x^* = 1$, тогда

$$\begin{aligned}x' &= x' \cdot 1 = && \text{закон тождества} \\&= x' \cdot (x + x^*) = && \text{задано} \\&= x' \cdot x + x' \cdot x^* = && \text{закон дистрибутивности} \\&= x \cdot x' + x' \cdot x^* = && \text{закон дополнения} \\&= 0 + x' \cdot x^* = && \text{задано} \\&= x' \cdot x^* + 0 = && \text{закон коммутативности} \\&= x' \cdot x^* && \text{закон тождества}\end{aligned}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}x^* &= x^* \cdot 1 = && \text{закон тождества} \\ &= x^* \cdot (x + x') = && \text{задано} \\ &= x^* \cdot x + x^* \cdot x' = && \text{закон дистрибутивности} \\ &= x \cdot x^* + x' \cdot x^* = && \text{закон коммутативности} \\ &= 0 + x' \cdot x^* = && \text{задано} \\ &= x' \cdot x^* + 0 = && \text{закон коммутативности} \\ &= x' \cdot x^*, && \text{закон тождества}\end{aligned}$$

так что $x^* = x'x^* = x'$.

Теорема. Для всех элементов x и y булевой алгебры имеют место соотношения:

а) *Закон инволюции*

$$(x')' = x.$$

б) *Дополнение законов тождества*

$$0' = 1;$$

$$1' = 0.$$

в) *Законы де Моргана*

$$(x + y)' = x' \cdot y';$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'.$$

Доказательство (а):

$$x' + x = x + x' = 1;$$

закон коммутативности
закон дополнения

$$x' \cdot x = x \cdot x' = 0.$$

закон коммутативности
закон дополнения

x – дополнение x' . В соответствии с законом единственности дополнения

$$(x')' = x.$$

Каждая теорема обладает двойственностью.

Замена

+ на ·, · на +, 0 на 1 и 1 на 0

Первый закон де Моргана

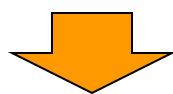
$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

| | | | | |
|-------------------------|--------------------|------------------------|-----|------------------------|
| $(x + y) + x' \cdot y'$ | $= ((x + y) + x')$ | $\cdot ((x + y) + y')$ | $=$ | закон дистрибутивности |
| | $= ((y + x) + x')$ | $\cdot ((x + y) + y')$ | $=$ | закон коммутативности |
| | $= (y + (x + x'))$ | $\cdot (x + (y + y'))$ | $=$ | закон ассоциативности |
| | $= (y + 1)$ | $\cdot (x + 1)$ | $=$ | закон дополнения |
| | $= 1 \cdot 1$ | | $=$ | свойство констант |
| | $= 1$ | | $=$ | закон тождества |

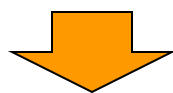


$$(x + y) + x' \cdot y' = 1$$

| | | | | |
|-------------------------------|-----|---|-----|------------------------|
| $(x + y) \cdot (x' \cdot y')$ | $=$ | $(x' \cdot y') \cdot (x + y)$ | $=$ | закон коммутативности |
| | $=$ | $((x' \cdot y') \cdot x) + ((x' \cdot y') \cdot y)$ | $=$ | закон дистрибутивности |
| | $=$ | $(x \cdot (x' \cdot y')) + ((x' \cdot y') \cdot y)$ | $=$ | закон коммутативности |
| | $=$ | $((x \cdot x') \cdot y') + (x' \cdot (y' \cdot y))$ | $=$ | закон ассоциативности |
| | $=$ | $((x \cdot x') \cdot y') + (x' \cdot (y \cdot y'))$ | $=$ | закон коммутативности |
| | $=$ | $(0 \cdot y') + (x' \cdot 0)$ | $=$ | закон дополнения |
| | $=$ | $(y' \cdot 0) + (x' \cdot 0)$ | $=$ | закон коммутативности |
| | $=$ | $0 + 0$ | $=$ | свойство констант |
| | $=$ | $0.$ | $=$ | закон тождества |



$$(x + y) \cdot (x' \cdot y') = 0.$$



$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

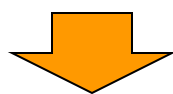
Второй закон де Моргана $(x \cdot y)' = x' + y'$

| | | | | |
|-------------------------------|-----|---|-----|------------------------|
| $(x \cdot y) \cdot (x' + y')$ | $=$ | $((x \cdot y) \cdot x') + ((x \cdot y) \cdot y')$ | $=$ | закон дистрибутивности |
| | $=$ | $((y \cdot x) \cdot x') + ((x \cdot y) \cdot y')$ | $=$ | закон коммутативности |
| | $=$ | $(y \cdot (x \cdot x')) + (x \cdot (y \cdot y'))$ | $=$ | закон ассоциативности |
| | $=$ | $(y \cdot 0) \cdot (x \cdot 0)$ | $=$ | закон дополнения |
| | $=$ | $0 \cdot 0$ | $=$ | свойство констант |
| | $=$ | 0 | $=$ | закон тождества |

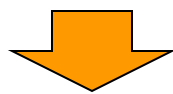


$$(x \cdot y) \cdot (x' + y') = 0$$

| | | | | |
|---------------------------|-----|---|-----|------------------------|
| $(x \cdot y) + (x' + y')$ | $=$ | $(x' + y') + (x \cdot y)$ | $=$ | закон коммутативности |
| | $=$ | $((x' + y') + x) \cdot ((x' + y') + y)$ | $=$ | закон дистрибутивности |
| | $=$ | $(x + (x' + y')) \cdot ((x' + y') + y)$ | $=$ | закон коммутативности |
| | $=$ | $((x + x') + y') \cdot (x' + (y' + y))$ | $=$ | закон ассоциативности |
| | $=$ | $((x + x') + y') \cdot (x' + (y + y'))$ | $=$ | закон коммутативности |
| | $=$ | $(1 + y') \cdot (x' + 1)$ | $=$ | закон дополнения |
| | $=$ | $(y' + 1) \cdot (x' + 1)$ | $=$ | закон коммутативности |
| | $=$ | $1 \cdot 1$ | $=$ | свойство констант |
| | $=$ | 1 | $=$ | закон тождества |

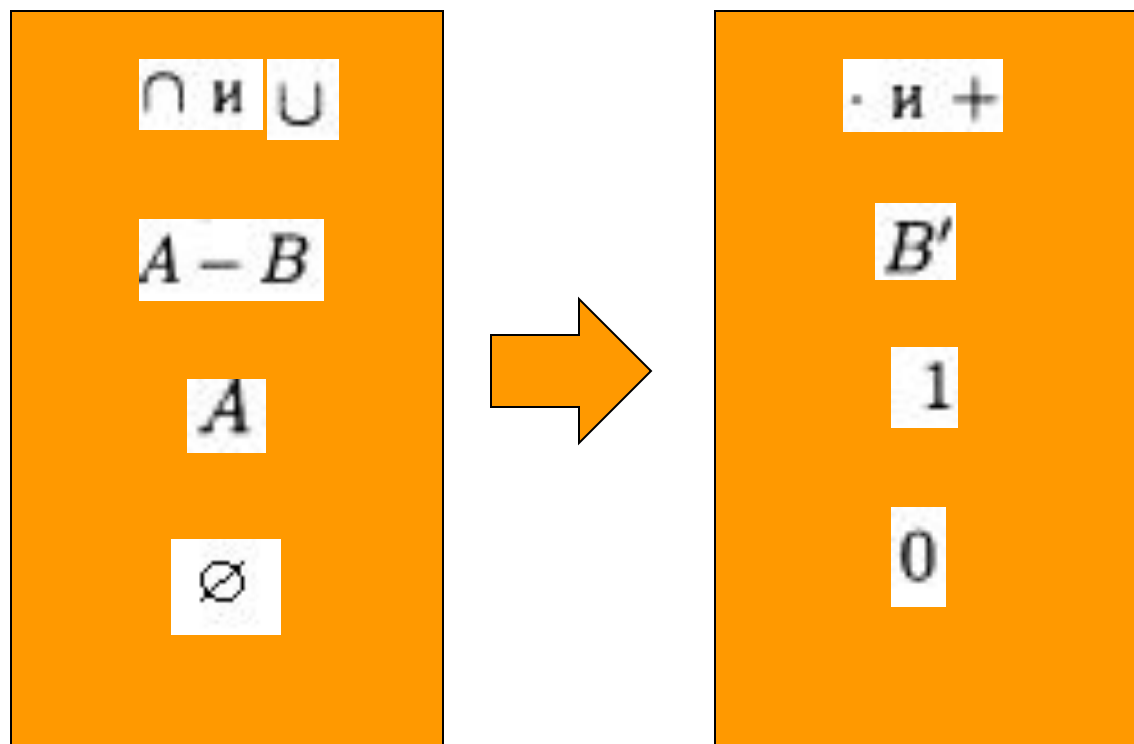


$$(x \cdot y) + (x' + y') = 1$$



$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

Подмножества произвольного множества A образуют
булеву алгебру



Теорема. Нулевой элемент 0 и единичный элемент 1 определены своими свойствами единственным образом.

Определение. Множество называется *кoкoнечным*, если его дополнение конечно.

Теорема. Пусть универсальное множество U есть множество всех конечных и всех кoкoнечных подмножеств множества положительных целых чисел. Подмножество U вместе с операциями объединения, пересечения и дополнения образуют булеву алгебру.

Последний слайд лекции
