СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Лекция № 2

«СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА»

Ведущий преподаватель: канд. техн. наук, доцент кафедры ИУТС Альчаков Василий Викторович

2 Спектральный анализ

Постановка задачи

- Для зашумленного полигармонического сигнала получить спектральное представление – **определить состав сигнала**
- Избавиться от шумов – **реализовать простейший цифровой фильтр**

Получение зашумленного сигнала

wgn

R2016b

Generate white Gaussian noise

collapse all in page

Syntax

```
y = wgn(m,n,p)
y = wgn(m,n,p,imp)
y = wgn(m,n,p,imp,state)
y = wgn(...,powertype)
y = wgn(...,outputtype)
```

Description

`y = wgn(m,n,p)` generates an `m`-by-`n` matrix of white Gaussian noise. `p` specifies the power of `y` in decibels relative to a watt. The default load impedance is 1 ohm.

3 Спектральный анализ

Получение зашумленного сигнала

awgn

R2016b

Add white Gaussian noise to signal

collapse all in page

Syntax

```
y = awgn(x,snr)
y = awgn(x,snr,sigpower)
y = awgn(x,snr,'measured')
y = awgn(x,snr,sigpower,s)
y = awgn(x,snr,'measured',state)
y = awgn(...,powertype)
```

Description

`y = awgn(x,snr)` adds white Gaussian noise to the vector signal `x`. The scalar `snr` specifies the signal-to-noise ratio per sample, in dB. If `x` is complex, `awgn` adds complex noise. This syntax assumes that the power of `x` is 0 dBW.

4 Спектральный анализ

Получение зашумленного сигнала

randn

R2016b

Normally distributed random numbers

collapse all in page

Syntax

```
X = randn
X = randn(n)
X = randn(sz1,...,szN)
X = randn(sz)

X = randn(__,typename)
X = randn(__,'like',p)
```

Description

`X = randn` returns a random scalar drawn from the standard normal distribution.

example

Even-Length Input with Sample Rate

Obtain the periodogram for an even-length signal sampled at 1 kHz using both `fft` and `periodogram`. Compare the results.

Create a signal consisting of a 100 Hz sine wave in *N*(0,1) additive noise. The sampling frequency is 1 kHz. The signal length is 1000 samples. Use the default settings of the random number generator for reproducible results.

```
rng default
Fs = 1000;
t = 0:1/Fs:1-1/Fs;
x = cos(2*pi*100*t) + randn(size(t));
```

5 Спектральный анализ

Получение зашумленного сигнала

```
%% Polyharmonic generator
t = 0:T:(N - 1)*T;

sinSum = 0;
for i=1:Fcount
    sinSum = sinSum + sin(2*pi*f(i)*t);
end
% Bringing to a predetermined amplitude
sinSum = sinSum*A/Fcount;
sinSumN = sinSum + wgn(1,length(sinSum), 1)/35;
sinSumN = awgn(sinSum, 35);
sinSumN = sinSum + randn(1,length(sinSum), 1)/35;
% Visualization
plot(t, sinSumN, '-r', t, sinSum, '-b', 'LineWidth', 2)
xlim([min(t) max(t)])
grid on
```

5 Спектральный анализ

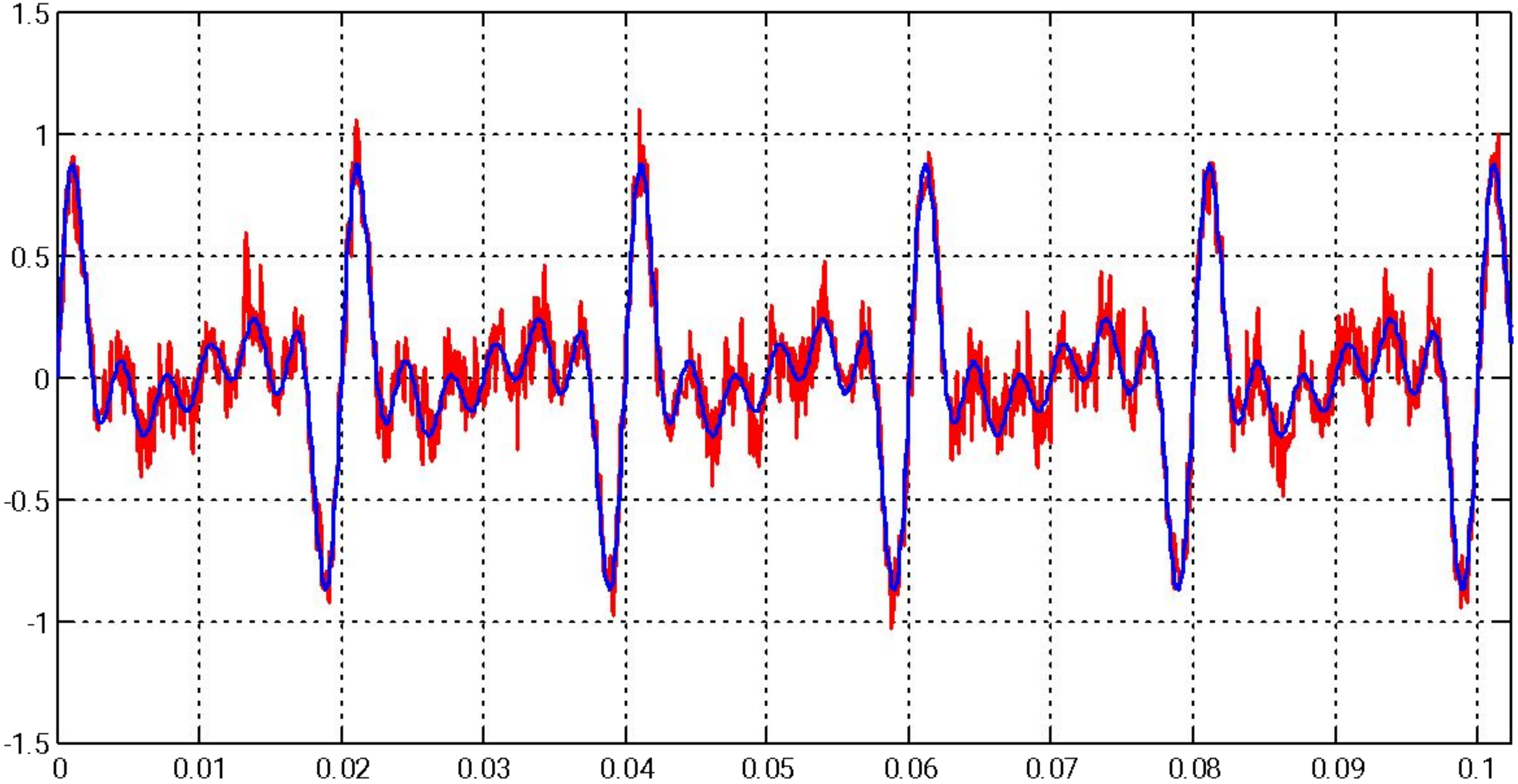
Получение зашумленного сигнала

```
%% Polyharmonic generator
t = 0:T:(N - 1)*T;

sinSum = 0;
for i=1:Fcount
    sinSum = sinSum + sin(2*pi*f(i)*t);
end
% Bringing to a predetermined amplitude
sinSum = sinSum*A/Fcount;
sinSumN = sinSum + wgn(1,length(sinSum), 1)/35;
sinSumN = awgn(sinSum, 35);
sinSumN = sinSum + randn(1,length(sinSum), 1)/35;
% Visualization
plot(t, sinSumN, '-r', t, sinSum, '-b', 'LineWidth', 2)
xlim([min(t) max(t)])
grid on
```

7 Спектральный анализ

Получение зашумленного сигнала



Преобразование Фурье

Краткие теоретические сведения

Сигнал $s_T(t)$ называется периодическим, если все его значения повторяются через промежутки времени, кратные T, где T – период повторения сигнала, $k \in Z$. Такой сигнал можно разложить в гармонический ряд Фурье:

$$s_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos 2\pi n F_1 t + b_n \cdot \sin 2\pi n F_1 t), \qquad (1)$$

где A_0 – постоянная составляющая сигнала, определяемая выражением

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t)\,dt = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} s_T(t)\,dt. \qquad (2)$$

Частота первой гармоники F_1 обратно пропорциональна периоду сигнала

$$F_1 = \frac{1}{T}. \qquad (3)$$

Коэффициенты ряда Фурье a_n и b_n определяются выражениями:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) \cdot \cos(2\pi n F_1 t)\,dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) \cdot \sin(2\pi n F_1 t)\,dt. \qquad (4)$$

Преобразование Фурье

Зависимость коэффициентов $\{A_0, a_n, b_n\}$ от частоты называют гармоническим спектром периодического сигнала в квадратурной форме. Эта зависимость изображается в виде дискретной функции частоты для значений $f = n{\cdot}F_1$, $n = 1, 2, \ldots \infty$. Коэффициент A_0 определен при $f = 0$. Если функция сигнала $s(t)$ чётная, то коэффициенты $b_n = 0$, если нёчетная, то $a_n = 0$.

Периодический сигнал $s_T(t)$ также можно представить в амплитудно-фазовой форме ряда Фурье:

$$s_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(2\pi n F_1 t + \varphi_n), \qquad (5)$$

где A_n – амплитуда n-й гармоники периодического сигнала, определяемая по формуле

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad (6)$$

φ_n – начальная фаза n-й гармоники периодического сигнала

$$\varphi_n = \begin{cases} -arctg\dfrac{b_n}{a_n}, & a_n > 0, \\ -arctg\dfrac{b_n}{a_n} \pm \pi, & a_n < 0, \end{cases} \qquad (7)$$

$n{\cdot}F_1$ – частота n-й гармоники периодического сигнала.

Спектральный анализ

Преобразование Фурье

Зависимость амплитуд гармоник периодического сигнала от частоты называется односторонним амплитудным спектром, а зависимость начальной фазы гармоник от частоты называется односторонним фазовым спектром сигнала. Обе зависимости определены для значений частоты $f = n{\cdot}F_1$, $n = 1, 2, \dots \infty$. Общий вид этих зависимостей приведен на рис. 1.

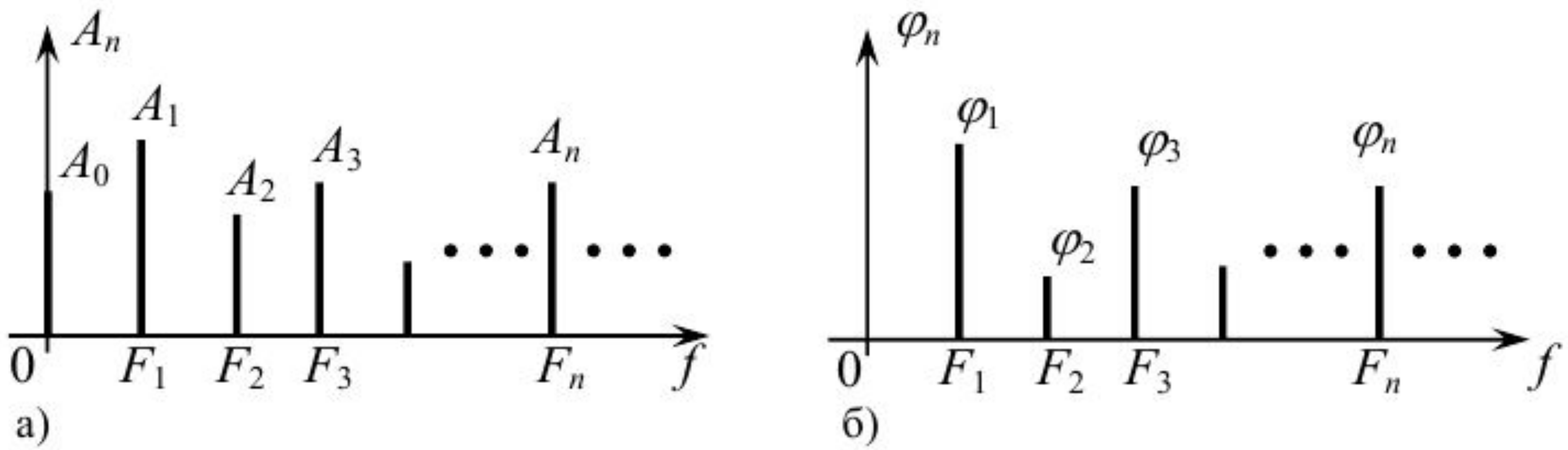
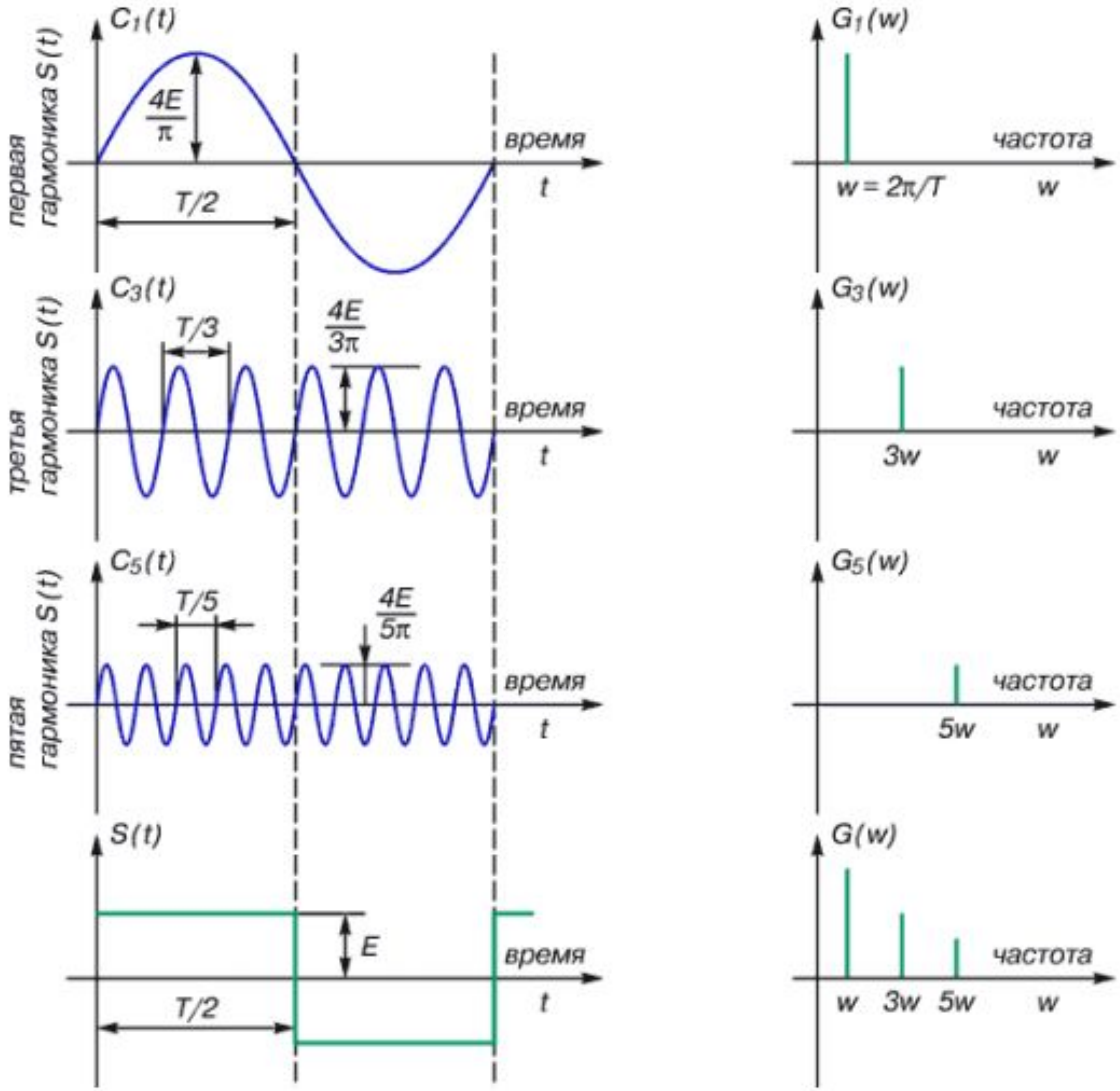


Рис. 1. Односторонний спектр периодического сигнала:
а) – амплитудный спектр, б) – фазовый спектр

Для расчета односторонних спектров необходимо знать аналитическое выражение сигнала $s(t)$. Тогда по формуле (2) вычисляется постоянная составляющая сигнала A_0, по формуле (3) – частота первой гармоники F_1, по формулам (4) – коэффициенты a_n и b_n, по формулам (6) и (7) – амплитуды и начальные фазы гармоник сигнала.

Спектральный анализ

Преобразование Фурье



Спектральный анализ

Преобразование Фурье

fft

R2016b

Fast Fourier transform

collapse all in page

Syntax

```
Y = fft(X)
Y = fft(X,n)
Y = fft(X,n,dim)
```

example

example

example

Description

example

`Y = fft(X)` computes the discrete Fourier transform (DFT) of `X` using a fast Fourier transform (FFT) algorithm.

- If `X` is a vector, then `fft(X)` returns the Fourier transform of the vector.
- If `X` is a matrix, then `fft(X)` treats the columns of `X` as vectors and returns the Fourier transform of each column.

Спектральный анализ

Преобразование Фурье

```
%% Fourie
FsinSum = fft(sinSum);
FsinSumN = fft(sinSumN);
```

Variables - FsinSum

FsinSum

FsinSum <1x1024 complex double>

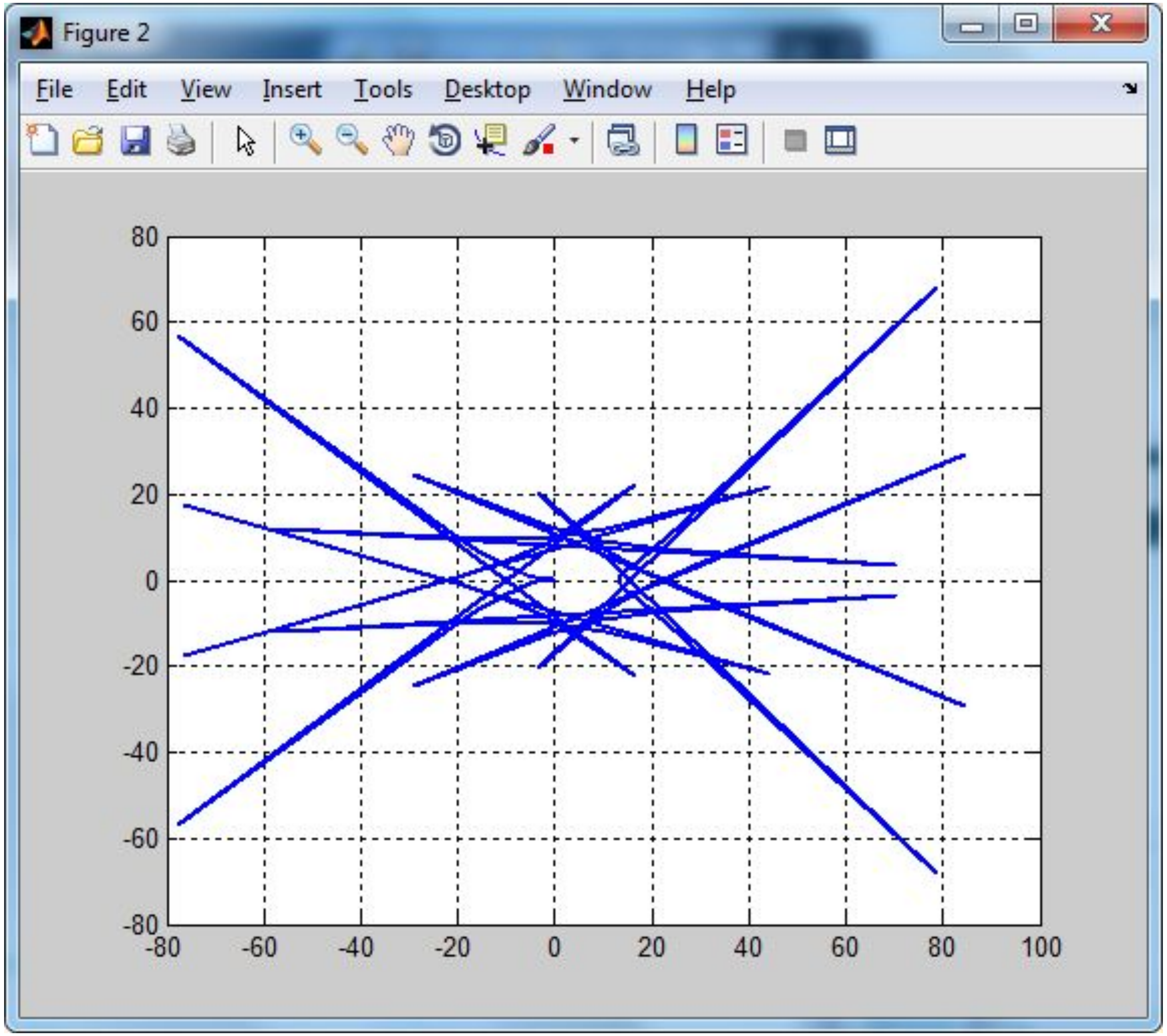
	1	2	3	4	5	6
1	13.1431 + 0.0000i	13.1990 - 0.3667i	13.3714 - 0.7544i	13.6747 - 1.1884i	14.1382 - 1.7039i	14.8154 - 2....
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

Workspace

Name	Value	Min	Max
A	1	1	1
F0	100	100	100
Fcount	5	5	5
FsinSum	<1x1024 complex do...	-0.0810	78.669...
N	1024	1024	1024
T	1.0000e-04	1.0000...	1.0000...
dF	50	50	50
f	[100,150,200,250,300]	100	300
i	5	5	5
sinSum	<1x1024 double>	-0.8689	0.8689
sinSumN	<1x1024 double>	-0.8899	0.9174
t	<1x1024 double>	0	0.1023

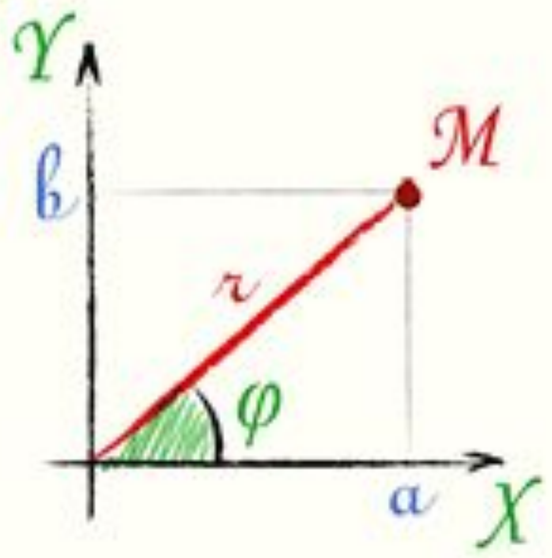
Спектральный анализ

Преобразование Фурье



15 Спектральный анализ

Амплитудный спектр АЧХ



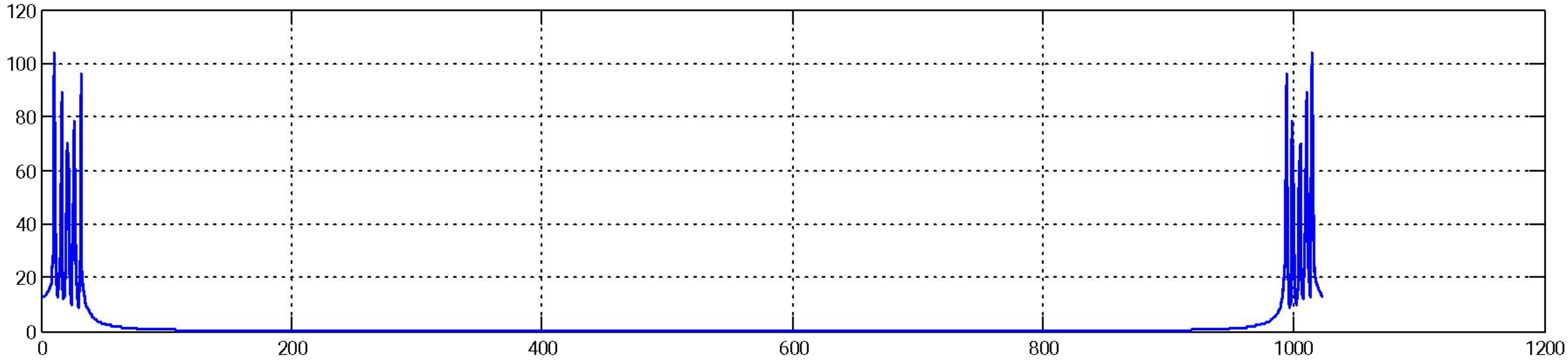
Длина вектора, изображающего комплексное число, называется **модулем комплексного числа**. Модуль любого комплексного числа, не равного нулю, есть положительное число. Модуль комплексного числа $a + b \cdot i$ обозначается $|a + b \cdot i|$, а также буквой r. Из чертежа видно, что:

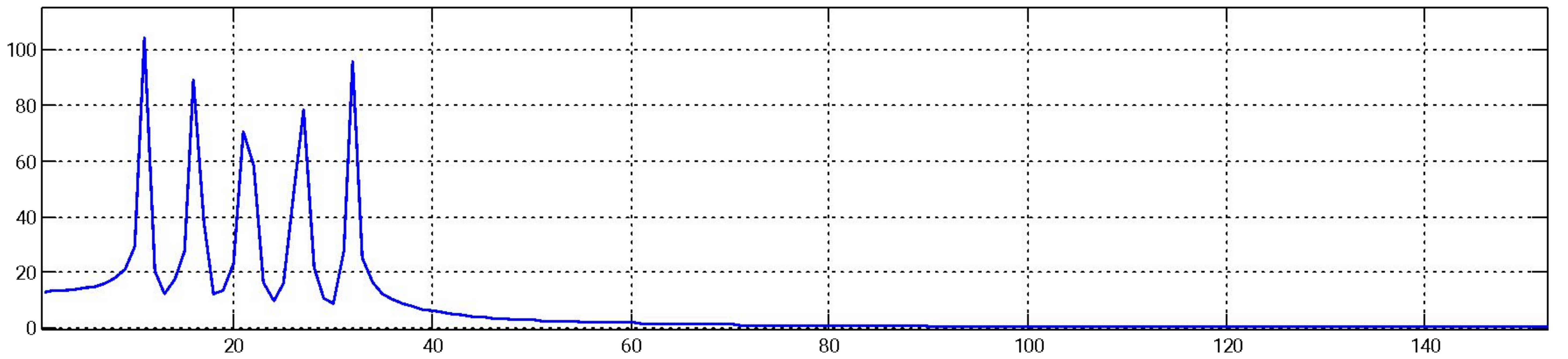
1. $$r = |a + b \cdot i| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

```
AFsinSum = abs(FsinSum);
AFsinSumN = abs(FsinSumN);
```

Спектральный анализ

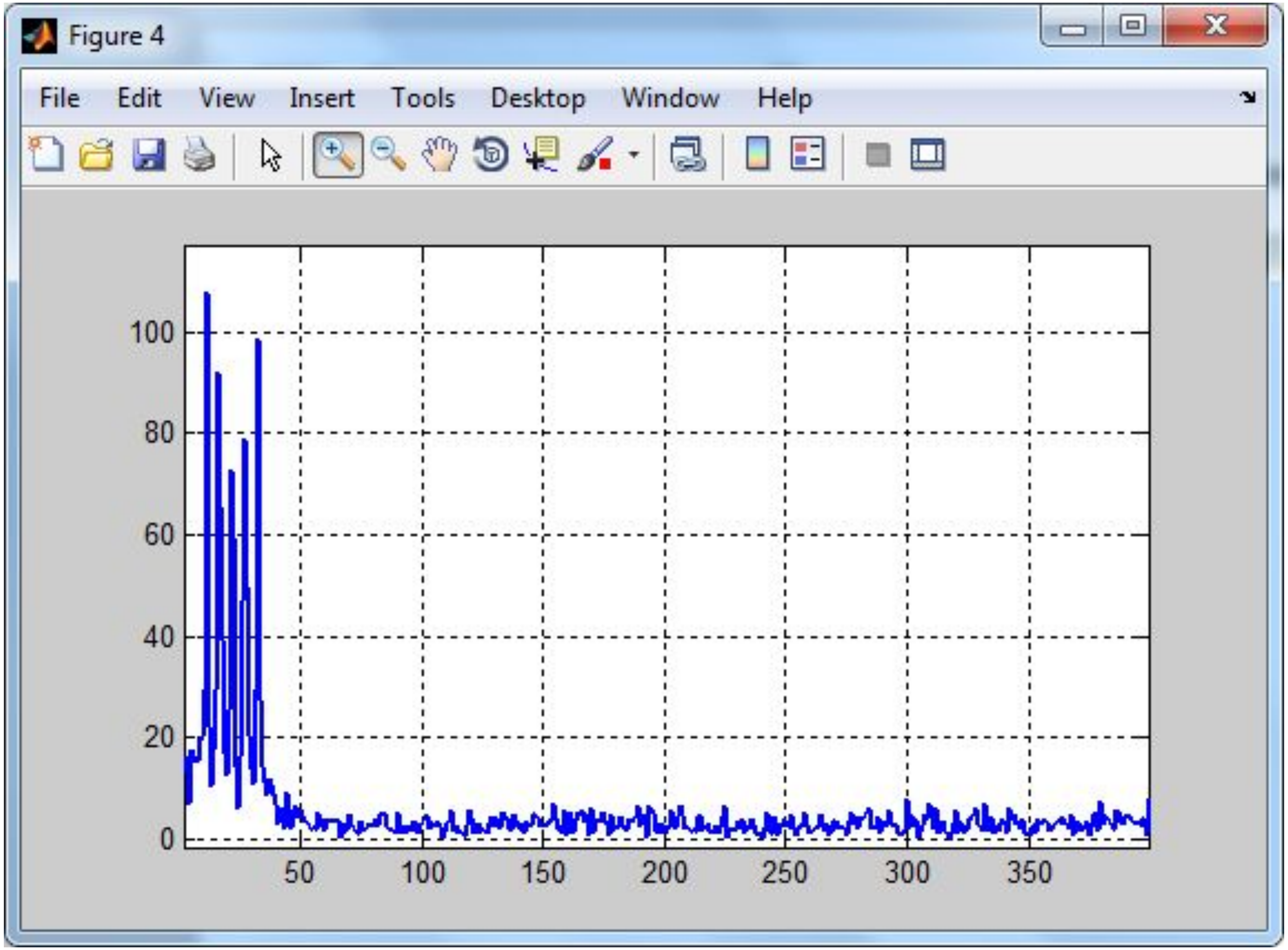
Амплитудный спектр АЧХ





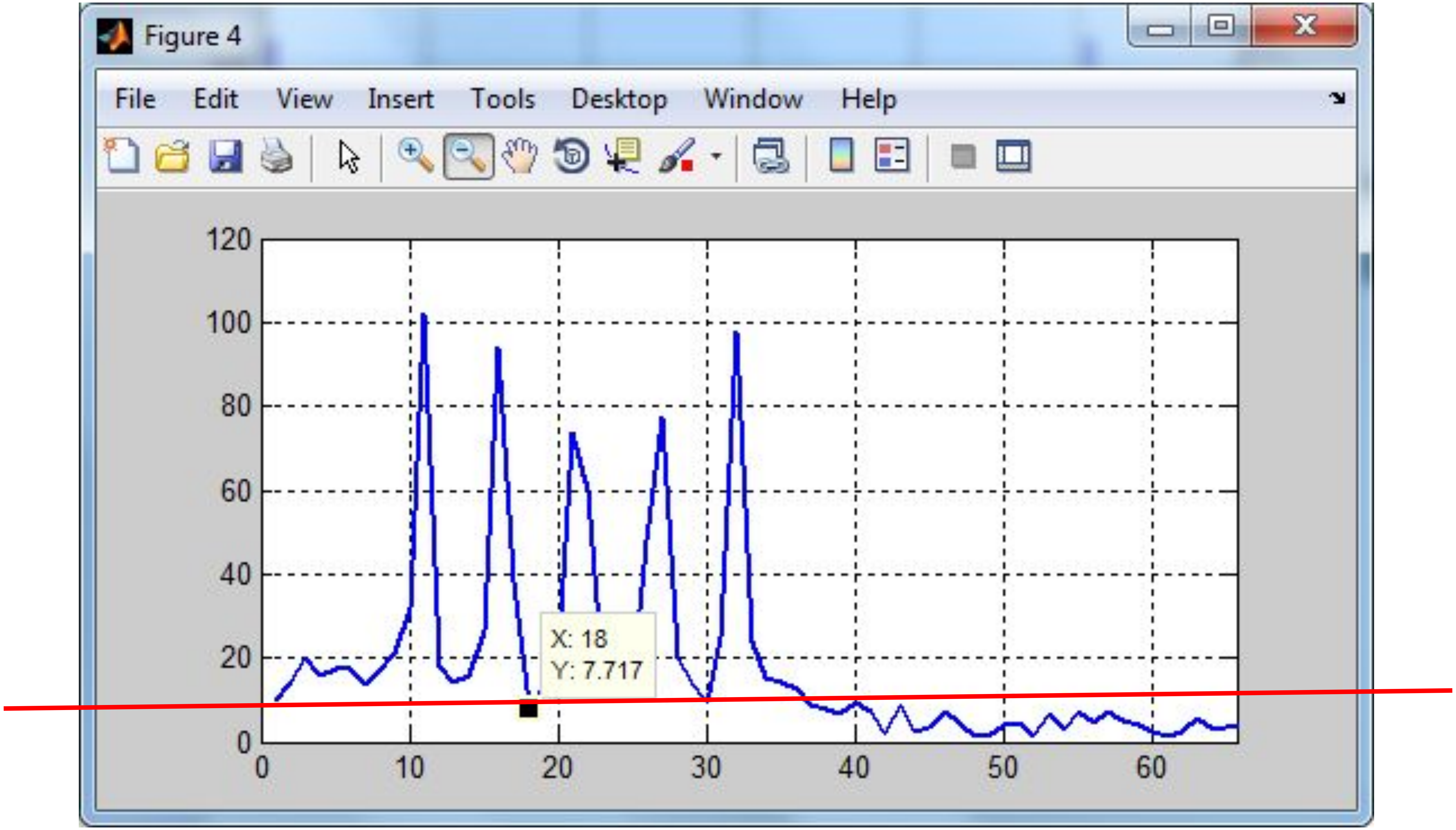
Спектральный анализ

Амплитудный спектр АЧХ (сигнал + шум)



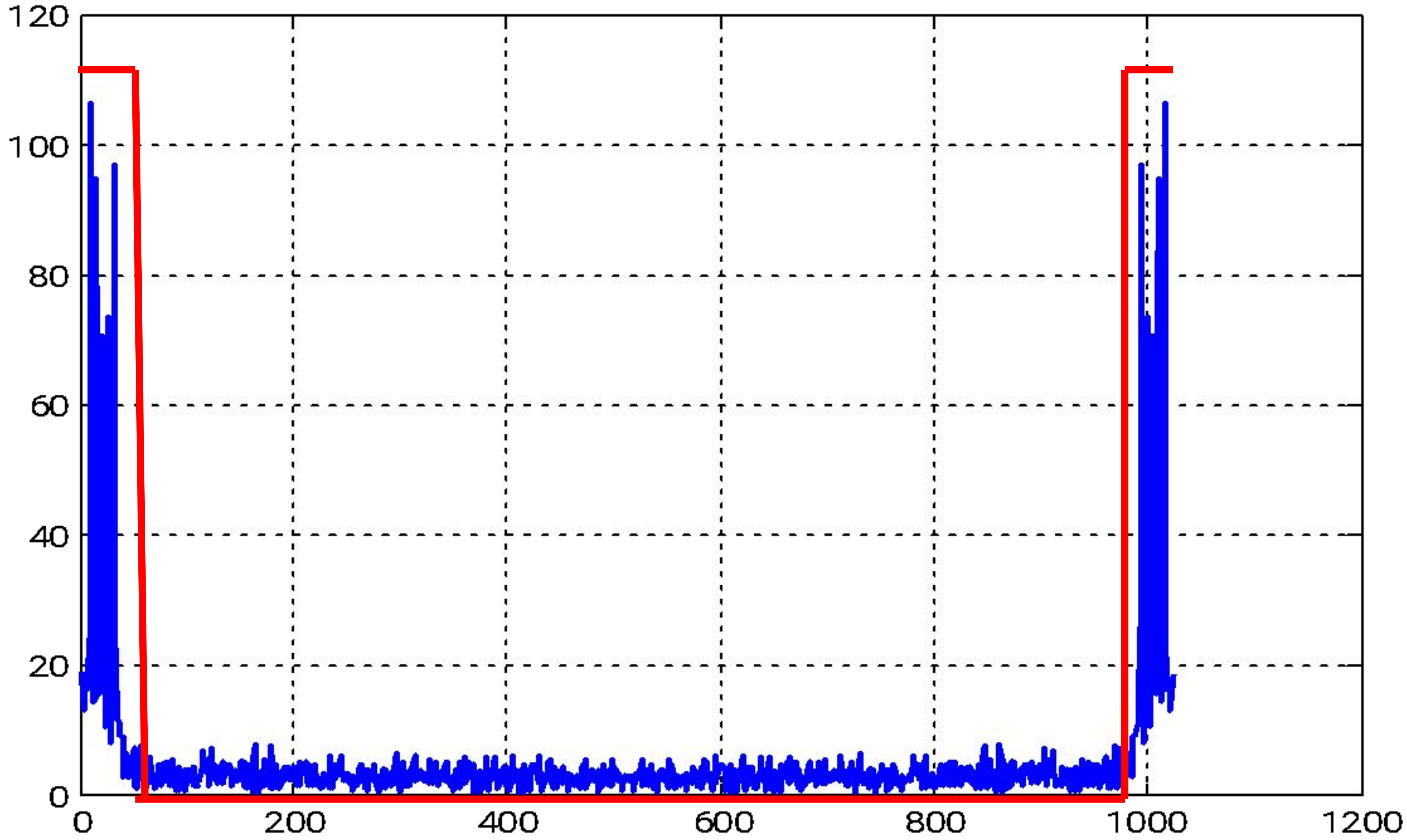
Спектральный анализ

Простейший цифровой фильтр



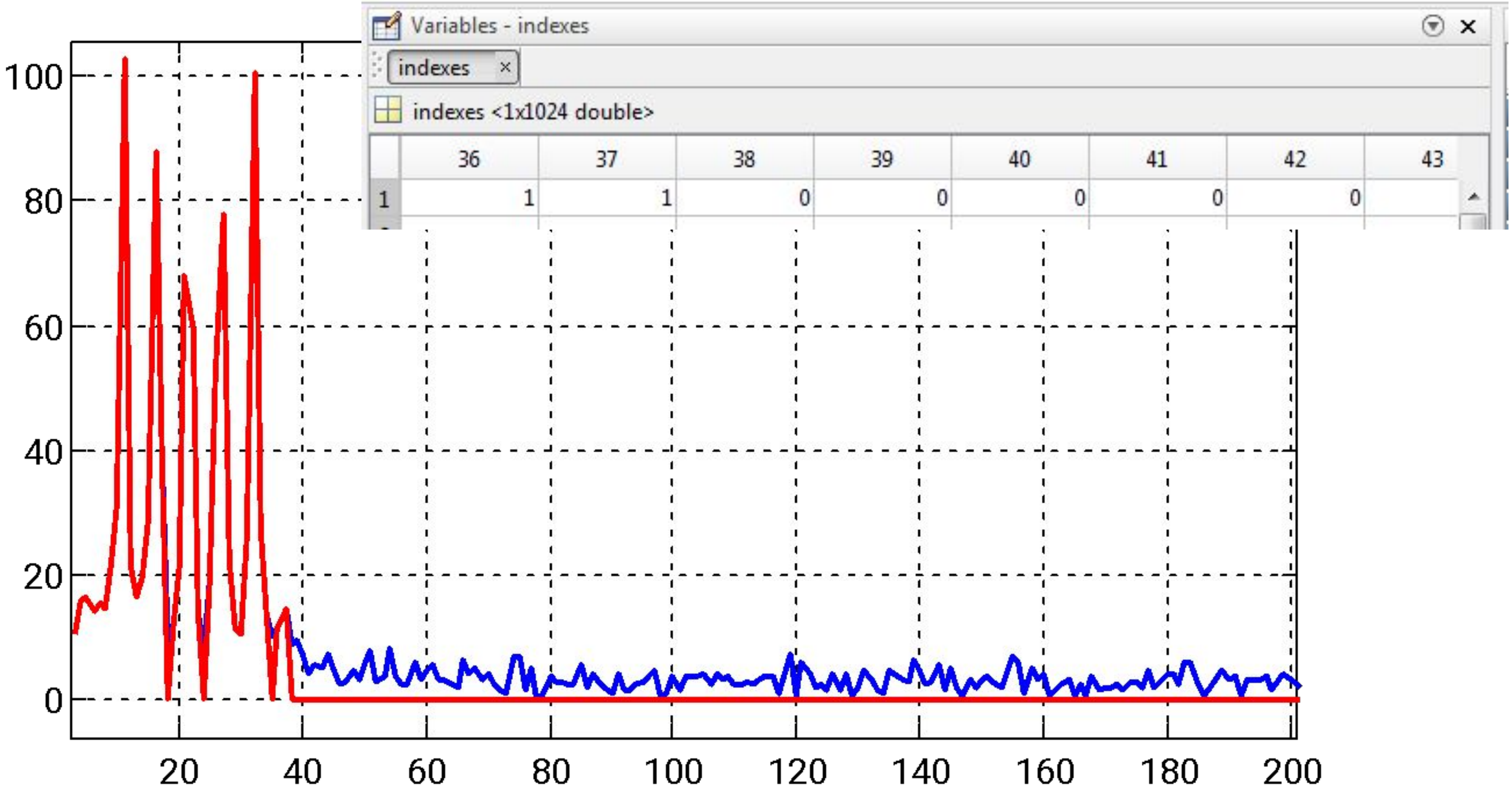
Спектральный анализ

Простейший цифровой фильтр



Спектральный анализ

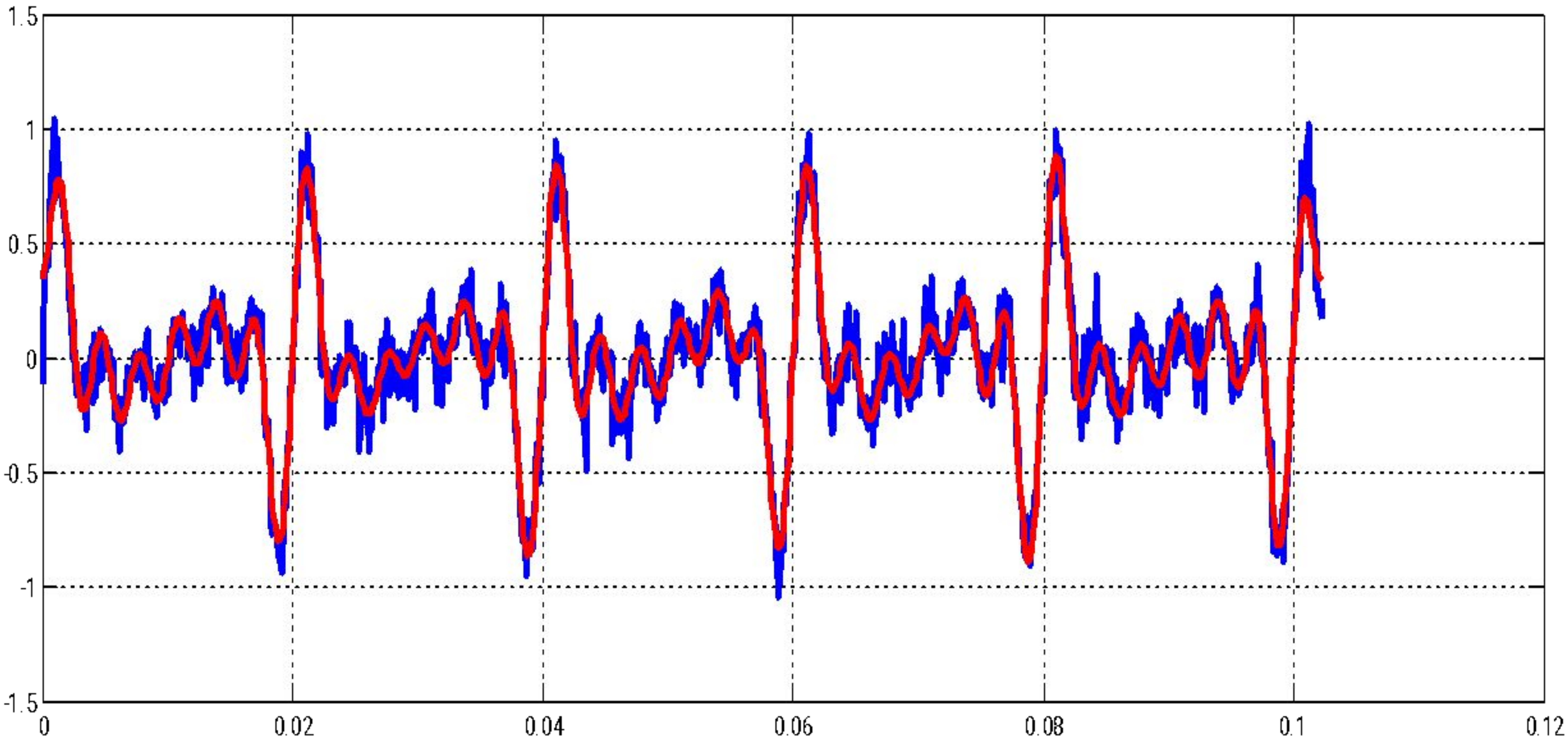
Простейший цифровой фильтр



Спектральный анализ

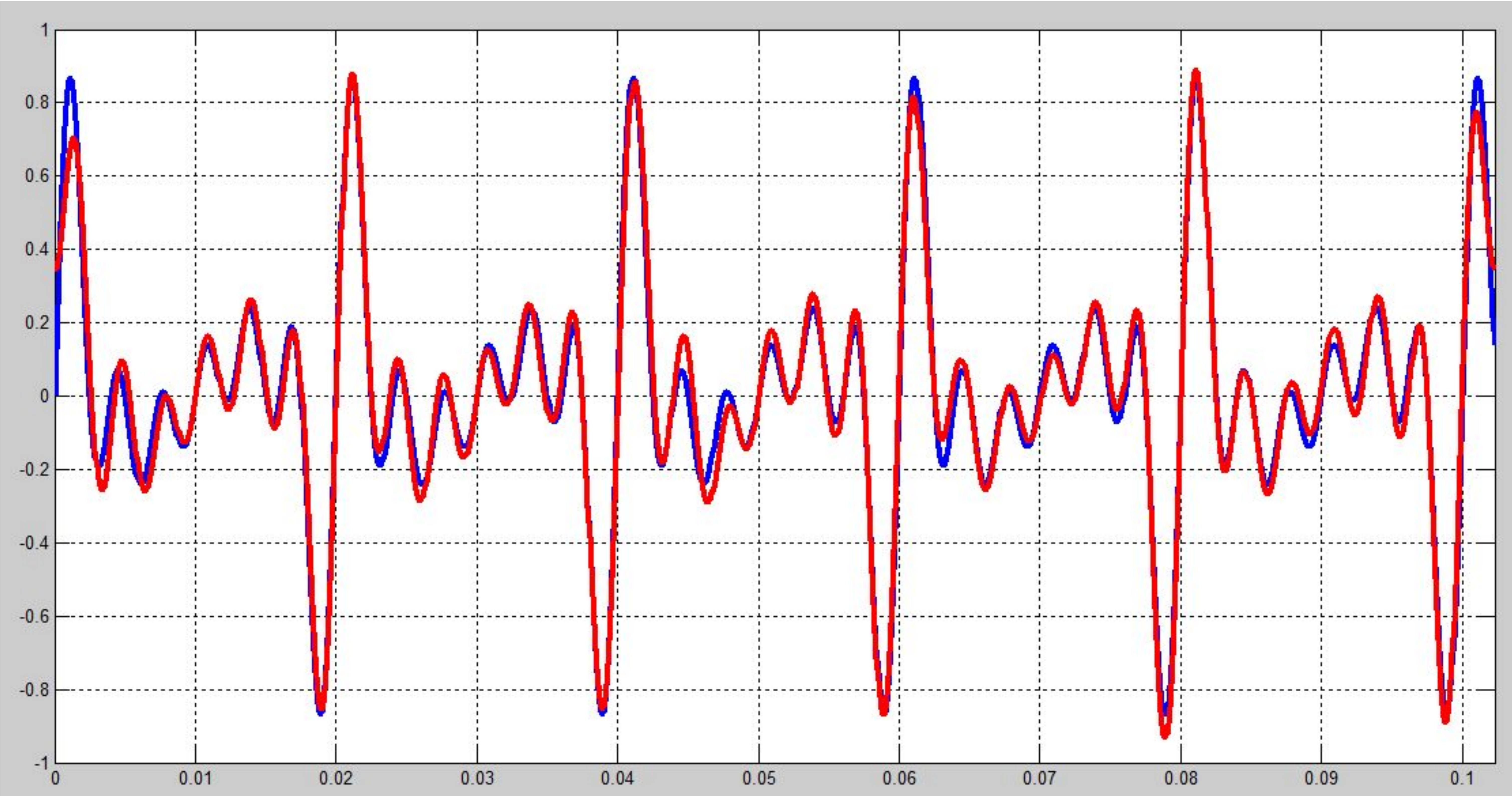
Простейший цифровой фильтр

```
YOFFT = FsinSumN.*indexes;
```



Спектральный анализ

Простейший цифровой фильтр



Спектральный анализ

Использование разрешения по частоте

$$b = \frac{1}{NT} \qquad i = 0\,..\,N \qquad b * i = 0, b, 2b, \ldots$$