

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ПРИМЕР. Последовательности $\{a_n\} = \{(-1)^{n-1}\}$, $\{a_n\} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$,

$\{a_n\} = \{n^2\}$ расходятся.

Потому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$ не существуют, а предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$

Значит последовательности $\{(-1)^{n-1}\}$, $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ и $\{n^2\}$ расходятся.

ПРИМЕР. Последовательность $\{a_n\} = \left\{ \frac{1+2+\dots+n}{n^2} \right\}$ сходится.

$$\text{Так как } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Значит, последовательность $\left\{ \frac{1+2+\dots+n}{n^2} \right\}$ сходится.

ПРИМЕР. Последовательности $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n = 1, 2, 3, \dots$

монотонно возрастает.

Потому, что имеем $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

Так как $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, то последовательность $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$

ограниченна сверху 3-ой. Поэтому эта последовательность ограничена.

Последовательность $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ обозначим e тогда можем

написать $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Здесь ($2 < e < 3; e = 2,718$).

Этот лимит называется вторым замечательным пределом.

ПРИМЕР. Показать, что последовательность с общим членом

$$x_n = \frac{n}{2n+1} \text{ монотонно возрастает.}$$

РЕШЕНИЕ. $x_n = \frac{n}{2n+1} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$.

Покажем, что $x_n < x_{n+1}$.

$$x_n = \frac{n}{2n+1} = \frac{n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{2n^2+3n}{(2n+3)(2n+1)} \quad (1) \quad x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+3)(2n+1)} \quad (2)$$

Так как (1) больше (2) $\Rightarrow \frac{2n^2+3n}{(2n+3)(2n+1)} < \frac{2n^2+3n+1}{(2n+3)(2n+1)}$ то

последовательность $\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$ монотонно возрастает.

Пример. Показать, что последовательность с общим членом

$$x_n = \frac{n}{4n-3} \text{ монотонно убывает.}$$

РЕШЕНИЕ. $x_n = \frac{n}{4n-3} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{n+1}{4(n+1)-3} = \frac{n+1}{4n+1}$.

Покажем, что $x_n > x_{n+1}$

$$x_n = \frac{n}{4n-3} = \frac{n(4n+1)}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{4n^2+n}{(4n-3)(4n+1)} \quad (3) \quad x_{n+1} = \frac{n+1}{4n+1} = \frac{(n+1)(4n-3)}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{4n^2+n-3}{(4n-3)(4n+1)} \quad (4)$$

Так как (3) меньше (4) $\Rightarrow \frac{4n^2+n}{(4n-3)(4n+1)} > \frac{4n^2+n-3}{(4n-3)(4n+1)}$, то

последовательность $\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{4n-3} \right\}$ монотонно убывает

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР. (Решите самостоятельно). Покажите, что

последовательность $\left\{ \frac{3n}{n+1} \right\}$ ограничена и монотонна возрастает.

ПРИМЕР. (Решите самостоятельно). Показать, что

последовательность $\left\{ \frac{1+(-1)^n}{2} \right\}$ не монотонна, но ограниченная.

ПРИМЕР. (Решите самостоятельно). Показать, что

последовательность $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ монотонна, но не ограничена.

ПРИМЕР.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^2 - n + 1}{8n^2 + n + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{8 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 5n}}{3n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 5n}}{\sqrt[3]{(3n + 2)^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1 + \frac{5}{n}}{27n + 54 + \frac{36}{n} + \frac{8}{n^2}}} = 0.$$

ПРИМЕР.
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+2) + (n+1)!}{(n+3)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+2+1)}{(n+1)!(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0. \end{aligned}$$

ПРИМЕР. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

ПРИМЕР. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = e \cdot 1 = e$

ПРИМЕР. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3}) - (\sqrt{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3 - (n-1)}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n-1}} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4/n}{\sqrt{2/n+3/n} + \sqrt{1/n-1/n^2}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\begin{aligned}
 \text{ПРИМЕР. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+5-6+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3+5+\dots+(2n-1))-(2+4+6+\dots+2n)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n^2 + n)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} = -\frac{1}{1+2} = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Замечание. При вычислении некоторых пределов используют

следующие формулы $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

$$1+3+\dots+(2n-1)=n^2, \quad 2+4+\dots+2n=n^2+n$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вычислить следующие пределы

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{3n^2 - 5n + 1} \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{3n^3 + n + 1} \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 5}{n^2 + n - 1}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n - 1}{5n^2 - 7n + 12} \right)^2 \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^3 - 4n^2 + 5n}{4n^3 - 2n - 7} \right)^3 \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right) \left(2 - \frac{4}{n} \right)^2 \left(\frac{5}{n^2} - 1 \right)$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{6n+2}{3n-4}} \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log_a \frac{3n}{6n+5} \right) \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \lg \frac{n^2 + 5}{3n^2 + n - 10}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right) \quad 11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n \right) \quad 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1 - n^3} + n \right)$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right) \quad 14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[5]{n^4 + 2} - \sqrt{n^3 + 1}} \quad 15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n}{n}$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}} \quad 17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+2)} \quad 19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+a} \right)^n.$$

OTBET

1. $\frac{1}{3}$. 2. $\frac{1}{9}$. 3. 0. 4. $\frac{4}{25}$. 5. $\frac{27}{64}$. 6. -4. 7. 9. 8. $-\log_6 2$.

9. $-\lg 3$. 10. 1. 11. $\frac{a+b}{2}$. 12. 0. 13. 0. 14. 0. 15. 0. 16. $\frac{4}{3}$. 17. $\frac{1}{2}$. 18. $\frac{1}{2}$. 19. e .