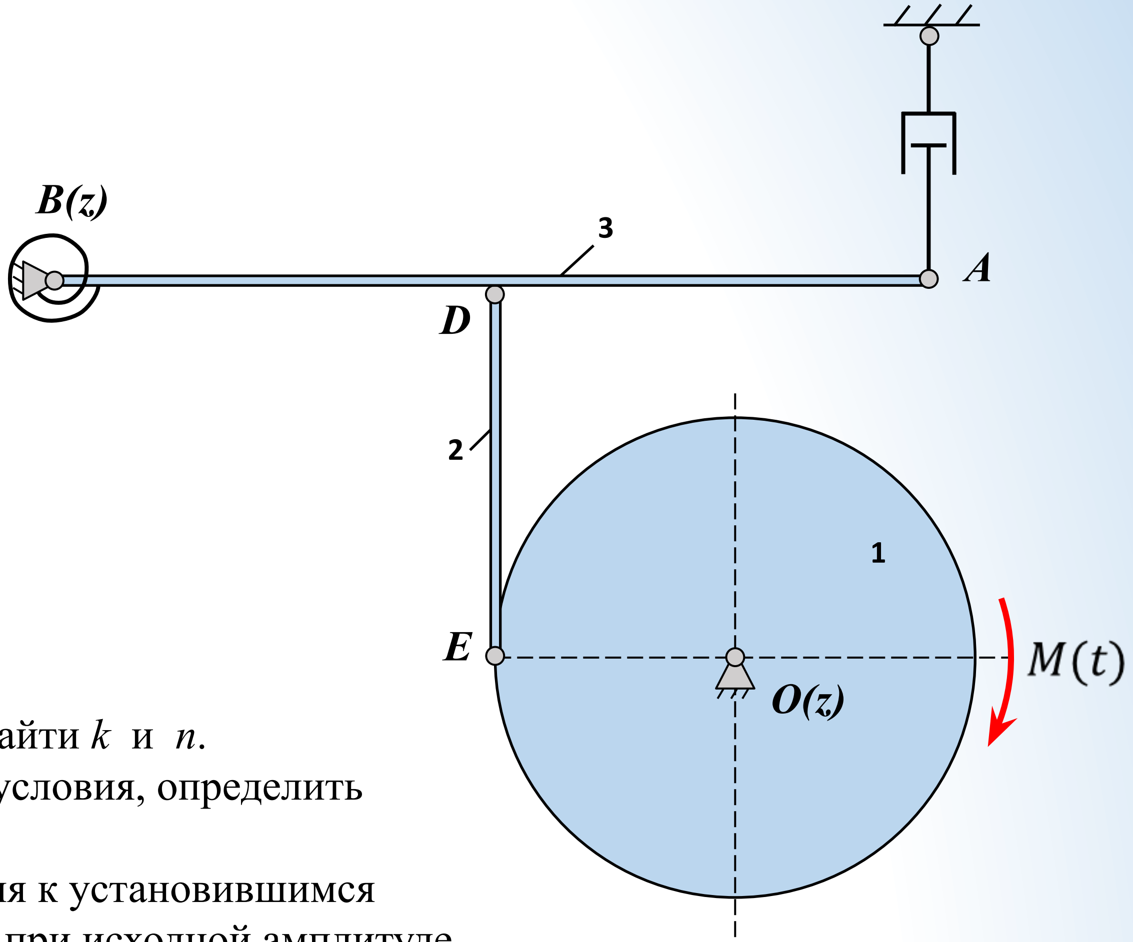
Пример выполнения домашнего задания.

Пара сил с моментом $M(t) = M_0 \sin pt$ ($M_0 = 4$ Нм, $p = 15$рад/с) действует на маховик 1, представляющий собой однородный диск массой $m_1 = 4$ кг и радиусом $r = 0{,}1$ м, который может вращаться вокруг горизонтальной оси $O(z)$. Стержень 2 массой $m_2 = 2$ кг шарнирами E и D связан с однородным стержнем 3 массой $m_3 = 3$ кг и длиной $2l = 0{,}6$ м $(BD = DA)$.

Вращению стержня 3 вокруг горизонтальной оси $B(z)$ препятствует спиральная пружина с коэффициентом жесткости $c_{пр} = 72$ Нм/рад и демпфер с коэффициентом сопротивления $\mu = 40$Нс/м.

В состоянии равновесия системы стержень 3 занимает горизонтальное положение. В начальный момент времени $t = 0$ стержню 3 в положении равновесия была сообщена начальная скорость $\omega_0 = 1{,}23$ рад/с.

По истечении времени $t^* = 3\tau_0 + 4T_в$ амплитуда внешнего воздействия увеличивается в два раза, а еще через такой же промежуток времени внешнее воздействие прекращается.



1. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний системы; найти k и n.
2. Получить решение этого уравнения и, используя заданные начальные условия, определить постоянные интегрирования
3. Исследовать процессы перехода от начального возмущенного состояния к установившимся вынужденным колебаниям, от установившихся вынужденных колебаний при исходной амплитуде внешнего воздействия к установившимся колебаниям при удвоении амплитуды и от последних к состоянию покоя после прекращения внешнего воздействия.
4. Построить график $q(t)$, включающий все переходные процессы.
5. Исследовать амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики системы.

Пример выполнения домашнего задания.

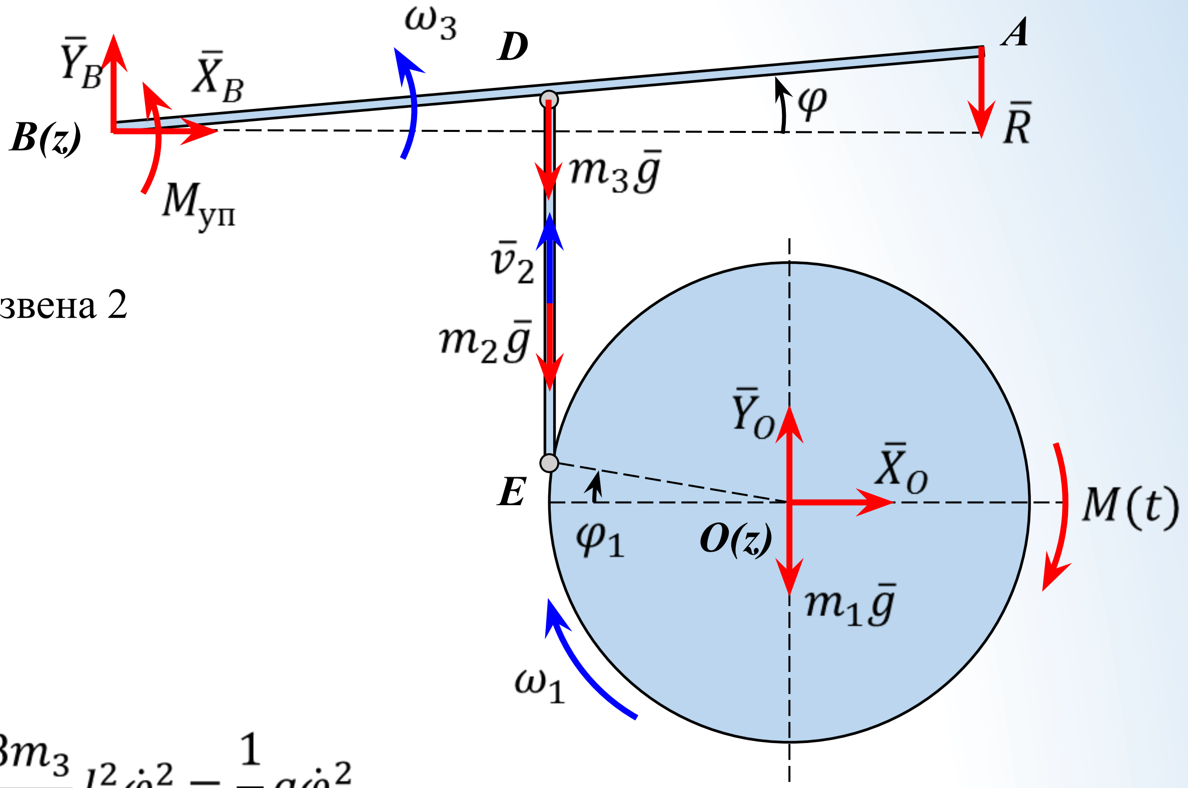
Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота стержня 3. Отбросим наложенные на систему связи и заменим их действие соответствующими реакциями.

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{oz}\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 r^2}{2}\dot{\varphi}^2\frac{l^2}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{m_1 l^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\frac{l}{r}$$



При малых колебаниях вращательной составляющей при движении звена 2 можно пренебречь и рассматривать его как поступательное, тогда:

$$v_2 = v_D = v_E = \dot{\varphi} l; \qquad T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{Bz}\omega_3^2 = \frac{1}{2}\frac{m_3 4 l^2}{3}\dot{\varphi}^2$$

Тогда кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2}\frac{m_1 l^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_3 4 l^2}{3}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{3m_1 + 6m_2 + 8m_3}{6} l^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2$$

где $a = \frac{3m_1 + 6m_2 + 8m_3}{6} l^2 = 0{,}72 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ – обобщенный инерционный коэффициент.

Пример выполнения домашнего задания.

Обобщенную силу представим в виде:

$$Q = Q_{\text{П}} + Q_{\text{Д}} + Q_{\text{в}}(\text{t}).$$

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{пр} (\varphi_{\text{ст}} - \varphi)^2 - \frac{1}{2} c_{пр} \varphi_{\text{ст}}^2 + m_2 g l \sin\varphi + m_3 g l \sin\varphi$$

$\varphi_{\text{ст}}$ – статическая деформация пружины.

Определим $\varphi_{\text{ст}}$ из условия равновесия системы: $\sum_k \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0$.

$$M_{\text{уп}} \delta\varphi - m_3 g l \delta\varphi - m_2 g l \delta\varphi = 0$$

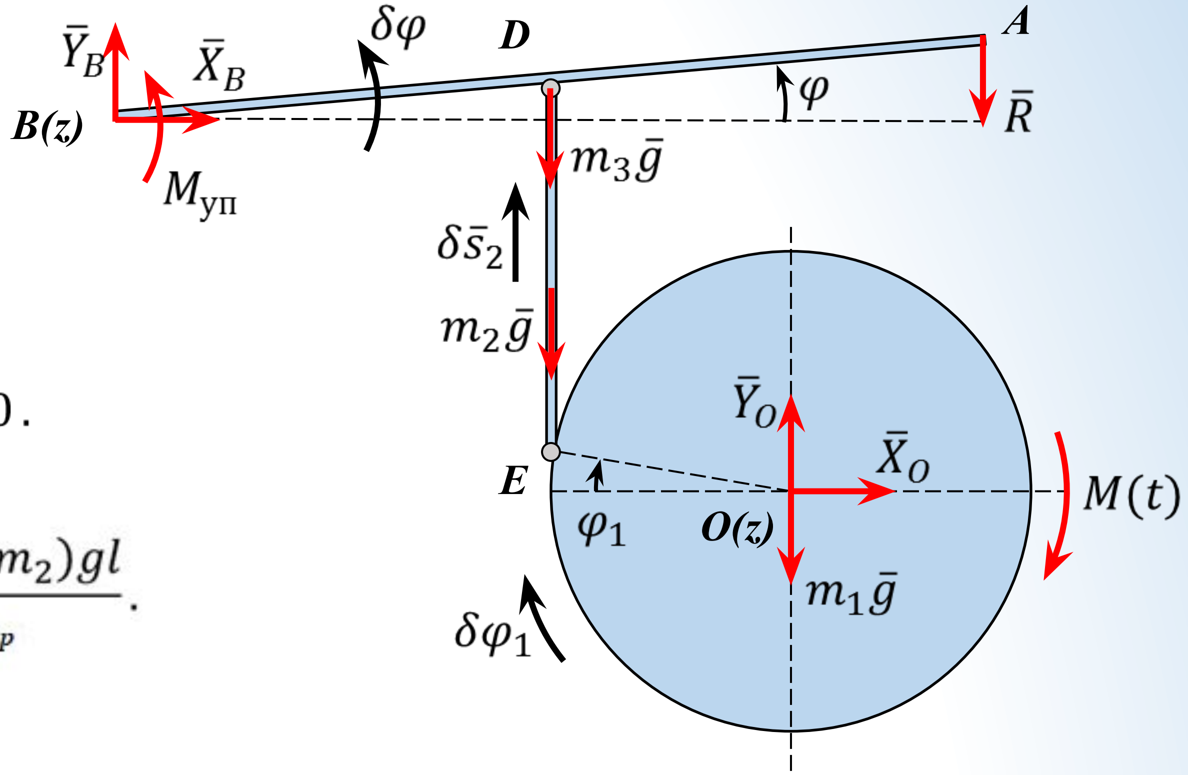
$$c_{пр} \varphi_{\text{ст}} = (m_3 + m_2) g l; \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_{\text{ст}} = \frac{(m_3 + m_2) g l}{c_{пр}}.$$

$$\Pi \approx \cancel{\frac{1}{2} c \varphi_{\text{ст}}^2} + \frac{1}{2} c \varphi^2 - c \varphi \varphi_{\text{ст}} - \cancel{\frac{1}{2} c \varphi_{\text{ст}}^2} + (m_2 + m_3) g l \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} c_{пр} \varphi^2 \cancel{- c_{пр} \varphi \frac{(m_3 + m_2) g l}{c_{пр}} + (m_2 + m_3) g l \varphi} = \frac{1}{2} c \varphi^2$$

где $c = c_{пр} = 72\ \text{Н} \cdot \text{м}$ - обобщенный коэффициент упругости

$$Q_{\text{П}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -c\varphi$$



Пример выполнения домашнего задания.

Диссипативная функция Рэлея:

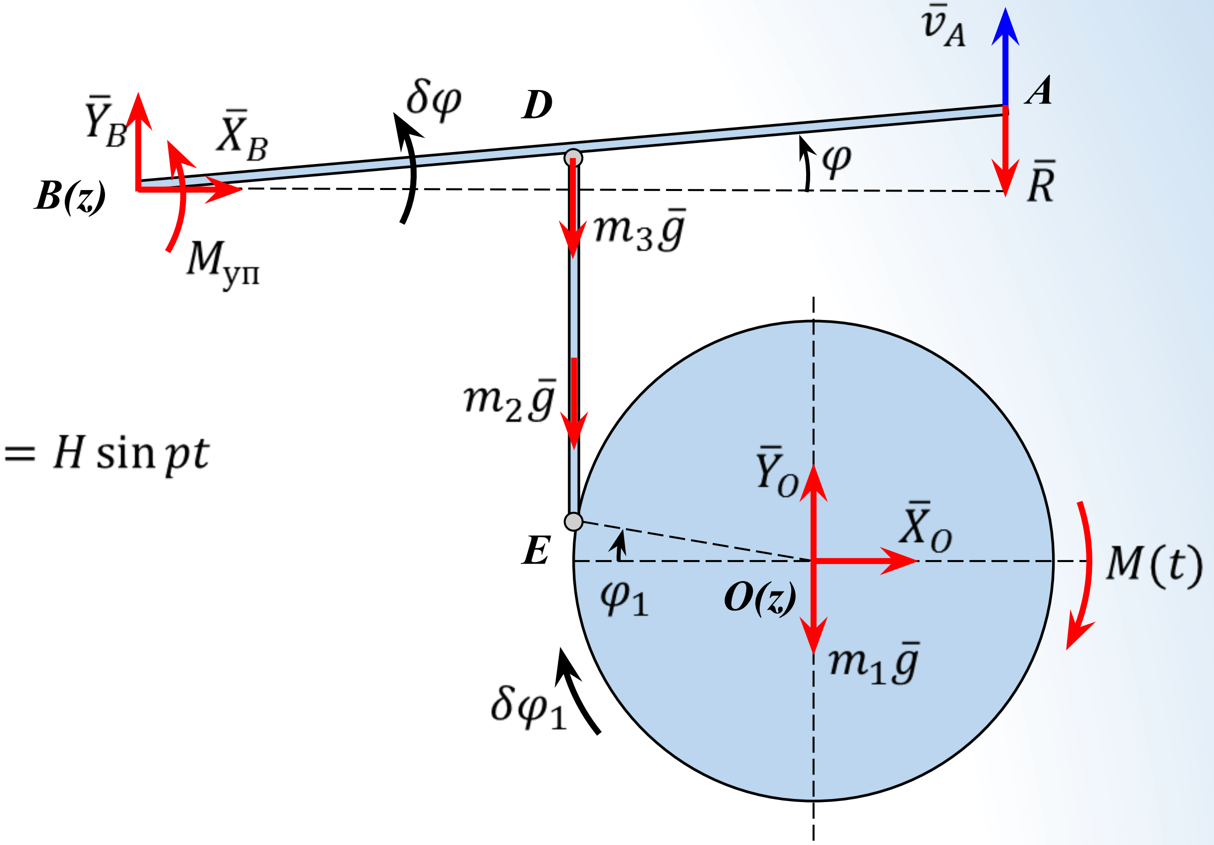
$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_k \mu_k v_k^2 = \frac{1}{2}\mu v_A^2 = \frac{1}{2}\mu\cdot 4l^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}b\dot{\varphi}^2$$

$$b = 4\mu l^2 = 14{,}4\ \text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$$

$$Q_{\text{Д}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\varphi}} = -b\dot{\varphi}$$

$$Q_{\text{в}}(t) = \frac{\delta A(M(t))}{\delta\varphi} = \frac{M(t)\delta\varphi_1}{\delta\varphi} = \frac{M(t)\frac{l}{r}\delta\varphi}{\delta\varphi} = \frac{M_0 l}{r}\sin pt = H\sin pt$$

$$H = \frac{M_0 l}{r} = 12\ \text{Н}\cdot\text{м}$$



Дифференциальное уравнение движения системы имеет вид:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = H\sin pt$$

в канонической форме: $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h\sin pt$; где:

$$n = \frac{b}{2a} = \frac{14{,}4}{2\cdot 0{,}72} = 10\,\frac{\text{рад}}{\text{с}};\quad k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{72}{0{,}72}} = 10\,\frac{\text{рад}}{\text{с}};\quad h = \frac{H}{a} = \frac{12}{0{,}72} = 16{,}67\ \text{рад/с}^2$$

Пример выполнения домашнего задания.

Общее решение диф. уравнения вынужденных колебаний $q(t) = q_{о.о.} + q_{ч.н.}$

Поскольку $n = k$, имеем случай критического сопротивления, поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$q_{\text{о.о.}} = e^{-nt}(C_1 + C_2 t).$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$q_{\text{ч.н.}} = D sin(pt - \varepsilon)$$

где: $$D = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{16{,}16}{\sqrt{(10^2 - 15^2)^2 + 4 \cdot 10^2 \cdot 15^2}} = 0{,}0513 \text{рад};$$

$$\boldsymbol{p>k,}\ \textit{поэтому}\ arctg\frac{2np}{k^2 - p^2} = arctg\frac{2 \cdot 10 \cdot 15}{10^2 - 15^2} = arctg(-2{,}4) = -1{,}176;$$

поскольку ε меняется в пределах от 0 до π, то: $\varepsilon = -1{,}176 + \pi = 1{,}966$ рад.

$$q(t) = e^{-10t}(C_1 + C_2 t) + 0{,}0513 sin(15t - 1{,}966) \text{ рад.}$$

Константы интегрирования определяем из начальных условий:

$$t = 0 \quad q(0) = q_0 = 0,\ \dot{q}(0) = \dot{q}_0 = \omega_0 = 1{,}23 \text{ рад/с}$$

$$C_1 = q_0 + D\sin\varepsilon = 0{,}0473 \text{ рад};$$

$$C_2 = \dot{q}_0 + nq_0 + D(n \cdot \sin\varepsilon - p \cdot \cos\varepsilon) = 2 \text{ рад/с}.$$

Пример выполнения домашнего задания.

Исследуем переходные процессы.

На первом участке уравнение движения имеет вид:

$$q_1(t) = e^{-10t}(0{,}0473 + 2t) + 0{,}0513 sin(15t - 1{,}966) \text{ рад.}$$

По истечении времени $t^* = 3\tau_0 + 4T_в$ амплитуда внешнего воздействия увеличивается в два раза.

$t^* = 3\tau_0 + 4T_в = 1{,}976$ с.

Амплитуда обобщенной вынуждающей силы будет: $H = 2\dfrac{M_0 l}{r} = 24 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Тогда амплитуда вынужденных колебаний на втором участке: $D = 2 \cdot 0{,}0513 = 0{,}1026 \text{ рад}$

На втором участке уравнение движения имеет вид:

$$q_2(t) = e^{-10t}(C_1^* + C_2^* t) + 0{,}1026 sin(15t - 1{,}966) \text{ рад.}$$

Константы интегрирования C_1^*, C_2^* находим из начальных условий. Начальными условиями для второго участка будут являться координата и скорость на первом участке в момент времени t^*:

$$q_{20} = q_1(t^*) = 0{,}02898 \text{ рад}; \qquad \dot{q}_{20} = \dot{q}_1(t^*) = -0{,}6349 \text{ рад}/c;$$

$$C_1^* = q_{20} + D \sin\varepsilon = 0{,}1237 \text{ рад;}$$

$$C_2^* = \dot{q}_{20} + nq_{20} + D(n \cdot \sin\varepsilon - p \cdot \cos\varepsilon) = 1{,}1943 \text{ рад/с.}$$

Тогда на втором участке уравнение движения имеет вид:

$$q_2(t) = e^{-10t}(0{,}1237 + 1{,}1943t) + 0{,}1026 sin(15t - 1{,}966) \text{ рад.}$$

Пример выполнения домашнего задания.

Еще через такой же промежуток времени ($t^* = 3\tau_0 + 4T_в$) внешнее воздействие прекращается.

На третьем участке уравнение движения имеет вид как при свободных колебаниях: $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0$

$$q_3(t) = e^{-10t}\left(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t\right) \text{ рад.}$$

Константы интегрирования $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ находим из начальных условий. Начальными условиями для третьего участка будут являться координата и скорость на втором участке в момент времени t^*:

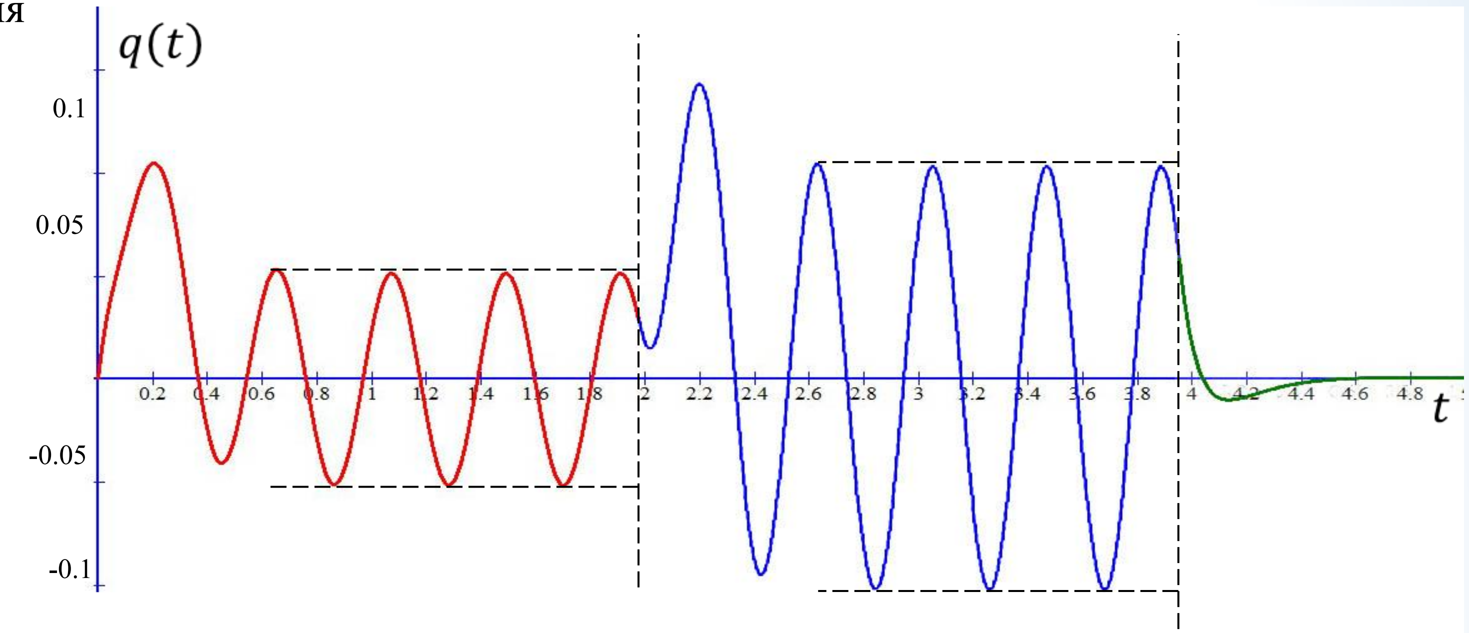
$$q_{30} = q_2(t^*) = 0{,}05796 \text{ рад}; \qquad \dot{q}_{30} = \dot{q}_2(t^*) = -1{,}2699 \text{ рад}/c;$$

$$\tilde{C}_1 = q_{30} = 0{,}05796 \text{ рад}; \qquad \tilde{C}_2 = \dot{q}_{30} + n \cdot q_{30} = -0{,}6903 \text{ рад};$$

Тогда на третьем участке уравнение движения имеет вид:

$$q_3(t) = e^{-10t}(0{,}05796 - 0{,}6903t) \text{ рад.}$$

Строим графики.



Замечания к выполнению домашнего задания.

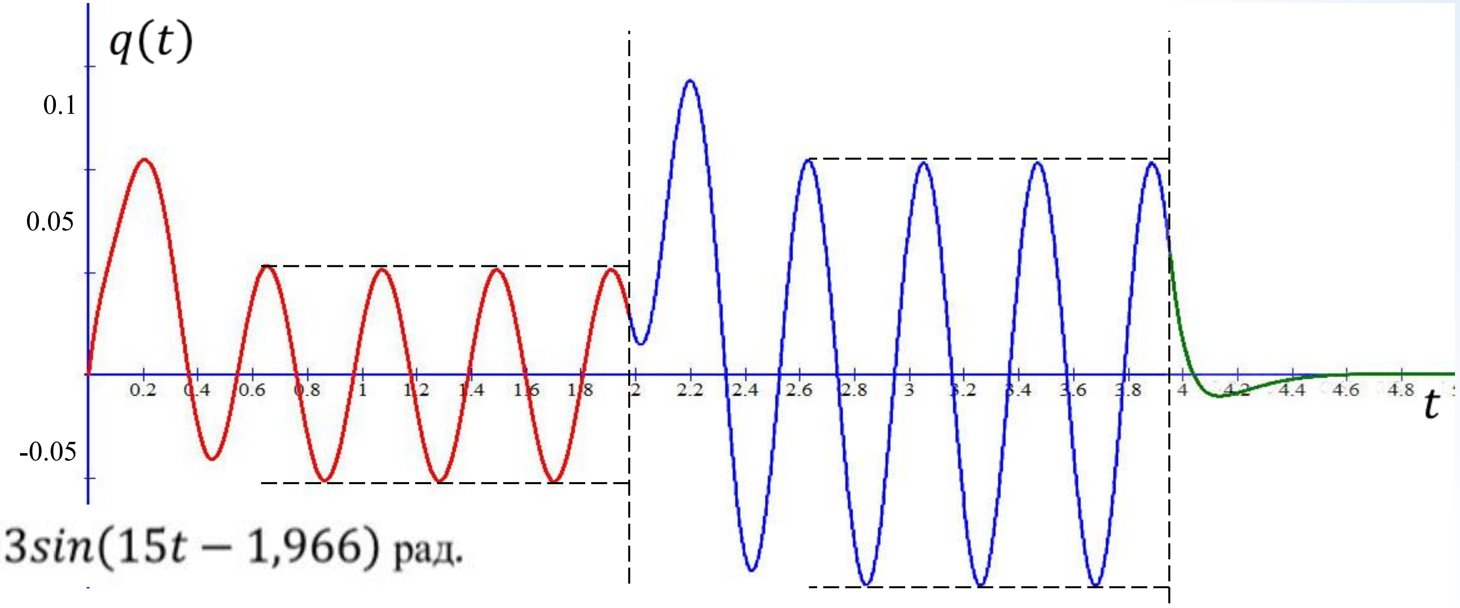
Для участков 1 и 2

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h \sin pt\,;$$

$$q(t) = q_{о.о.} + q_{ч.н.}$$

$$q_{о.о.} = e^{-nt}(C_1 + C_2 t).$$

$$q_{ч.н.} = D\sin(pt - \varepsilon)$$



Для участка 1

$$q_1(t) = e^{-10t}(0{,}0473 + 2t) + 0{,}0513 sin(15t - 1{,}966) \text{ рад.}$$

Через время $t^* = 3\tau_0 + 4T_в$ $\quad h_2 = 2h_1$

Для участка 2

$$q_2(t) = e^{-10t}(0{,}1237 + 1{,}1943t) + 0{,}1026 sin(15t - 1{,}966) \text{ рад.}$$

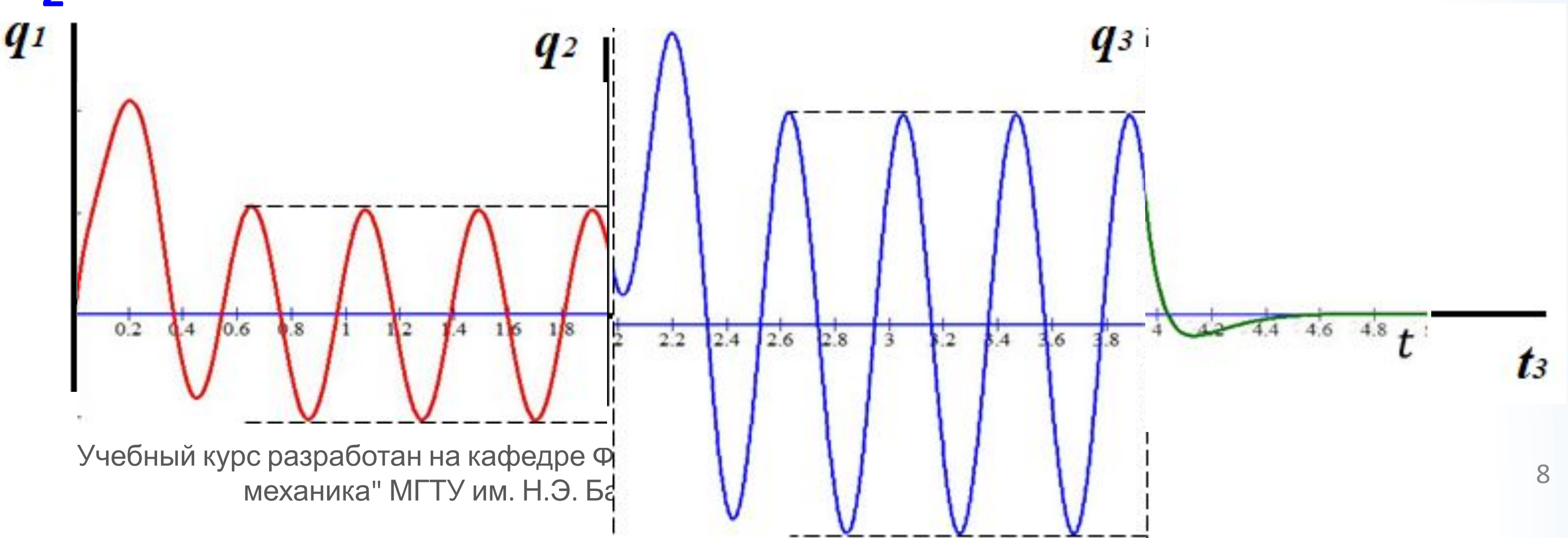
Через время $t^* = 3\tau_0 + 4T_в$

Для участка 3

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0$$

$$q(t) = e^{-nt}(C_1 + C_2 t).$$

$$q_3(t) = e^{-10t}(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t) \text{ рад.}$$



Пример выполнения домашнего задания.

Амплитудно-частотная характеристика.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + d^2 z^2}}$$

$\frac{p}{k} = z$ – коэффициент расстройки;

$\mathrm{d} = \frac{2n}{k} = 2$ – безразмерный коэффициент затухания.

$Д = \frac{k}{2n} = 0{,}5$ – добротность системы.

Фазочастотная характеристика.

$$\varepsilon = arctg\frac{d \cdot z}{1 - z^2}$$