

## Пример выполнения домашнего задания.



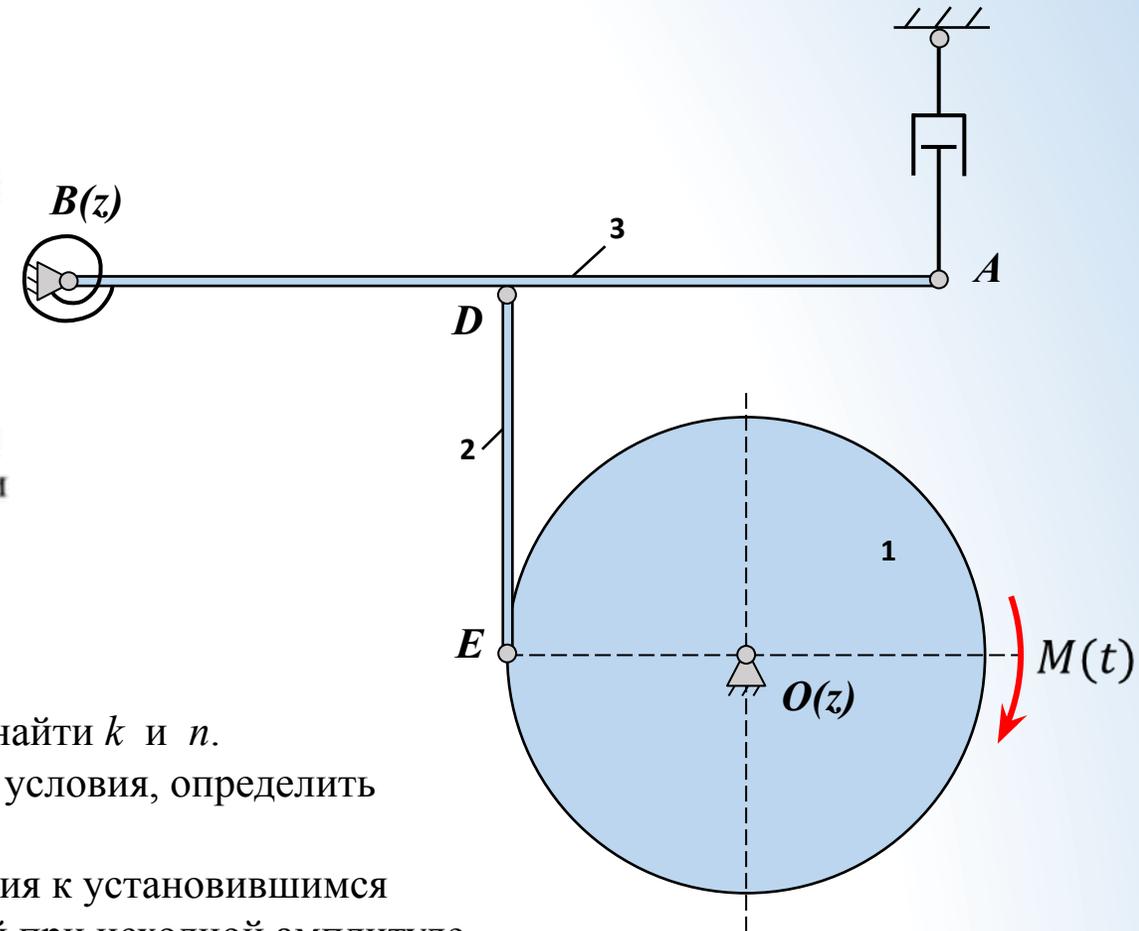
Пара сил с моментом  $M(t) = M_0 \sin pt$  ( $M_0 = 4$  Нм,  $p = 15$  рад/с) действует на маховик 1, представляющий собой однородный диск массой  $m_1 = 4$  кг и радиусом  $r = 0,1$  м, который может вращаться вокруг горизонтальной оси  $O(z)$ . Стержень 2 массой  $m_2 = 2$  кг шарнирами  $E$  и  $D$  связан с однородным стержнем 3 массой  $m_3 = 3$  кг и длиной  $2l = 0,6$  м ( $BD = DA$ ).

Вращению стержня 3 вокруг горизонтальной оси  $B(z)$  препятствует спиральная пружина с коэффициентом жесткости  $C_{сп} = 72$  Нм/рад и демпфер с коэффициентом сопротивления  $\mu = 40$  Нс/м.

В состоянии равновесия системы стержень 3 занимает горизонтальное положение. В начальный момент времени  $t = 0$  стержню 3 в положении равновесия была сообщена начальная скорость  $\omega_0 = 1,23$  рад/с.

По истечении времени  $t^* = 3\tau_0 + 4T_\epsilon$  амплитуда внешнего воздействия увеличивается в два раза, а еще через такой же промежуток времени внешнее воздействие прекращается.

1. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний системы; найти  $k$  и  $n$ .
2. Получить решение этого уравнения и, используя заданные начальные условия, определить постоянные интегрирования
3. Исследовать процессы перехода от начального возмущенного состояния к установившимся вынужденным колебаниям, от установившихся вынужденных колебаний при исходной амплитуде внешнего воздействия к установившимся колебаниям при удвоении амплитуды и от последних к состоянию покоя после прекращения внешнего воздействия.
4. Построить график  $q(t)$ , включающий все переходные процессы.
5. Исследовать амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики системы.



## Пример выполнения домашнего задания.



Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота стержня 3. Отбросим наложенные на систему связи и заменим их действие соответствующими реакциями.

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{Oz} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 r^2}{2} \dot{\varphi}^2 \frac{l^2}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 l^2}{2} \dot{\varphi}^2$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \frac{l}{r}$$

При малых колебаниях вращательной составляющей при движении звена 2 можно пренебречь и рассматривать его как поступательное, тогда:

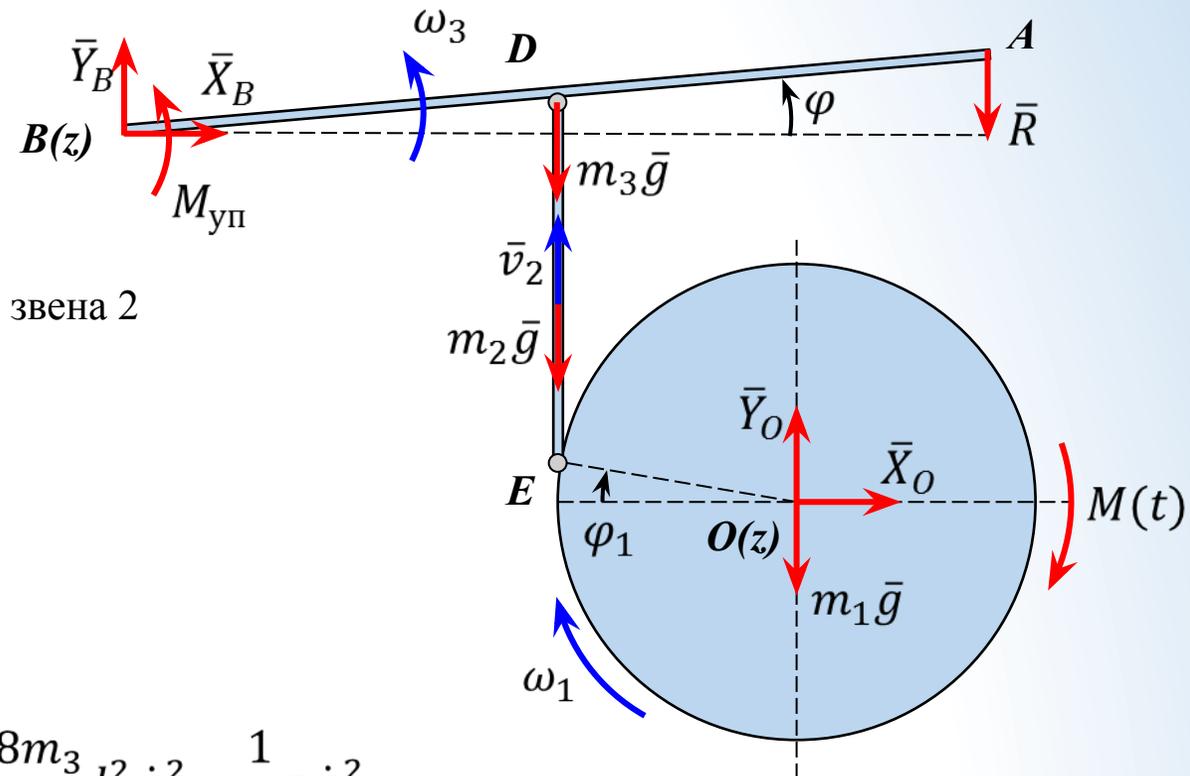
$$v_2 = v_D = v_E = \dot{\varphi} l; \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{Bz} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{m_3 4l^2}{3} \dot{\varphi}^2$$

Тогда кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3 4l^2}{3} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{3m_1 + 6m_2 + 8m_3}{6} l^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2$$

где  $a = \frac{3m_1 + 6m_2 + 8m_3}{6} l^2 = 0,72 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  – обобщенный инерционный коэффициент.



# Пример выполнения домашнего задания.



Обобщенную силу представим в виде:

$$Q = Q_{\Pi} + Q_D + Q_B(t).$$

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{np} (\varphi_{ст} - \varphi)^2 - \frac{1}{2} c_{np} \varphi_{ст}^2 + m_2 gl \sin \varphi + m_3 gl \sin \varphi$$

$\varphi_{ст}$  – статическая деформация пружины.

Определим  $\varphi_{ст}$  из условия равновесия системы:  $\sum_k \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0$ .

$$M_{уп} \delta \varphi - m_3 gl \delta \varphi - m_2 gl \delta \varphi = 0$$

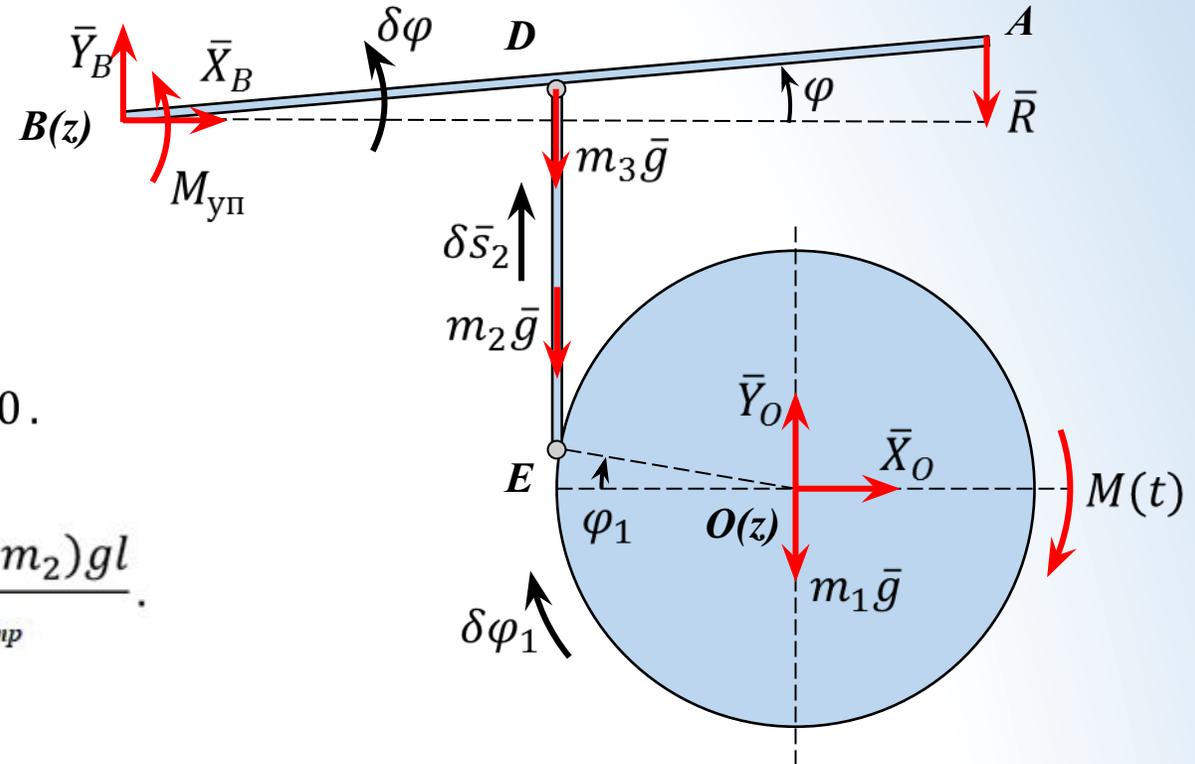
$$c_{np} \varphi_{ст} = (m_3 + m_2) gl; \quad \Rightarrow \quad \varphi_{ст} = \frac{(m_3 + m_2) gl}{c_{np}}$$

$$\Pi \approx \frac{1}{2} c \varphi_{ст}^2 + \frac{1}{2} c \varphi^2 - c \varphi \varphi_{ст} - \frac{1}{2} c \varphi_{ст}^2 + (m_2 + m_3) gl \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} c_{np} \varphi^2 - c_{np} \varphi \frac{(m_3 + m_2) gl}{c_{np}} + (m_2 + m_3) gl \varphi = \frac{1}{2} c \varphi^2$$

где  $c = c_{np} = 72 \text{ Н} \cdot \text{м}$  – обобщенный коэффициент упругости

$$Q_{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -c \varphi$$





## Пример выполнения домашнего задания.



*Общее решение диф. уравнения вынужденных колебаний*  $q(t) = q_{o.o.} + q_{ч.н.}$

Поскольку  $n = k$ , имеем случай критического сопротивления, поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$q_{o.o.} = e^{-nt}(C_1 + C_2 t).$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$q_{ч.н.} = D \sin(pt - \varepsilon)$$

где: 
$$D = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{16,16}{\sqrt{(10^2 - 15^2)^2 + 4 \cdot 10^2 \cdot 15^2}} = 0,0513 \text{ рад};$$

$p > k$ , поэтому  $\text{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2} = \text{arctg} \frac{2 \cdot 10 \cdot 15}{10^2 - 15^2} = \text{arctg}(-2,4) = -1,176;$

поскольку  $\varepsilon$  меняется в пределах от 0 до  $\pi$ , то:  $\varepsilon = -1,176 + \pi = 1,966$  рад.

$$q(t) = e^{-10t}(C_1 + C_2 t) + 0,0513 \sin(15t - 1,966) \text{ рад.}$$

Константы интегрирования определяем из начальных условий:

$$t = 0 \quad q(0) = q_0 = 0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 = \omega_0 = 1,23 \text{ рад/с}$$

$$C_1 = q_0 + D \sin \varepsilon = 0,0473 \text{ рад};$$

$$C_2 = \dot{q}_0 + nq_0 + D(n \cdot \sin \varepsilon - p \cdot \cos \varepsilon) = 2 \text{ рад/с.}$$

## Пример выполнения домашнего задания.



### Исследуем переходные процессы.

На первом участке уравнение движения имеет вид:

$$q_1(t) = e^{-10t}(0,0473 + 2t) + 0,0513\sin(15t - 1,966) \text{ рад.}$$

По истечении времени  $t^* = 3\tau_0 + 4T_с$  амплитуда внешнего воздействия увеличивается в два раза.

$$t^* = 3\tau_0 + 4T_с = 1,976 \text{ с.}$$

Амплитуда обобщенной вынуждающей силы будет:  $H = 2 \frac{M_0 l}{r} = 24 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Тогда амплитуда вынужденных колебаний на втором участке:  $D = 2 \cdot 0,0513 = 0,1026 \text{ рад}$

На втором участке уравнение движения имеет вид:

$$q_2(t) = e^{-10t}(C_1^* + C_2^*t) + 0,1026\sin(15t - 1,966) \text{ рад.}$$

Константы интегрирования  $C_1^*, C_2^*$  находим из начальных условий. Начальными условиями для второго участка будут являться координата и скорость на первом участке в момент времени  $t^*$ :

$$q_{20} = q_1(t^*) = 0,02898 \text{ рад}; \quad \dot{q}_{20} = \dot{q}_1(t^*) = -0,6349 \text{ рад/с};$$

$$C_1^* = q_{20} + D \sin \varepsilon = 0,1237 \text{ рад};$$

$$C_2^* = \dot{q}_{20} + nq_{20} + D(n \cdot \sin \varepsilon - p \cdot \cos \varepsilon) = 1,1943 \text{ рад/с.}$$

Тогда на втором участке уравнение движения имеет вид:

$$q_2(t) = e^{-10t}(0,1237 + 1,1943t) + 0,1026\sin(15t - 1,966) \text{ рад.}$$

## Пример выполнения домашнего задания.



Еще через такой же промежуток времени ( $t^* = 3\tau_0 + 4T_e$ ) внешнее воздействие прекращается.

На третьем участке уравнение движения имеет вид как при свободных колебаниях:  $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0$

$$q_3(t) = e^{-10t}(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t) \text{ рад.}$$

Константы интегрирования  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  находим из начальных условий. Начальными условиями для третьего участка будут являться координата и скорость на втором участке в момент времени  $t^*$ :

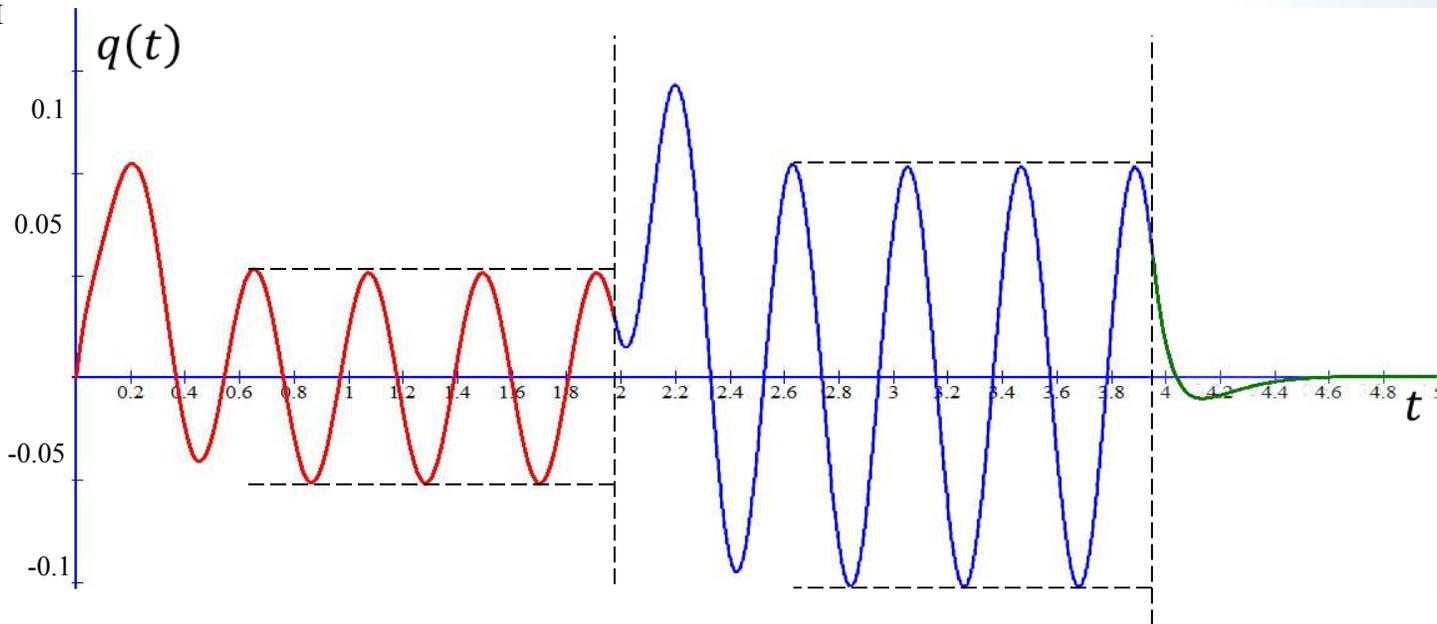
$$q_{30} = q_2(t^*) = 0,05796 \text{ рад; } \dot{q}_{30} = \dot{q}_2(t^*) = -1,2699 \text{ рад/с;}$$

$$\tilde{C}_1 = q_{30} = 0,05796 \text{ рад; } \tilde{C}_2 = \dot{q}_{30} + n \cdot q_{30} = -0,6903 \text{ рад;}$$

Тогда на третьем участке уравнение движения имеет вид:

$$q_3(t) = e^{-10t}(0,05796 - 0,6903t) \text{ рад.}$$

Строим графики.



Для участков 1 и 2

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h \sin pt;$$

$$q(t) = q_{o.o.} + q_{ч.н.}$$

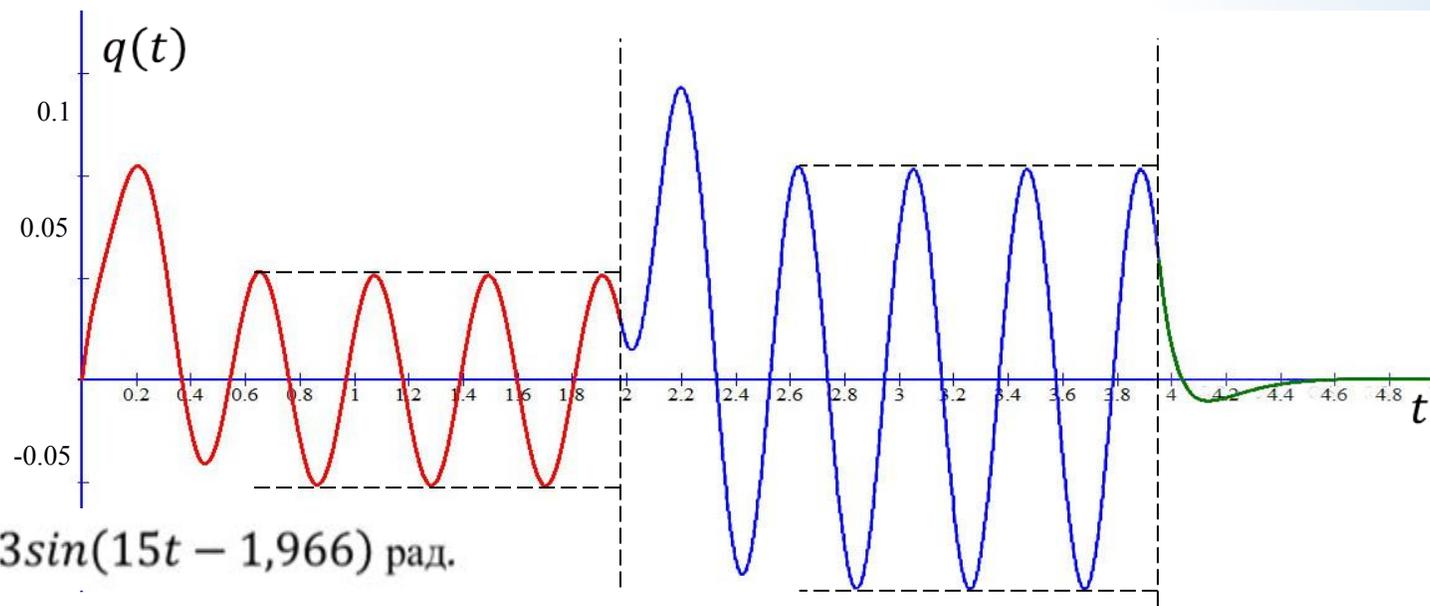
$$q_{o.o.} = e^{-nt}(C_1 + C_2t).$$

$$q_{ч.н.} = D \sin(pt - \varepsilon)$$

Для участка

1

$$q_1(t) = e^{-10t}(0,0473 + 2t) + 0,0513 \sin(15t - 1,966) \text{ рад.}$$



Через время  $t^* = 3\tau_0 + 4T_с$   $h_2 = 2h_1$  Для участка

$$q_2(t) = e^{-10t}(0,1237 + 1,1943t) + 0,1026 \sin(15t - 1,966) \text{ рад.}$$

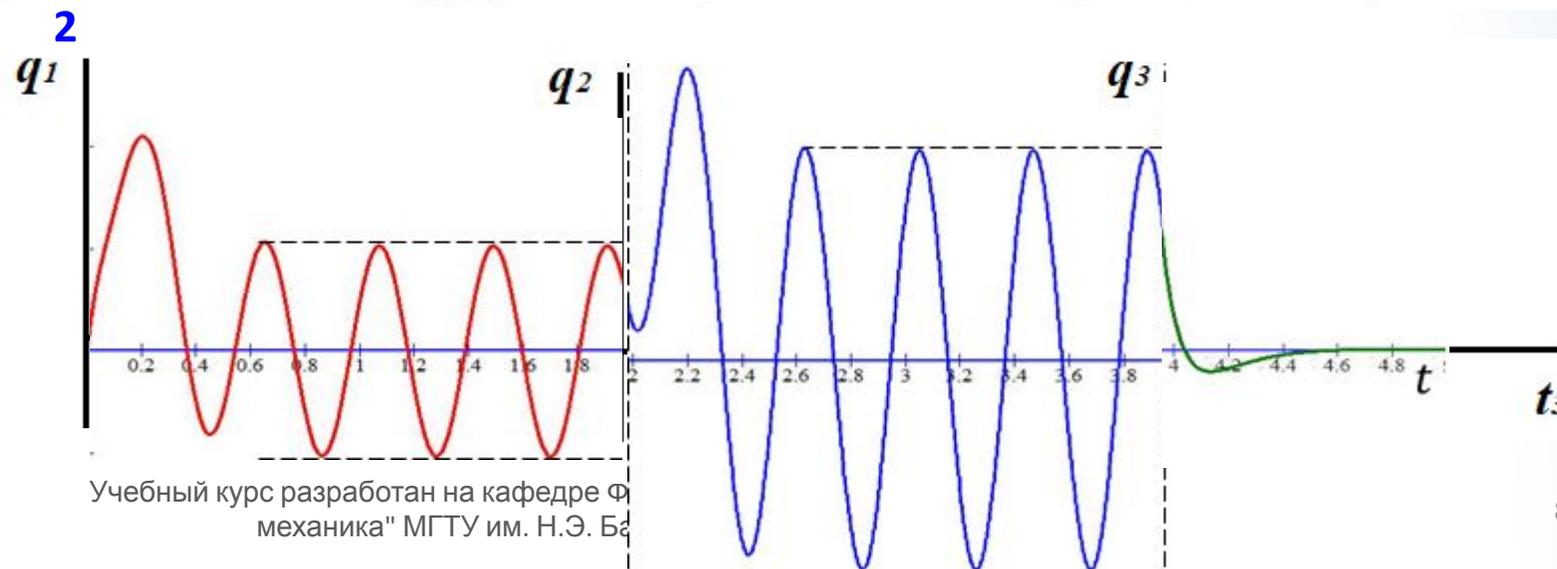
Через время  $t^* = 3\tau_0 + 4T_с$

Для участка 3

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0$$

$$q(t) = e^{-nt}(C_1 + C_2t).$$

$$q_3(t) = e^{-10t}(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2t) \text{ рад.}$$



# Пример выполнения домашнего задания.



Амплитудно-частотная характеристика.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}}$$

$\frac{p}{k} = z$  – коэффициент расстройки;

$d = \frac{2n}{k} = 2$  – безразмерный коэффициент затухания.

$D = \frac{k}{2n} = 0,5$  – добротность системы.

Фазочастотная характеристика.

$$\varepsilon = \arctg \frac{d \cdot z}{1 - z^2}$$

