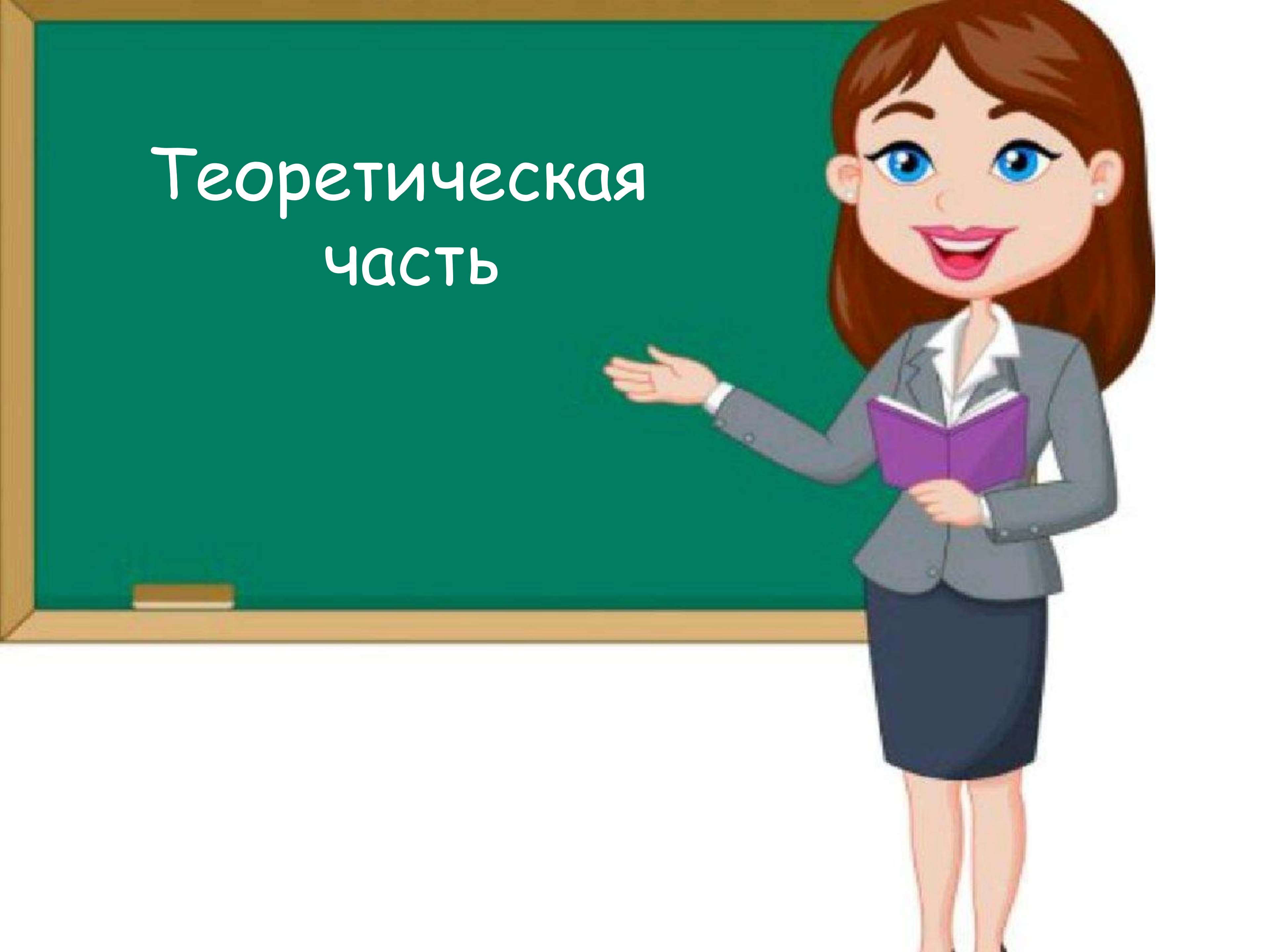
Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия


Теоретическая
часть

Последовательность. Предел последовательности.

- **Определение 1.** Если по некоторому закону каждому натуральному числу $n \in N$ поставлено в соответствие вполне определенное число a_n , то говорят, что дана числовая последовательность $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots$$

словами, числовая последовательность эта функция натурального аргумента $a_n = f(n)$.

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots$ называются членами последовательности, а число $a_n -$ общим членом.

Пример. $a_n = (-1)^n / (2n+1)$.

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго равен предыдущему умноженному на одно и тоже число не равное нулю.

$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ -геометрическая прогрессия,

если для всех натуральных *n* выполняется равенство

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \qquad b_n \neq 0 \qquad q \neq 0$$

q -знаменатель геометрической прогрессии (число)

Формула суммы геометрической прогрессии

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии
Суммой бесконечно убывающей прогрессии является число, к которому неограниченно приближается сумма первых членов убывающей прогрессии при стремлении числа к бесконечности. Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии вычисляется по

формуле: $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Определение:

Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называется геометрической прогрессией.

Пример: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

Знаменатель геометрической прогрессии $g = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots$

Геометрическая прогрессия называется убывающей, если модуль её знаменателя меньше единицы.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии есть предел последовательности $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$.

Например, для прогрессии $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots,$ где $b_1 = 1, q = -\frac{1}{3}$

имеем $S_1 = 1, S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}, \ldots,\quad S_n = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ldots$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0,$ то $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{3}{4}.$

Сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно находить по формуле $S = \frac{b_1}{1 - q}$

Предел последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Последовательностью*** *называется функция, заданная на множестве натуральных чисел.*

Если область значений последовательности – числовое множество, то последовательность называют ***числовой***, если область значений – множество функций, то последовательность называют ***функциональной***.

Определение.

Число ***b*** называют **пределом последовательности** (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки ***b*** содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Читают: *предел последовательности (y_n) при стремлении n к бесконечности равен b или предел последовательности (y_n) равен b.*

Задача №1

Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она заданна формулой:

$$а)\, b_n = \frac{10}{7^n} \qquad б)\, b_n = (-4)^{n+2}$$

Решение: а)

$$b_1 = \frac{10}{7} \qquad b_2 = \frac{10}{49} \qquad q = \frac{10}{49} : \frac{10}{7} = \frac{1}{7} \qquad \left|\frac{1}{7}\right| < 1$$

данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

б) $b_n=(-4)^{n+2}$; $b_1=(-4)^3=-64$; $b_2=(-4)^4=128$; $q=128:(-64)=-2$; $/-2/>1$, =>

данная последовательность не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

№18. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если

1) $b_1 = \frac{1}{8}, q = -\frac{1}{2}$

Решение:

1. $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{8} : \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 2}{8 \cdot 3} = \frac{1}{12}$

2) $b_5 = \frac{1}{81}, q = \frac{1}{3}$

Решение:

1. $b_5 = b_1 q^4 \rightarrow \frac{1}{81} = b_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \rightarrow b_1 = \frac{1}{81} : \frac{1}{81} = 1$
2. $S = \frac{b_1}{1-q} = 1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

3) $b_1 = 9, q = -\frac{1}{3}$

Решение:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{9}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{\frac{4}{3}} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$$

4) $b_4 = \frac{1}{8}, q = -\frac{1}{2}$

Решение:

1. $b_4 = b_1 q^3 \rightarrow \frac{1}{8} = b_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \rightarrow b_1 = \frac{1}{8} : \left(-\frac{1}{8}\right) = -1$
2. $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$

21. 1) $b_n = 3\cdot(-2)^n$; $b_1 = -6$; $b_2 = 12$; $b_3 = -24$;

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{-6} = -2 = \frac{b_3}{b_2} = \frac{-24}{12}$, так как $|q| = 2 > 1$, то данная последовательность не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

2) $b_n = -5\cdot 4^n$; $b_1 = -20$; $b_2 = -80$; $b_3 = -320$;

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{80}{20} = 4 = \frac{b_3}{b_2} = \frac{-320}{-80}$, так как $|q| = 4 > 1$, то данная последовательность не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

3) $b_n = 8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $b_1 = 8$; $b_2 = -\frac{8}{3}$; $b_3 = -\frac{8}{9}$;

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-\frac{8}{3}}{8} = -\frac{1}{3} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{-\frac{8}{9}}{-\frac{8}{3}}$, так как $|q| = \frac{1}{3} < 1$, значит, данная последовательность является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

4) $b_n = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $b_1 = 3$; $b_2 = -\frac{3}{2}$; $b_3 = \frac{3}{4}$;

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-\frac{3}{2}}{8} = -\frac{1}{2} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}}$, $|q| = \frac{1}{2} < 1$, значит, данная последовательность является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Примеры

- Пример 1. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to 4} \frac{5x+2}{2x+3}$.

Решение: $\lim\limits_{x \to 4} \frac{5x+2}{2x+3} = \left[\frac{5 \cdot 4 + 2}{2 \cdot 4 + 3} = \frac{22}{11} = 2 \right] = 2.$

- Пример 2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2^x + 3}{2^x - 1}$.

Решение: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2^x + 3}{2^x - 1} = \left[\frac{0+3}{0-1} = -3 \right] = -3.$

Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}$.

Решение:

Разложим числитель и знаменатель на множители, для этого определим корни многочленов:

$$D=b^2-4ac,\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

$$x^2-4x-5=0,\quad D=36,\quad x_1=-1,\quad x_2=5.$$

$$x^2+3x+2=0,\quad D=1,\quad x_1=-1,\quad x_2=-2.$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-5)}{\cancel{(x+1)}(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-5}{x+2}=\frac{-6}{1}=-6$$

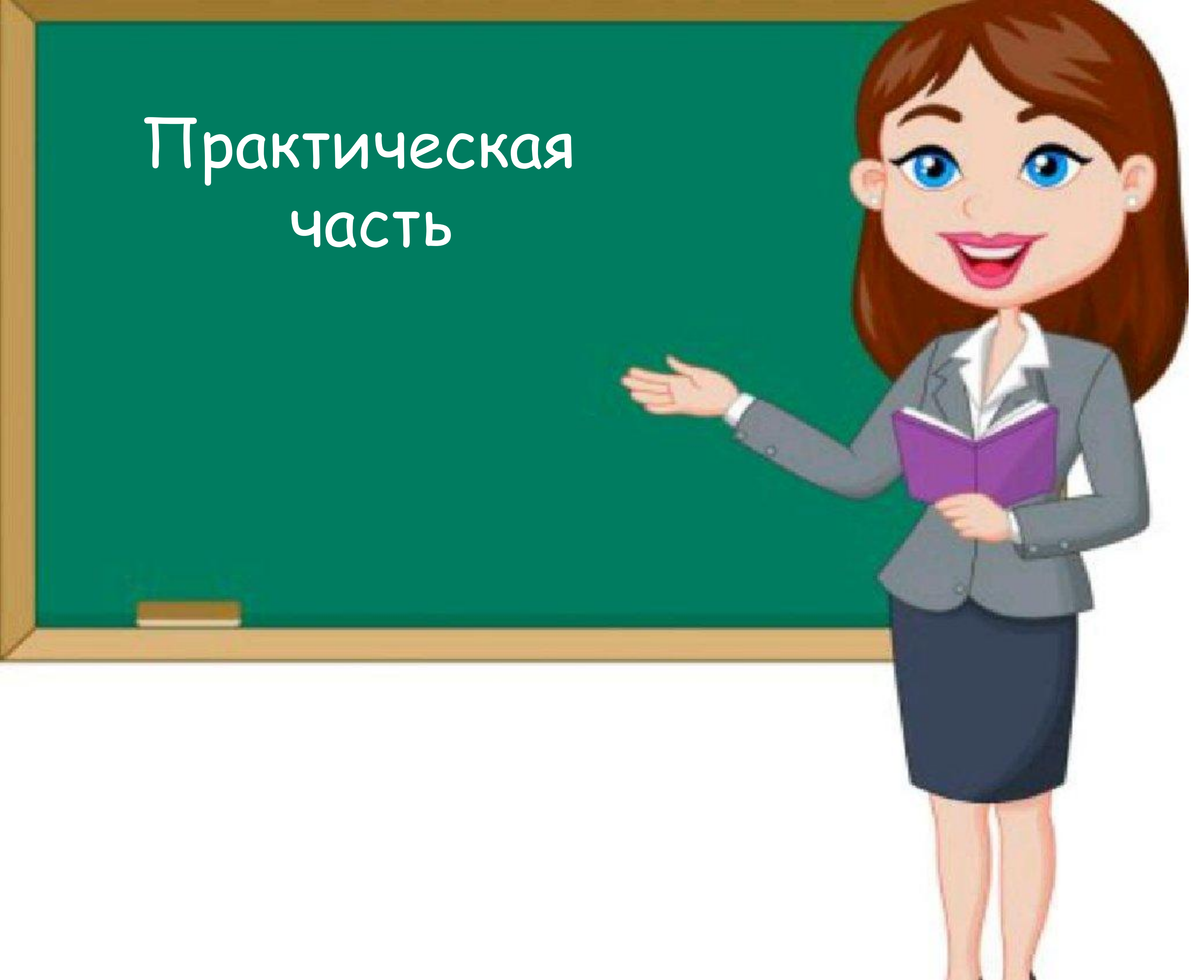
Пример. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+2x-5}{2x^2-7x+5}$

Решение:

При разложении числителя и знаменателя на множители можно производить деление многочлена на многочлен в столбик:

$$\begin{array}{r|l} -\,3x^2+2x-5 & x-1 \\ \cline{2-2} 3x^2-3x & 3x+5 \\ \cline{1-1} -\,5x-5 & \\ 5x-5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,2x^2-7x+5 & x-1 \\ \cline{2-2} 2x^2-2x & 2x-5 \\ \cline{1-1} -\,-5x+5 & \\ -5x+5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{2x^2-7x+5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(3x+5)}{\cancel{(x-1)}(2x-5)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{2x-5}=\frac{8}{-3}=-\frac{8}{3}$$


Практическая
часть

1. Является ли геометрическая прогрессия (b_n) бесконечно убывающей, если:

а) $b_2 = 2\sqrt{5}$, $b_7 = 3\sqrt{2}$; б) $b_7 = 7$, $b_{10} = 5\sqrt{2}$;

в) $b_{12} = 1 + \sqrt{3}$, $b_{15} = 2\sqrt{2}$; г) $b_{10} = \sqrt{6}$, $b_{14} = 1 + \sqrt{2}$;

д) $b_{11} = \dfrac{5}{1 - \sqrt{2}}$, $b_{16} = \sqrt{29}$; е) $b_6 = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 2}$, $b_9 = \sqrt{14}$;

ж) $b_7 = \dfrac{1}{2 - \sqrt{5}}$, $b_{10} = 3\sqrt{2}$; з) $b_8 = \dfrac{1}{2\sqrt{2} - 3}$, $b_{11} = \sqrt{33}$;

и) $b_9 = \dfrac{1}{3 - \sqrt{10}}$, $b_{19} = -\sqrt{38}$; к) $b_{10} = \dfrac{1}{\sqrt{10} - \sqrt{11}}$, $b_{20} = -\sqrt{42}$?

2. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $6; 3; \ldots;$ г) $2; \sqrt{3}; \ldots;$ ж) $-\sqrt{3}; -\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \ldots;$

б) $6; -2; \ldots;$ д) $\sqrt{6}; \sqrt{2}; \ldots;$ з) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{2}}; 1; \ldots$.

в) $-3; -2; \ldots;$ е) $2\sqrt{2}; -\sqrt{7}; \ldots;$

Вычислите:

681. а) $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 3x + 5)$; в) $\lim\limits_{x \to -1}(x^2 + 6x - 8)$;

б) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x + 3}{4x + 2}$; г) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \dfrac{7x - 14}{21x + 2}$.

682. а) $\lim\limits_{x \to 5}\sqrt{x+4}$; в) $\lim\limits_{x \to 6}\sqrt{x + 3}$;

б) $\lim\limits_{x \to 3,5}\sqrt{2x - 6}$; г) $\lim\limits_{x \to 4}\sqrt{3x - 8}$.

Вычисление пределов

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$.	2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+7x+6}{3x^2+10x+8}$	28. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-7x+12}$
4. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$.	5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$.	6. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$.
7. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+7x+2}{2x^2+x-6}$.	8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$.	17. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$
16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$	11. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3}$.	19. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$
16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$.	17. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$.	20. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$
26. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-6}{2x^2+x-3}$	23. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$.	24. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$