

Предел
последовательности.
Бесконечно убывающая
геометрическая
прогрессия



Теоретическая часть



Последовательность. Предел последовательности.

- **Определение 1.** Если по некоторому закону каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие вполне определенное число a_n , то говорят, что дана числовая последовательность $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

словами, числовая последовательность эта функция натурального аргумента $a_n = f(n)$.

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются членами последовательности, а число a_n — общим членом.

Пример. $a_n = (-1)^n / (2n + 1)$.

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго равен предыдущему умноженному на одно и тоже число не равное нулю.

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ -геометрическая прогрессия,

если для всех натуральных n выполняется равенство

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \quad b_n \neq 0 \quad q \neq 0$$

q -знаменатель геометрической прогрессии (число)

Формула суммы геометрической прогрессии

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Суммой бесконечно убывающей прогрессии является число, к которому неограниченно приближается сумма первых членов убывающей прогрессии при стремлении числа к бесконечности. Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии вычисляется по

формуле:
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Определение:

Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называется геометрической прогрессией.

Пример: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$

Знаменатель геометрической прогрессии $g = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots$

Геометрическая прогрессия называется убывающей, если модуль её знаменателя меньше единицы.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии
есть предел последовательности $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$.

Например, для прогрессии $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots$, где $b_1 = 1, q = -\frac{1}{3}$

имеем $S_1 = 1, S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}, \dots$, $S_n = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \dots$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{4}$.

Сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии
можно находить по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Предел последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Последовательностью* называется функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Если область значений последовательности – числовое множество, то последовательность называют *числовой*, если область значений – множество функций, то последовательность называют *функциональной*.

Определение.

Число b называют **пределом** **последовательности** (y_n) , если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Читают: предел последовательности (y_n) при стремлении n к бесконечности равен b или предел последовательности (y_n) равен b .

Задача №1

Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она заданна формулой:

$$a) b_n = \frac{10}{7^n} \qquad б) b_n = (-4)^{n+2}$$

Решение: а)

$$b_1 = \frac{10}{7} \qquad b_2 = \frac{10}{49} \qquad q = \frac{10}{49} : \frac{10}{7} = \frac{1}{7} \qquad \left| \frac{1}{7} \right| < 1$$

данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

$$б) b_n = (-4)^{n+2}; b_1 = (-4)^3 = -64; b_2 = (-4)^4 = 128; q = 128 : (-64) = -2; |-2| > 1, \Rightarrow$$

данная последовательность не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

№18. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если

1) $b_1 = \frac{1}{8}, q = -\frac{1}{2}$

Решение:

$$1. S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 2}{8 \cdot 3} = \frac{1}{12}$$

2) $b_5 = \frac{1}{81}, q = \frac{1}{3}$

Решение:

$$1. b_5 = b_1 q^4 \rightarrow \frac{1}{81} = b_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \rightarrow b_1 = \frac{1}{81} \div \frac{1}{81} = 1$$

$$2. S = \frac{b_1}{1-q} = 1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

3) $b_1 = 9, q = -\frac{1}{3}$

Решение:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{9}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{\frac{4}{3}} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$$

4) $b_4 = \frac{1}{8}, q = -\frac{1}{2}$

Решение:

$$1. b_4 = b_1 q^3 \rightarrow \frac{1}{8} = b_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \rightarrow b_1 = \frac{1}{8} \div \left(-\frac{1}{8}\right) = -1$$

$$2. S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$21. 1) b_n = 3 \cdot (-2)^n; b_1 = -6; b_2 = 12; b_3 = -24;$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{-6} = -2 = \frac{b_3}{b_2} = \frac{-24}{12}, \text{ так как } |q| = 2 > 1, \text{ то данная последовательность}$$

не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

$$2) b_n = -5 \cdot 4^n; b_1 = -20; b_2 = -80; b_3 = -320;$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{80}{20} = 4 = \frac{b_3}{b_2} = \frac{-320}{-80}, \text{ так как } |q| = 4 > 1, \text{ то данная последовательность}$$

не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

$$3) b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}; b_1 = 8; b_2 = -\frac{8}{3}; b_3 = -\frac{8}{9};$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-\frac{8}{3}}{8} = -\frac{1}{3} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{-\frac{8}{9}}{-\frac{8}{3}}, \text{ так как } |q| = \frac{1}{3} < 1, \text{ значит, данная последовательность}$$

является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

$$4) b_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}; b_1 = 3; b_2 = -\frac{3}{2}; b_3 = \frac{3}{4};$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}}, |q| = \frac{1}{2} < 1, \text{ значит, данная последовательность}$$

является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Примеры

- Пример 1. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+2}{2x+3}$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+2}{2x+3} = \left[\frac{5 \cdot 4 + 2}{2 \cdot 4 + 3} = \frac{22}{11} = 2 \right] = 2.$

- Пример 2. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3}{2^x - 1}$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3}{2^x - 1} = \left[\frac{0 + 3}{0 - 1} = -3 \right] = -3.$

Пример. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 3x + 2}$.

Решение:

Разложим числитель и знаменатель на множители, для этого определим корни многочленов:

$$D = b^2 - 4ac, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0, \quad D = 36, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 5.$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0, \quad D = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 3x + 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-5)}{\cancel{(x+1)}(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-5}{x+2} = \frac{-6}{1} = -6$$

Пример. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^2 - 7x + 5}$

Решение:

При разложении числителя и знаменателя на множители можно производить деление многочлена на многочлен в столбик:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2x - 5 \mid x-1 \\ \underline{3x^2 - 3x} \\ 5x - 5 \\ \underline{5x - 5} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x + 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x + 5 \mid x-1 \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ -5x + 5 \\ \underline{-5x + 5} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x - 5 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^2 - 7x + 5} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} (3x+5)}{\cancel{(x-1)} (2x-5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+5}{2x-5} = \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3}$$

Практическая часть



1. Является ли геометрическая прогрессия (b_n) бесконечно убывающей, если:

а) $b_2 = 2\sqrt{5}$, $b_7 = 3\sqrt{2}$;

б) $b_7 = 7$, $b_{10} = 5\sqrt{2}$;

в) $b_{12} = 1 + \sqrt{3}$, $b_{15} = 2\sqrt{2}$;

г) $b_{10} = \sqrt{6}$, $b_{14} = 1 + \sqrt{2}$;

д) $b_{11} = \frac{5}{1 - \sqrt{2}}$, $b_{16} = \sqrt{29}$;

е) $b_6 = \frac{1}{\sqrt{3} - 2}$, $b_9 = \sqrt{14}$;

ж) $b_7 = \frac{1}{2 - \sqrt{5}}$, $b_{10} = 3\sqrt{2}$;

з) $b_8 = \frac{1}{2\sqrt{2} - 3}$, $b_{11} = \sqrt{33}$;

и) $b_9 = \frac{1}{3 - \sqrt{10}}$, $b_{19} = -\sqrt{38}$;

к) $b_{10} = \frac{1}{\sqrt{10} - \sqrt{11}}$, $b_{20} = -\sqrt{42}$?

2. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $6; 3; \dots$;

г) $2; \sqrt{3}; \dots$;

ж) $-\sqrt{3}; -\frac{2}{\sqrt{3}}; \dots$;

б) $6; -2; \dots$;

д) $\sqrt{6}; \sqrt{2}; \dots$;

з) $\frac{1}{1 - \sqrt{2}}; 1; \dots$

в) $-3; -2; \dots$;

е) $2\sqrt{2}; -\sqrt{7}; \dots$;

Вычислите:

681. а) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5);$

в) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 6x - 8);$

б) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x + 3}{4x + 2};$

г) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{7x - 14}{21x + 2}.$

682. а) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x + 4};$

в) $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{x + 3};$

б) $\lim_{x \rightarrow 3,5} \sqrt{2x - 6};$

г) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{3x - 8}.$

Вычисление пределов

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 7x + 6}{3x^2 + 10x + 8}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 7x + 12}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 7x + 3}{2x^2 + x - 1}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 7x + 2}{2x^2 + x - 6}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - x - 2}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x - 3}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 3x - 4}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 3}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 21}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 11x + 6}$$