

Простейшие свойства линейных пространств. Линейная зависимость и независимость.

- **Простейшие свойства линейных пространств. Линейная зависимость и независимость.**

Опр. Пусть V – линейное пространство. Вектор $c \in V$ является разностью векторов $b \in V$ и $a \in V$, если $c+a=b$. Обозначение: $c=b-a$.

- **Простейшие свойства линейных пространств. Линейная зависимость и независимость.**

Опр. Пусть V – линейное пространство. Вектор $c \in V$ является разностью векторов b и a , если $c+a=b$. Обозначение: $c=b-a$.

Теорема о простейших свойствах линейных пространств.

- **Простейшие свойства линейных пространств. Линейная зависимость и независимость.**

Опр. Пусть V – линейное пространство. Вектор $c \in V$ является разностью векторов b и a , если $c+a=b$. Обозначение: $c=b-a$.

Теорема о простейших свойствах линейных пространств.

- 1) В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

- **Простейшие свойства линейных пространств. Линейная зависимость и независимость.**

Опр. Пусть V – линейное пространство. Вектор $c \in V$ является разностью векторов b и a , если $c+a=b$. Обозначение: $c=b-a$.

Теорема о простейших свойствах линейных пространств.

1) В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

Доказательство.

От противного. Пусть есть два нулевых вектора: θ_1 и θ_2 . Тогда $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

ЧТД

Доказательство.

От противного. Пусть есть два нулевых вектора: θ_1 и θ_2 . Тогда $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

ЧТД

2) Для $\forall a \in V$ существует единственный противоположный вектор $(-a) \in V$.

Доказательство.

От противного. Пусть есть два нулевых вектора: θ_1 и θ_2 . Тогда $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

ЧТД

2) Для $\forall a \in V$ существует единственный противоположный вектор $(-a) \in V$.

Доказательство.

От противного. Пусть для $\forall a \in V$ есть два противоположных вектора: b и c : $a + c = \theta$ и $a + b = \theta$.

Доказательство.

От противного. Пусть есть два нулевых вектора: θ_1 и θ_2 . Тогда $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

ЧТД

2) Для $\forall a \in V$ существует единственный противоположный вектор $(-a) \in V$.

Доказательство.

От противного. Пусть для $\forall a \in V$ есть два противоположных вектора: b и c : $a + c = \theta$ и $a + b = \theta$.

Тогда $b = b + \theta = b + (a + c) = (b + a) + c = \theta + c = c$.

ЧТД

Тогда $b = b + \theta = b + (a + c) = (b + a) + c = \theta + c = c$.

ЧТД

3) В линейном пространстве

А) $0a = \theta$ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta$, $\forall \alpha \in R$

3) В линейном пространстве

А) $0a = \theta$ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta$, $\forall \alpha \in R$

Доказательство.

А) Покажем, что для $\forall b \in V \forall a \in V$ выполнено $b+0a=b$. Тогда $0a = \theta$.

3) В линейном пространстве

А) $0a = \theta$ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta$, $\forall \alpha \in R$

Доказательство.

А) Покажем, что для $\forall b \in V \forall a \in V$ выполнено $b+0a=b$. Тогда $0a = \theta$.

$b+0a = b + \theta + 0a = b + ((-a) + a) + 0a = (b + (-a)) + a + 0a =$

3) В линейном пространстве

А) $0a = \theta$ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta$, $\forall \alpha \in R$

Доказательство.

А) Покажем, что для $\forall b \in V \forall a \in V$ выполнено $b+0a=b$. Тогда $0a = \theta$.

$$\begin{aligned} b+0a &= b + \theta + 0a = b + ((-a) + a) + 0a = (b + (-a)) + a + 0a = \\ &= (b + (-a)) + 1a + 0a = (b + (-a)) + (1+0)a = (b + (-a)) + a = \end{aligned}$$

3) В линейном пространстве

А) $0a = \theta$ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta$, $\forall \alpha \in R$

Доказательство.

А) Покажем, что для $\forall b \in V \forall a \in V$ выполнено $b+0a=b$. Тогда $0a = \theta$.

$$\begin{aligned} b+0a &= b+ \theta+0a = b+((-a)+ a)+0a = (b+(-a))+ a +0a = \\ &= (b+(-a))+ 1a +0a = (b+(-a))+ (1+0)a = (b+(-a))+ a = \\ &= b+((-a)+ a) = b+ \theta = b. \end{aligned}$$

Следовательно, $b+0a=b$. Значит, $0a = \theta$.

3) В линейном пространстве

А) $0a = \theta$ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta$, $\forall \alpha \in R$

Доказательство.

А) Покажем, что для $\forall b \in V \forall a \in V$ выполнено $b+0a=b$. Тогда $0a = \theta$.

$$\begin{aligned} b+0a &= b+ \theta+0a = b+((-a)+ a)+0a = (b+(-a))+ a +0a = \\ &= (b+(-a))+ 1a +0a = (b+(-a))+ (1+0)a = (b+(-a))+ a = \\ &= b+((-a)+ a) = b+ \theta = b. \end{aligned}$$

Следовательно, $b+0a=b$. Значит, $0a = \theta$.

Б) $\alpha\theta =$ по пункту А) $= \alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a =$ по пункту А) $= \theta$.

ЧТД

б) $\alpha\theta = \text{по пункту А)} = \alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a = \text{по пункту А)} = \theta$.

ЧТД

4) В линейном пространстве из равенства $\alpha a = \theta$ следует, что либо $a = \theta$, либо $\alpha = 0$.

б) $\alpha\theta = \text{по пункту А)} = \alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a = \text{по пункту А)} = \theta$.

ЧТД

4) В линейном пространстве из равенства $\alpha a = \theta$ следует, что либо $a = \theta$, либо $\alpha = 0$.

Доказательство.

Дано $\alpha a = \theta$. Если $\alpha = 0$, то $\alpha a = 0a = \theta$.

б) $\alpha\theta = \text{по пункту А)} = \alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a = \text{по пункту А)} = \theta$.

ЧТД

4) В линейном пространстве из равенства $\alpha a = \theta$ следует, что либо $a = \theta$, либо $\alpha = 0$.

Доказательство.

Дано $\alpha a = \theta$. Если $\alpha = 0$, то $\alpha a = 0a = \theta$.

Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда $a = 1a = \left(\frac{1}{\alpha} \alpha\right)a = \frac{1}{\alpha}(\alpha a) = \frac{1}{\alpha} \theta = \theta$.

ЧТД

Доказательство.

Дано $\alpha a = \theta$. Если $\alpha = 0$, то $\alpha a = 0a = \theta$.

Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда $a = 1a = \left(\frac{1}{\alpha} \alpha\right)a = \frac{1}{\alpha}(\alpha a) = \frac{1}{\alpha} \theta = \theta$.

ЧТД

5) В линейном пространстве для $\forall a \in V$ противоположный вектор имеет вид $(-a) = -1a$

Доказательство.

Дано $\alpha a = \theta$. Если $\alpha = 0$, то $\alpha a = 0a = \theta$.

Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда $a = 1a = \left(\frac{1}{\alpha} \alpha\right)a = \frac{1}{\alpha}(\alpha a) = \frac{1}{\alpha} \theta = \theta$.

ЧТД

5) В линейном пространстве для $\forall a \in V$ противоположный вектор имеет вид $(-a) = -1a$

Доказательство.

Рассмотрим $a + (-1a) = 1a + (-1a) = (1-1)a = 0a = \theta$.

Следовательно, $-1a$ – противоположный к a .

ЧТД

Доказательство.

Рассмотрим $a + (-1a) = 1a + (-1a) = (1-1)a = 0a = \theta$.

Следовательно, $-1a$ – противоположный к a .

ЧТД

б) Для любых $b \in V$ и $a \in V$ существует и единственна разность $c \in V$.

Доказательство.

Рассмотрим $a + (-1a) = 1a + (-1a) = (1-1)a = 0a = \theta$.

Следовательно, $-1a$ – противоположный к a .

ЧТД

б) Для любых $b \in V$ и $a \in V$ существует и единственна разность $c \in V$.

Доказательство.

Докажем существование. Рассмотрим

$$a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = \theta + b = b.$$

Доказательство.

Рассмотрим $a+(-1a)=1a+(-1a)=(1-1)a=0a=\theta$.

Следовательно, $-1a$ – противоположный к a .

ЧТД

б) Для любых $b \in V$ и $a \in V$ существует и единственна разность $c \in V$.

Доказательство.

Докажем существование. Рассмотрим

$$a+(b+(-a))=(a+(-a))+b=\theta+b=b.$$

Следовательно, $(b+(-a))=b-a$, т. е. это вектор разности c .

Существование показано. И одновременно показано, как находить разность: нужно к вектору b прибавить противоположный к a .

Доказательство.

Докажем существование. Рассмотрим

$$a+(b+(-a))=(a+(-a))+b= \theta+b=b.$$

Следовательно, $(b+(-a))=b-a$, т. е. это вектор разности c .

Существование показано. И одновременно показано, как находить разность: нужно к вектору b прибавить противоположный к a .

Докажем единственность. От противного. Пусть существует две различные разности: $c=b-a$ и $d=b-a$.

Тогда

$$d=d+ \theta=d+(a+(-a))=(d+a)+(-a)=b+(-a)=c.$$

ЧТД

Докажем единственность. От противного. Пусть существует две различные разности: $c=b-a$ и $d=b-a$.

Тогда

$$d = d + \theta = d + (a + (-a)) = (d + a) + (-a) = b + (-a) = c.$$

ЧТД

Опр. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$ называется линейной комбинацией (л/к) векторов a_1, a_2, \dots, a_k с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Опр. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$ называется линейной комбинацией (л/к) векторов a_1, a_2, \dots, a_k с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Если вектор b является л/к векторов a_1, a_2, \dots, a_k :

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k, \quad (1)$$

то говорят, что вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, \dots, a_k , а представление (1) называется разложением вектора b по векторам a_1, a_2, \dots, a_k .

Если вектор b является л/к векторов a_1, a_2, \dots, a_k :

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k, \quad (1)$$

то говорят, что вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, \dots, a_k , а представление (1) называется разложением вектора b по векторам a_1, a_2, \dots, a_k .

Пример.

$$a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (3, 4, 5), \quad b = (-1, -2, -3) = 2 a_1 - a_2$$

Пример.

$$a_1=(1,1,1), a_2=(3,4,5), b=(-1,-2,-3)=2 a_1 - a_2$$

Опр. Система векторов $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ называется линейно зависимой (л/з), если $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = \theta$ и существует хотя бы 1 коэффициент $\alpha_i \neq 0$.

Пример.

$$a_1=(1,1,1), a_2=(3,4,5), b=(-1,-2,-3)=2 a_1 - a_2$$

Опр. Система векторов $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ называется линейно зависимой (л/з), если $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = \theta$ и существует хотя бы 1 коэффициент $\alpha_i \neq 0$.

Опр. Система векторов $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ называется линейно независимой (л/н), если $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = \theta$ тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\alpha_i = 0$.

$$1) a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (0, 1, 1), a_3 = (0, 0, 3)$$

Решение

Составим линейную комбинацию (ЛК):

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \theta \Rightarrow \lambda_1 (1, 2, 3) + \lambda_2 (0, 1, 1) + \lambda_3 (0, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1) + (0, \lambda_2, \lambda_2) + (0, 0, 3\lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

и ненулевых решений
найти нельзя

\Rightarrow система векторов ЛК (линейно независимая)

$$2) f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = 2x + x^2, f_4 = 1 + 2x + x^2$$

Решение

Легко заметить, что $f_4 = f_1 + f_3 \Rightarrow f_1 + 0 \cdot f_2 + f_3 - f_4 = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists$ линейно независимые $\&$ базис \Rightarrow $n/3$
(линейно зависимая)

Теорема о свойствах линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

1) Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой системой.

Теорема о свойствах линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

- 1) Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой системой.
- 2) Система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, является линейно зависимой системой.

Теорема о свойствах линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

- 1) Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой системой.
- 2) Система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, является линейно зависимой системой.
- 3) Если часть системы является линейно зависимой подсистемой, то и вся система векторов будет линейно зависимой.

Теорема о свойствах линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

- 1) Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой системой.
- 2) Система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, является линейно зависимой системой.
- 3) Если часть системы является линейно зависимой подсистемой, то и вся система векторов будет линейно зависимой.
- 4) Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.

4) Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.

Доказательство.

1)

Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой (ЛЗ)

Решение. Дана система $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \theta, a_{k+1}, \dots, a_m \in V$.
Составим линейную комбинацию

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1} + \lambda_k \theta + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \dots + \lambda_m a_m = \theta$$

Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой (Л/З)

Решение. Дана система $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \theta, a_{k+1}, \dots, a_m \in V$.
Составим линейную комбинацию

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1} + \lambda_k \theta + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \dots + \lambda_m a_m = \theta$$

Подберем коэффициенты так, чтобы среди них был бы хотя бы один ненулевой коэффициент: пусть $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k-1} =$

$$= \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_m = 0, \lambda_k = 1 \Rightarrow 0 \cdot a_1 + \dots + 0 a_{k-1} + 1 \cdot \theta + 0 \cdot a_{k+1} + \dots +$$

$$+ 0 \cdot a_m = \theta \quad \text{и} \quad \exists \lambda_k \neq 0 \Rightarrow \text{Л/З.}$$

2 Доказать, что система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, л/з.

Решение. Дана $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k \in V$ и $a_i = \delta a_j$, $\delta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_i (\delta a_j) + \dots + \lambda_j a_j + \dots + \lambda_k a_k = \theta. (*)$$

2 Доказать, что система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, л/з.

Решение. Дана $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k \in V$ и $a_i = \delta a_j$, $\delta \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_i \delta a_j + \dots + \lambda_j a_j + \dots + \lambda_k a_k = \theta. (*)$

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{j-1} = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_k = 0$

$$\lambda_i \delta = -\lambda_j$$

Если $\delta = 0$, то это 1.

Решение. Дана $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k \in V$ и $a_i = \delta a_j$, $\delta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_i \delta a_j + \dots + \lambda_j a_j + \dots + \lambda_k a_k = \theta. \quad (*)$$

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{j-1} = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_k = 0$

$$\lambda_i \delta = -\lambda_j$$

Если $\delta = 0$, то это \blacksquare 1.

Если $\delta \neq 0$, то $\lambda_i = -\frac{\lambda_j}{\delta}$. Пусть $\lambda_j = 1, \lambda_i = -\frac{1}{\delta} \Rightarrow$

линейная комбинация $(*) = \theta$ и $\exists \lambda_j, \lambda_i \neq 0 \Rightarrow \alpha/\beta$.

3) Если часть системы является линейно зависимой подсистемой, то и вся система векторов будет линейно зависимой.

Доказательство.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ и векторы a_i, a_j, \dots, a_m являются линейно зависимыми, т.е. $\alpha_i a_i + \alpha_j a_j + \dots + \alpha_m a_m = \theta$ и существует хотя бы 1 коэффициент $\alpha_i \neq 0$.

3) Если часть системы является линейно зависимой подсистемой, то и вся система векторов будет линейно зависимой.

Доказательство.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ и векторы a_i, a_j, \dots, a_m являются линейно зависимыми, т.е. $\alpha_i a_i + \alpha_j a_j + \dots + \alpha_m a_m = \theta$ и существует хотя бы 1 коэффициент $\alpha_i \neq 0$.

Тогда можно приписать остальные векторы с нулевыми коэффициентами

$$0a_1 + 0a_2 + \dots + \alpha_i a_i + \alpha_j a_j + \dots + \alpha_m a_m + \dots + 0a_k = \theta$$

и существует хотя бы 1 коэффициент $\alpha_i \neq 0$. Следовательно, вся система является линейно зависимой. ЧТД.

4) Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.

Доказательство.

Нам дана линейно независимая система.

Докажем от противного. Пусть у этой системы векторов существует какая-то линейно зависимая подсистема. Тогда по пункту 3) и вся система будет линейно зависимой.

Противоречие. Следовательно, не существует линейно зависимой подсистемы.

ЧТД.

Доказать, что для \forall векторов a, b, c и \forall чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ векторы $\alpha a - \beta b, \gamma b - \alpha c, \beta c - \gamma a$ л.з.

Решение Составим л.к

$$(*) \quad \underbrace{\alpha}_{\lambda_1} (\alpha a - \beta b) + \underbrace{\beta}_{\lambda_2} (\gamma b - \alpha c) + \underbrace{\alpha}_{\lambda_3} (\beta c - \gamma a) = \theta$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то это система с нулевыми векторами \Rightarrow л.з

Если, например $\lambda_1 \neq 0$, то $(*) = \alpha \alpha a - \alpha \beta b + \beta \gamma b - \beta \alpha c + \alpha \beta c - \alpha \gamma a = \theta$

\Rightarrow л.з

Dana sistem vektor $f_1(t) = 1 - t^2$, $f_2(t) = 1 + t^3$,
 $f_3(t) = t - t^3$, $f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Hitung skalar masing-masing

a) $5f_1 + f_2 - 4f_3$ dan b) $f_1 + 9f_2 - 4f_4$

Dana sistem monomial $f_1(t) = 1 - t^2$, $f_2(t) = 1 + t^3$,
 $f_3(t) = t - t^3$, $f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Hitung selanjutnya

a) $5f_1 + f_2 - 4f_3$ dan b) $f_1 + 9f_2 - 4f_4$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{a) } 5f_1 + f_2 - 4f_3 &= 5(1 - t^2) + 1 + t^3 - 4(t - t^3) = 5 - 5t^2 + 1 + t^3 - 4t + 4t^3 = \\ &= 6 - 4t - 5t^2 + 5t^3 \end{aligned}$$

Dana vektora unormalenob $f_1(t) = 1 - t^2$, $f_2(t) = 1 + t^3$,
 $f_3(t) = t - t^3$, $f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Stavimo sledeće kombinacije

$$a) 5f_1 + f_2 - 4f_3 \quad \text{u} \quad \delta) f_1 + 9f_2 - 4f_4$$

Rešenje

$$a) 5f_1 + f_2 - 4f_3 = 5(1 - t^2) + 1 + t^3 - 4(t - t^3) = 5 - 5t^2 + 1 + t^3 - 4t + 4t^3 = \\ = 6 - 4t - 5t^2 + 5t^3$$

$$\delta) f_1 + 9f_2 - 4f_4 = 1 - t^2 + 9(1 + t^3) - 4(1 + t + t^2 + t^3) = 6 - 4t - 5t^2 + 5t^3$$

$$\Rightarrow 5f_1 + f_2 - 4f_3 = f_1 + 9f_2 - 4f_4 \Rightarrow -4f_1 + 8f_2 + 4f_3 - 4f_4 = 0 \Rightarrow$$

vektora f_1, f_2, f_3, f_4 l.b.

Задача

Найти разложение вектора $f = 6 - 4t - 5t^2 + 5t^3$ по
векторам $f_1 = 1 - t^2$, $f_2 = 1 + t^3$, $f_3 = t - t^2$, $f_4 = 1 + t + t^2 + t^3$

Задача

Найти разложение вектора $f = 6 - 4t - 5t^2 + 5t^3$ по
суммам $f_1 = 1 - t^2$, $f_2 = 1 + t^3$, $f_3 = t - t^2$, $f_4 = 1 + t + t^2 + t^3$

Решение

$$6 - 4t - 5t^2 + 5t^3 = \lambda_1(1 - t^2) + \lambda_2(1 + t^3) + \lambda_3(t - t^2) +$$
$$+ \lambda_4(1 + t + t^2 + t^3) = 1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4) + t(\lambda_3 + \lambda_4) + t^2(-\lambda_1 + \lambda_4) +$$
$$+ t^3(\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 6 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = -4 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 = -5 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -4 - \lambda_4 \\ \lambda_1 = \lambda_4 + 5 \end{cases}$$

$$+ t^3 (\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 6 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = -4 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 = -5 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -4 - \lambda_4 \\ \lambda_1 = \lambda_4 + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_4 + 5 + \lambda_2 + \lambda_4 = 6 \\ \lambda_2 + 4 + \lambda_4 + \lambda_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = -2\lambda_4 + 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_4 + 5 \\ \lambda_2 = -2\lambda_4 + 1 \\ \lambda_3 = -4 - \lambda_4 \\ \forall \lambda_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_4 + 5 \\ \lambda_2 = -2\lambda_4 + 1 \\ \lambda_3 = -4 - \lambda_4 \\ \forall \lambda_4 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

\Rightarrow все разложения иллемом f_4

$$6 - 4t - 5t^2 + 5t^3 = (\lambda_4 + 5) f_1 + (-2\lambda_4 + 1) f_2 + (-4 - \lambda_4) f_3 + \lambda_4 f_4.$$

отвеч

Если брать какие-то конкретные λ_4 , то можно вывести явный вид этих разложений.

Например, при $\lambda_4 = 0$ получим $6 - 4t - 5t^2 + 5t^3 = 5f_1 + f_2 - 4f_3 -$

§5. Ранг матрицы.

Опр. Рангом ненулевой матрицы называется максимальный порядок ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы равен нулю.

Обозначение: $\text{rg } A$, $\text{rang } A$.

Из определения следует, что ранг матрицы не превосходит её размеров.

Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Все миноры третьего порядка равны нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Найти ранг матрицы

Не все миноры второго порядка равны нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Ранг матрицы A = 2

Опр. Пусть $\text{rg } A = r > 0$. Любой ненулевой минор r -го порядка этой матрицы называется базисным минором, а строки и столбцы, в которых расположен базисный минор, называются базисными строками и столбцами.

Базисный минор НЕ обязательно один, их может быть несколько, но все они имеют один и тот же порядок, равный рангу матрицы.

Найти ранг матрицы

Не все миноры второго порядка равны нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \quad (*)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \quad (**)$$

Ранг матрицы A = 2

Базисные миноры: (*), (**)

Теорема о базисном миноре.

Базисные строки(столбцы) матрицы являются линейно независимыми. Любая строка (столбец) является линейной комбинацией базисных строк(столбцов).

Без доказательства.

Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

Определитель квадратной матрицы размера $n \times n$ равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо его строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов).

Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

Определитель квадратной матрицы размера $n \times n$ равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо его строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов).

Доказательство.

1) Достаточность.

Дано: строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов). Поэтому, по свойствам определителя, определитель матрицы равен нулю

Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

Определитель квадратной матрицы размера $n \times n$ равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо его строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов).

Доказательство.

1) Достаточность.

Дано: строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов). Поэтому, по свойствам определителя, определитель матрицы равен нулю

2) Необходимость.

Определитель матрицы равен нулю. Поэтому $\text{rg } A < n$ и по теореме о базисном миноре есть хотя бы одна небазисная строка, которая будет выражаться через базисные.

ЧТД

Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

Определитель квадратной матрицы размера $n \times n$ равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо его строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов).

Эта теорема позволяет выяснять зависимость или независимость векторов не по определению. Составляем из векторов построчно матрицу и считаем её определитель (если матрица квадратная). Если определитель равен нулю, то это значит, что какая-то строка выразилась через другую, т.е. система векторов будет зависимой.

Эта теорема позволяет выяснять зависимость или независимость векторов не по определению. Составляем из векторов построчно матрицу и считаем её определитель (если матрица квадратная). Если определитель равен нулю, то это значит, что какая-то строка выразилась через другую, т.е. система векторов будет зависимой.

Примеры.

Выяснить, линейно зависимая или линейно независимая система векторов

1) $a_1=(6,-4,-2)$, $a_2=(-9,6,3)$, $a_3=(-3,6,3)$.

Составляем определитель :
$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -9 & 6 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Поэтому, система зависимая.

Примеры.

Выяснить, линейно зависимая или линейно независимая система векторов

$$1) a_1=(6,-4,-2), a_2=(-9,6,3), a_3=(-3,6,3).$$

$$\text{Составляем определитель: } \begin{vmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -9 & 6 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Поэтому, система зависимая

$$2) a_1=(5,2,1), a_2=(-1,4,2), a_3=(-1,-1,6).$$

$$\text{Составляем определитель: } \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 120 - 4 + 1 + 4 + 10 + 12 \neq 0$$

Поэтому, система линейно независимая.

Опр. Пусть есть две системы векторов. Если каждый вектор первой системы линейно выражается через векторы второй системы, то говорят, что первая система линейно выражается через вторую.

Опр. Пусть есть две системы векторов. Если каждый вектор первой системы линейно выражается через векторы второй системы, то говорят, что первая система линейно выражается через вторую.

Теорема.

Если бОльшая система векторов(по количеству векторов) линейно выражается через меньшую, то бОльшая система линейно зависима.

Без доказательства.

Свойства ранга матрицы.

92

Теор. Ранг матрицы равен максимальному числу ее л/к
строк (стб).

Свойства ранга матрицы.

92

Теор. Ранг матрицы равен максимальному числу ее л/к строк (стб).

До Пусть $\text{rg } A = r > 0$. Возьмем базисные строки a'_1, \dots, a'_r . Их r штук и они л/к. При этом, по теор. о базисном миноре и другие строки $a'_k, k \neq 1, \dots, r$, л/в через базисные строки \Rightarrow система $a'_1, a'_2, \dots, a'_r, a'_k$ л/з \Rightarrow максимальное возможное число л/к строк равно r . Аналогично для стб. Упр.

Следствие $\text{rg } A = \text{rg } A^T$

Свойства ранга матрицы.

92

Теор. Ранг матрицы равен максимальному числу ее л/к строк (стб).

До Пусть $\text{rg } A = r > 0$. Возьмем базисные строки a'_1, \dots, a'_r . Их r строк и они л/к. При этом, по теор. о базисном миноре \neq другие строки $a'_k, k \neq 1, \dots, r$, л/к через базисные строки \Rightarrow система $a'_1, a'_2, \dots, a'_r, a'_k$ л/з \Rightarrow максимальное возможное число л/к строк равно r . Аналогично для стб. Чтв.

Следствие $\text{rg } A = \text{rg } A^T$

Теор Если все строки (стб) n -угол A л/к через $\text{rg}(A)$ и угл B , то $\text{rg } A \leq \text{rg } B$.

Следствие $\text{rk} A = \text{rk} A^T$

Теперь Если все столбцы (стр) n -угол A и/или m стр (ст) m -угол B , то $\text{rk} A \leq \text{rk} B$.

Доказательство Пусть $\text{rk} A = r$, $\text{rk} B = s$ и a_1, \dots, a_r и b_1, \dots, b_s - базисные стр (ст) A и B соответственно. Докажем, что $r \leq s$. От противного.

Следствие $\text{rk } A = \text{rk } A^T$

Тео Если все строки (стб) n -уго A \perp / \parallel ряду стр (стб) m -уго B , то $\text{rk } A \leq \text{rk } B$.

До Пусть $\text{rk } A = r$, $\text{rk } B = s$ и a_1, \dots, a_r и b_1, \dots, b_s - базисные стб A и B соответственно. Д-и, что $r \leq s$. От противного.

Пусть $r > s$. По условию теоремы все стб a_1, \dots, a_r \perp / \parallel ряду столбцов m -уго B , которые, в свою очередь (по т. о. базисности и линейности) \perp / \parallel ряду баз. стб. $b_1, \dots, b_s \Rightarrow$ система a_1, \dots, a_r \perp / \parallel ряду b_1, \dots, b_s и $r > s$ (т.е. большая система вект. \perp / \parallel ряду меньшей) \Rightarrow

a_1, \dots, a_r \perp / \parallel (большая система \perp / \parallel). Противоречие, т.к. a_1, a_2 - базисные \Rightarrow д.и. Следовательно, $r \leq s$. Утв.

Тем. Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей; т.е. если $C=AB$, то $\text{rk } C \leq \text{rk } A$ и $\text{rk } C \leq \text{rk } B$.

Теперь Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей, т.е. если $C=AB$, то $\text{rk } C \leq \text{rk } A$ и $\text{rk } C \leq \text{rk } B$.

До Когда проводим ~~пре~~ перемножение матриц, то заметим, что строки матрицы C и/или через строки B , а столбцы C - через столбцы A . Для матриц 2×2 еще раз покажем,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$b_1' = (b_{11} \ b_{12}) \quad c_1' = a_{11}b_1' + a_{12}b_2' =$$

$$b_2' = (b_{21} \ b_{22}) \quad = a_{11}(b_{11}, b_{12}) + a_{12}(b_{21} \ b_{22}) =$$

$$= (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{21}, a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})$$

उपर्युक्त
न/ब उपर्युक्त

अब C न/ब उपर्युक्त A

$$c_1 = b_{11}a_1 + b_{21}a_2$$

Тер Ранг произведенной матрицы не превосходит рангов сомножителей: т.е. если $C=AB$, то $\text{rk } C \leq \text{rk } A$ и $\text{rk } C \leq \text{rk } B$.

До Когда произведена ~~из~~ перемноженная матрица, то заметим, что строки матрицы C и/или B через строки B , а столбцы C - через столбцы A .

Зам \Rightarrow по предыдущему утверждению $\text{rk } C \leq \text{rk } A$ и $\text{rk } C \leq \text{rk } B$ ч.т.д.

Тер (инвариантность ранга при умножении на невырожденную матрицу).

Ранг матрицы не меняется при умножении её на невырожденную матрицу.

т.е. (инвариантность ранга при умножении на невырожд. м.м.).

Ранг м.м. не меняется при умножении её на невырожд. м.м.

об Дана м.м. A , $\text{rk } A = r$. Умножим её на невырожд. м.м. P , $|P| \neq 0$.

$\Rightarrow C = AP \Rightarrow$ по м.м. т.е. $\text{rk } C \leq \text{rk } A$.

Теперь, т.к. P невырожд., то $\exists P^{-1} \Rightarrow C = AP \mid P^{-1} \Rightarrow$

$A = CP^{-1} \Rightarrow$ по м.м. т.е. $\text{rk } A \leq \text{rk } C$

$\Rightarrow \text{rk } C = \text{rk } A$.

Аналогично можно умножить слева

$C = QA, |Q| \neq 0$ ч.м.

т.е. (инвариантность ранга при умножении на невырожденную матрицу).

Ранг матрицы не меняется при умножении её на невырожденную матрицу.

Дл. Дана матрица A , $\text{rk } A = r$. Умножим её на невырожденную матрицу P , $|P| \neq 0$.

$\Rightarrow C = AP \Rightarrow$ по теореме о ранге $\text{rk } C \leq \text{rk } A$.

Теперь, т.к. P невырожденная, то $\exists P^{-1} \Rightarrow C = AP \mid P^{-1} \Rightarrow$

$A = CP^{-1} \Rightarrow$ по теореме о ранге $\text{rk } A \leq \text{rk } C$

$\Rightarrow \text{rk } C = \text{rk } A$.

Аналогично можно умножить слева

$C = QA, |Q| \neq 0$ ч.т.д.

Теорема об инвариантности ранга относительно элементарных преобразований.

Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.

Доказательство.

Элементарные преобразования матрицы эквивалентны умножению исходной матрицы на матрицы элементарных преобразований. Поэтому, по предыдущей теореме, ранг не меняется.

ЧТД.

Способ вычисления ранга матрицы.

Исходную матрицу с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду. Ранг при этом не меняется. Потом находят либо максимальный ненулевой минор (его размер и будет рангом), либо максимальное количество ненулевых строк(их количество и будет рангом)

Классический

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} a_4' - a_1' \\ a_3' - a_2' \\ a_2' - 3a_1' \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \{a_4' - a_2'\}$$

Главный пункт

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} a_4' - a_1' \\ a_3' - a_2' \\ a_2' - 3a_1' \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \{a_4' - a_2'\}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \{a_4' - a_3'\} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти ранг

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} a_4' - a_1' \\ a_3' - a_2' \\ a_2' - 3a_1' \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \{a_4' - a_2'\}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \{a_4' - a_3'\} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 строки не обнулилось $\Rightarrow \text{рр } A = 3$

Или $M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$. Его размер $3 \times 3 \Rightarrow \text{рр } A = 3$

Д/З ① Пусть x, y, z — л/к система. Будем ли л/к система векторов

$$x+y, y+z, z+x$$

(Да)

② Известны ли системы вект. л/с?

а) $(2, -3, 1); (3, -4, 5); (1, -4, 3)$

(нет)

б) $(-1, -2, 3); (4, 0, 3); (4, 2, -3)$

(да)

③ Проверим ли d как л/к $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{a} = (2, 3, 1), \vec{b} = (5, 7, 0), \vec{c} = (3, -2, 4), \vec{d} = (4, 12, -3)$$

$$d = a + b - c$$

④ $\vec{a} = (6, 4, 2), \vec{b} = (-9, 6, 3), \vec{c} = (-3, 6, 3)$

$$c = \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b$$

Проверим ли \vec{c} в виде л/к \vec{a}, \vec{b} :

5. Вычислить ранг матрицы

a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

б)
$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

в)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \quad (2)$$

г)
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$