Простейшие свойства линейных пространств. Линейная зависимость и независимость.

- **Простейшие свойства линейных пространств. Линейная зависимость и независимость.**

Опр. Пусть V – линейное пространство. Вектор c$\in V$ является разностью векторов b $\in V$ и a $\in V$, если c+a=b. Обозначение: c=b-a.

- **Простейшие свойства линейных пространств. Линейная зависимость и независимость.**

Опр. Пусть V – линейное пространство. Вектор c$\in V$ является разностью векторов b и a, если c+a=b. Обозначение: c=b-a.

Теорема о простейших свойствах линейных пространств.

- **Простейшие свойства линейных пространств. Линейная зависимость и независимость.**

Опр. Пусть V – линейное пространство. Вектор c$\in V$ является разностью векторов b и a, если c+a=b. Обозначение: c=b-a.

Теорема о простейших свойствах линейных пространств.

1) В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

• Простейшие свойства линейных пространств. Линейная зависимость и независимость.

Опр. Пусть V – линейное пространство. Вектор c$\in V$ является разностью векторов b и a, если c+a=b. Обозначение: c=b-a.

Теорема о простейших свойствах линейных пространств.

1) В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

Доказательство.

От противного. Пусть есть два нулевых вектора: θ_1 и θ_2 . Тогда $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

ЧТД

Доказательство.

От противного. Пусть есть два нулевых вектора: θ_1 и θ_2. Тогда $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

ЧТД

2) Для $\forall a \in V$ существует единственный противоположный вектор $(-a) \in V$.

Доказательство.

От противного. Пусть есть два нулевых вектора: θ_1 и θ_2 . Тогда $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

ЧТД

2) Для $\forall a \in V$ существует единственный противоположный вектор $(-a) \in V$.

Доказательство.

От противного. Пусть для $\forall a \in V$ есть два противоположных вектора: b и c : $\mathrm{a} + c = \theta$ и $\mathrm{a} + \mathrm{b} = \theta$.

Доказательство.

От противного. Пусть есть два нулевых вектора: θ_1 и θ_2 . Тогда $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

ЧТД

2) Для $\forall a \in V$ существует единственный противоположный вектор $(-a) \in V$.

Доказательство.

От противного. Пусть для $\forall a \in V$ есть два противоположных вектора: b и c : $\mathrm{a} + c = \theta$ и $\mathrm{a} + \mathrm{b} = \theta$.

Тогда $\mathrm{b} = \mathrm{b} + \theta = \mathrm{b} + (\mathrm{a} + \mathrm{c}) = (\mathrm{b} + \mathrm{a}) + \mathrm{c} = \theta + \mathrm{c} = \mathrm{c}$.

ЧТД

Тогда $\mathrm{b} = \mathrm{b} + \theta = \mathrm{b} + (\mathrm{a} + \mathrm{c}) = (\mathrm{b} + \mathrm{a}) + \mathrm{c} = \theta + \mathrm{c} = \mathrm{c}$.

ЧТД

3) В линейном пространстве

А) 0a= θ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta, \ \ \forall\alpha \in R$

3) В линейном пространстве

А) 0a= θ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta, \quad \forall \alpha \in R$

Доказательство.

А) Покажем, что для $\forall b \in V \ \forall a \in V$ выполнено b+0a=b. Тогда 0a= θ.

3) В линейном пространстве

А) 0a= θ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta, \quad \forall\alpha \in R$

Доказательство.

А) Покажем, что для $\forall b \in V$ $\forall a \in V$ выполнено b+0a=b. Тогда 0a= θ.

b+0a=b+ θ+0a= b+((-a)+ a)+0a=(b+(-a))+ a +0a=

3) В линейном пространстве

А) 0a= θ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta, \ \ \forall \alpha \in R$

Доказательство.

А) Покажем, что для $\forall b \in V \ \forall a \in V$ выполнено b+0a=b. Тогда 0a= θ.

b+0a=b+ θ+0a= b+((-a)+ a)+0a=(b+(-a))+ a +0a=

=(b+(-a))+ 1a +0a=(b+(-a))+ (1+0)a =(b+(-a))+ a =

3) В линейном пространстве

А) 0a= θ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta, \quad \forall\alpha \in R$

Доказательство.

А) Покажем, что для $\forall b \in V$ $\forall a \in V$ выполнено b+0a=b. Тогда 0a= θ.

b+0a=b+ θ+0a= b+((-a)+ a)+0a=(b+(-a))+ a +0a=

=(b+(-a))+ 1a +0a=(b+(-a))+ (1+0)a =(b+(-a))+ a =

=b+((-a)+ a) = b+ θ=b.

Следовательно, b+0a=b. Значит, 0a= θ.

3) В линейном пространстве

А) 0a= θ для $\forall a \in V$

Б) $\alpha\theta = \theta, \;\; \forall\alpha \in R$

Доказательство.

А) Покажем, что для $\forall b \in V \; \forall a \in V$ выполнено b+0a=b. Тогда 0a= θ.

b+0a=b+ θ+0a= b+((-a)+ a)+0a=(b+(-a))+ a +0a=

=(b+(-a))+ 1a +0a=(b+(-a))+ (1+0)a =(b+(-a))+ a =

=b+((-a)+ a) = b+ θ=b.

Следовательно, b+0a=b. Значит, 0a= θ.

Б) $\alpha\theta =$по пункту А)= $\alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a =$ по пункту А)= θ.

ЧТД

Б) $\alpha\theta =$по пункту А)$= \alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a =$ по пункту А)$= \theta$.

ЧТД

4) В линейном пространстве из равенства $\alpha \mathrm{a} = \theta$ следует, что либо а$= \theta$, либо $\alpha =$0.

Б) $\alpha\theta =$по пункту А)= $\alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a =$ по пункту А)= θ.

ЧТД

4) В линейном пространстве из равенства αa $= \theta$ следует, что либо a$= \theta$, либо $\alpha =$0.

Доказательство.

Дано αa $= \theta$. Если $\alpha =$0, то αa $=$ 0a $= \theta$.

Б) $\alpha\theta$ =по пункту А)= $\alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a =$ по пункту А)= θ.

ЧТД

4) В линейном пространстве из равенства αа $= \theta$ следует, что либо а$= \theta$, либо α =0.

Доказательство.

Дано αа $= \theta$. Если α =0, то αа $=0$а $= \theta$.

Пусть $\alpha \neq$0. Тогда а=1а=($\frac{1}{\alpha}\,\alpha$)а= $\frac{1}{\alpha}$(αа)= $\frac{1}{\alpha}\,\theta$= θ.

ЧТД

Доказательство.

Дано αа $= \theta$. Если α =0, то αа $=$ 0а $= \theta$.

Пусть α $\neq$0. Тогда а=1а=($\frac{1}{\alpha}$ α)а= $\frac{1}{\alpha}$(αа)= $\frac{1}{\alpha}$ θ= θ.

ЧТД

5) В линейном пространстве для $\forall a \in V$ противоположный вектор имеет вид (-а)=-1а

Доказательство.

Дано αa $= \theta$. Если α =0, то αa $=$ 0a $= \theta$.

Пусть $\alpha \neq$0. Тогда a=1a=($\frac{1}{\alpha}$ α)a= $\frac{1}{\alpha}$(αa)= $\frac{1}{\alpha}$ θ= θ.

ЧТД

5) В линейном пространстве для $\forall a \in V$ противоположный вектор имеет вид (-a)=-1a

Доказательство.

Рассмотрим a+(-1a)= 1a+(-1a)= (1-1)a=0a= θ.

Следовательно, -1a – противоположный к a.

ЧТД

Доказательство.

Рассмотрим a+(-1a)= 1a+(-1a)= (1-1)a=0a= θ.

Следовательно, -1a – противоположный к a.

ЧТД

6) Для любых b $\in V$ и a $\in V$ существует и единственна разность c $\in V$.

Доказательство.

Рассмотрим a+(-1a)= 1a+(-1a)= (1-1)a=0a= θ.

Следовательно, -1a – противоположный к a.

ЧТД

6) Для любых b $\in V$ и a $\in V$ существует и единственна разность c $\in V$.

Доказательство.

Докажем существование. Рассмотрим

a+(b+(-a))=(a+(-a))+b= θ+b=b.

Доказательство.

Рассмотрим a+(-1a)= 1a+(-1a)= (1-1)a=0a= θ.

Следовательно, -1a – противоположный к a.

ЧТД

6) Для любых b $\in V$ и a $\in V$ существует и единственна разность c $\in V$.

Доказательство.

Докажем существование. Рассмотрим

a+(b+(-a))=(a+(-a))+b= θ+b=b.

Следовательно, (b+(-a))=b-a, т. е. это вектор разности c.

Существование показано. И одновременно показано, как находить разность: нужно к вектору b прибавить противоположный к a.

Доказательство.

Докажем существование. Рассмотрим

a+(b+(-a))=(a+(-a))+b= θ+b=b.

Следовательно, (b+(-a))=b-a, т. е. это вектор разности с.

Существование показано. И одновременно показано, как находить разность: нужно к вектору b прибавить противоположный к a.

Докажем единственность. От противного. Пусть существует две различные разности: c=b-a и d=b-a.

Тогда

d=d+ θ=d+(a+(-a))=(d+a)+(-a)=b+(-a)=c.

ЧТД

Докажем единственность. От противного. Пусть существует две различные разности: c=b-a и d=b-a.

Тогда

d=d+ θ=d+(a+(-a))=(d+a)+(-a)=b+(-a)=c.

ЧТД

Опр. Пусть $a_1, a_2, \dots a_k \in V$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ ∈R.

Вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$ называется линейной комбинацией (л/к) векторов $a_1, a_2, \dots a_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$.

Опр. Пусть $a_1, a_2, \dots a_k \in V$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k \in$R.

Вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$ называется линейной комбинацией (л/к) векторов $a_1, a_2, \dots a_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$.

Если вектор b является л/к векторов $a_1, a_2, \dots a_k$:

b= $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k, \quad (1)$

то говорят, что вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \dots a_k$, а представление (1) называется разложением вектора b по векторам $a_1, a_2, \dots a_k$.

Если вектор b является л/к векторов $a_1, a_2, \ldots a_k$:

b= $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, \quad (1)$

то говорят, что вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots a_k$, а представление (1) называется разложением вектора b по векторам $a_1, a_2, \ldots a_k$.

Пример.

a_1=(1,1,1), a_2=(3,4,5), b=(-1,-2,-3)=2 a_1- a_2

• Пример.

a_1=(1,1,1), a_2=(3,4,5), b=(-1,-2,-3)=2 a_1- a_2

Опр. Система векторов $a_1, a_2, \dots a_k \in V$ называется линейно зависимой (л/з), если $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = \theta$ и существует хотя бы 1 коэффициент $\alpha_i \neq 0$.

- Пример.

a_1=(1,1,1), a_2=(3,4,5), b=(-1,-2,-3)=2 a_1- a_2

Опр. Система векторов $a_1, a_2, \dots a_k \in V$ называется линейно зависимой (л/з), если $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = \theta$ и существует хотя бы 1 коэффициент $\alpha_i \neq 0$.

Опр. Система векторов $a_1, a_2, \dots a_k \in V$ называется линейно независимой (л/н), если $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = \theta$ тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\alpha_i = 0$.

1) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (0, 0, 3)$

Решение

Составляем линейную комбинацию (л/к):

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \theta \Rightarrow \lambda_1 (1, 2, 3) + \lambda_2 (0, 1, 1) + \lambda_3 (0, 0, 3) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1, 3\lambda_1) + (0, \lambda_2, \lambda_2) + (0, 0, 3\lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и ненулевых решений найти нельзя

$\Rightarrow$ система векторов л/н (линейно независимая)

2) $f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = 2x + x^2,\ f_4 = 1 + 2x + x^2$

<u>решение</u>

Легко заметить, что $f_4 = f_1 + f_3 \Rightarrow f_1 + 0 \cdot f_2 + f_3 - f_4 = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists$ ненулевые коэфф. $\Rightarrow$ л/з

(линейно зависимая)

Теорема о свойствах линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

1) Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой системой.

Теорема о свойствах линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

1) Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой системой.
2) Система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, является линейно зависимой системой.

Теорема о свойствах линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

1) Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой системой.
2) Система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, является линейно зависимой системой.
3) Если часть системы является линейно зависимой подсистемой, то и вся система векторов будет линейно зависимой.

Теорема о свойствах линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

1) Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой системой.
2) Система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, является линейно зависимой системой.
3) Если часть системы является линейно зависимой подсистемой, то и вся система векторов будет линейно зависимой.
4) Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.

4) Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.

Доказательство.

1) Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой (л/з)

<u>Решение</u>. Дана система $a_1, a_2, .., a_{k-1}, \theta, a_{k+1}, .., a_m \in V$.

Составим линейную комбинацию

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1} + \lambda_k \theta + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \dots + \lambda_m a_m = \theta$$

[redacted] Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой (л/з)

Решение. Дана система $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \theta, a_{k+1}, \dots, a_m \in V$.
Составим линейную комбинацию

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1} + \lambda_k \theta + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \dots + \lambda_m a_m = \theta$$

Подберем коэффициенты так, чтобы среди них был бы хотя бы один ненулевой коэффициент: пусть $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k-1} =$ $= \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_m = 0$, $\lambda_k = 1 \Rightarrow 0 \cdot a_1 + \dots + 0 a_{k-1} + 1 \cdot \theta + 0 \cdot a_{k+1} + \dots +$ $+ 0 \cdot a_m = \theta$ и $\exists \lambda_k \neq 0 \Rightarrow$ л/з.

[redacted] 2 Доказать, что система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, л/з.

<u>Решение.</u> Дана $a_1, a_2, .., a_i, .., a_j, .., a_k \in V$ и $a_i = \gamma a_j$, $\gamma \in R$

$$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_i \overset{a_i}{\gamma a_j} + \dots + \lambda_j a_j + \dots + \lambda_k a_k = \theta. \quad (*)$$

[redacted] 2 Доказать, что система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, л/з.

<u>Решение.</u> Дана $a_1, a_2, .., a_i, .., a_j, .., a_k \in V$ и $a_i = \gamma a_j$, $\gamma \in R$

$$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_i \overset{a_i}{\gamma a_j} + \dots + \lambda_j a_j + \dots + \lambda_k a_k = \theta. \quad (*)$$

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{j-1} = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_k = 0$

$$\lambda_i \gamma = -\lambda_j$$

Если $\gamma = 0$, то это [redacted] 1.

Решение. Дана $a_1, a_2, .., a_i, .., a_j, .., a_k \in V$ и $a_i = \gamma a_j$, $\gamma \in R$

$$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_i \overset{a_i}{\gamma a_j} + \dots + \lambda_j a_j + \dots + \lambda_k a_k = \theta. \quad (*)$$

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{j-1} = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_k = 0$

$$\lambda_i \gamma = -\lambda_j$$

Если $\gamma = 0$, то это [redacted] 1.

Если $\gamma \neq 0$, то $\lambda_i = -\dfrac{\lambda_j}{\gamma}$. пусть $\lambda_j = 1$, $\lambda_i = -\dfrac{1}{\gamma} \Rightarrow$

линейная комбинация $(*) = \theta$ и $\exists\ \lambda_j, \lambda_i \neq 0 \Rightarrow$ л/з.

3) Если часть системы является линейно зависимой подсистемой, то и вся система векторов будет линейно зависимой.

Доказательство.

Пусть $a_1, a_2, \dots a_k \in V$ и векторы $a_i, a_j, \dots a_m$ являются линейно зависимыми, т.е. $\alpha_i a_i + \alpha_j a_j + \cdots + \alpha_m a_m = \theta$ и существует хотя бы 1 коэффициент $\alpha_i \neq 0$.

3) Если часть системы является линейно зависимой подсистемой, то и вся система векторов будет линейно зависимой.

Доказательство.

Пусть $a_1, a_2, \dots a_k \in V$ и векторы $a_i, a_j, \dots a_m$ являются линейно зависимыми, т.е. $\alpha_i a_i + \alpha_j a_j + \cdots + \alpha_m a_m = \theta$ и существует хотя бы 1 коэффициент $\alpha_i \neq 0$.

Тогда можно приписать остальные векторы с нулевыми коэффициентами

$$0a_1 + 0a_2 + \cdots + \alpha_i a_i + \alpha_j a_j + \cdots + \alpha_m a_m + \cdots + 0a_k = \theta$$

и существует хотя бы 1 коэффициент $\alpha_i \neq 0$. Следовательно, вся система является линейно зависимой. ЧТД.

4) Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.

Доказательство.

Нам дана линейно независимая система.

Докажем от противного. Пусть у этой системы векторов существует какая-то линейно зависимая подсистема. Тогда по пункту 3) и вся система будет линейно зависимой. Противоречие. Следовательно, не существует линейно зависимой подсистемы.

ЧТД.

[redacted] Доказать, что для $\forall$ векторов a, b, c и $\forall$ чисел $\alpha, \beta, \gamma \in R$ векторы $\alpha a - \beta b$, $\gamma b - \alpha c$, $\beta c - \gamma a$ л/з.

<u>Решение</u> Составим л/к

$$(*)\quad \underbrace{\gamma}_{\lambda_1}(\alpha a - \beta b) + \underbrace{\beta}_{\lambda_2}(\gamma b - \alpha c) + \underbrace{\alpha}_{\lambda_3}(\beta c - \gamma a) = \theta$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то это система с нулевым вектором $\Rightarrow$ л/з

Если, например $\lambda_1 \neq 0$, то $(*) = \gamma\alpha a - \gamma\beta b + \beta\gamma b - \beta\alpha c + \alpha\beta c - \alpha\gamma a = \theta$

$\Rightarrow$ л/з

Дана система многочленов $f_1(t)=1-t^2$, $f_2(t)=1+t^3$, $f_3(t)=t-t^3$, $f_4(t)=1+t+t^2+t^3$. Найти линейные комбинации

а) $5f_1+f_2-4f_3$ и б) $f_1+9f_2-4f_4$

Дана система многочленов $f_1(t)=1-t^2$; $f_2(t)=1+t^3$; $f_3(t)=t-t^3$; $f_4(t)=1+t+t^2+t^3$. Найти линейные комбинации

а) $5f_1+f_2-4f_3$ и б) $f_1+9f_2-4f_4$

<u>Решение</u>

а) $5f_1+f_2-4f_3=5(1-t^2)+1+t^3-4(t-t^3)=5-5t^2+1+t^3-4t+4t^3=$

$=6-4t-5t^2+5t^3$

[redacted] Дана система многочленов $f_1(t)=1-t^2$; $f_2(t)=1+t^3$; $f_3(t)=t-t^3$; $f_4(t)=1+t+t^2+t^3$. Найти линейные комбинации а) $5f_1+f_2-4f_3$ и б) $f_1+9f_2-4f_4$

<u>Решение</u>

а) $5f_1+f_2-4f_3=5(1-t^2)+1+t^3-4(t-t^3)=5-5t^2+1+t^3-4t+4t^3=$
$=6-4t-5t^2+5t^3$

б) $f_1+9f_2-4f_4=1-t^2+9(1+t^3)-4(1+t+t^2+t^3)=6-4t-5t^2+5t^3$

$\Rightarrow 5f_1+f_2-4f_3=f_1+9f_2-4f_4 \Rightarrow -4f_1+8f_2+4f_3-4f_4=0 \Rightarrow$
система f_1, f_2, f_3, f_4 л/з.

Задание

Найти разложения вектора $f = 6 - 4t - 5t^2 + 5t^3$ по системе $f_1 = 1 - t^2$, $f_2 = 1 + t^3$, $f_3 = t - t^2$, $f_4 = 1 + t + t^2 + t^3$

Задание

Найти разложения вектора $f = 6-4t-5t^2+5t^3$ по системе $f_1 = 1-t^2$, $f_2 = 1+t^3$, $f_3 = t-t^3$, $f_4 = 1+t+t^2+t^3$

Решение

$$6-4t-5t^2+5t^3 = \lambda_1(1-t^2)+\lambda_2(1+t^3)+\lambda_3(t-t^3)+$$

$$+\lambda_4(1+t+t^2+t^3) = 1\cdot(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4)+t(\lambda_3+\lambda_4)+t^2(-\lambda_1+\lambda_4)+$$

$$+t^3(\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_4=6 \\ \lambda_3+\lambda_4=-4 \\ -\lambda_1+\lambda_4=-5 \\ \lambda_2-\lambda_3+\lambda_4=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_3=-4-\lambda_4 \\ \lambda_1=\lambda_4+5 \end{array}$$

$$+t^3(\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_4=6 \\ \lambda_3+\lambda_4=-4 \\ -\lambda_1+\lambda_4=-5 \\ \lambda_2-\lambda_3+\lambda_4=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_3=-4-\lambda_4 \\ \lambda_1=\lambda_4+5 \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda_4+5+\lambda_2+\lambda_4=6 \\ \lambda_2+4+\lambda_4+\lambda_4=5 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2=-2\lambda_4+1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=\lambda_4+5 \\ \lambda_2=-2\lambda_4+1 \\ \lambda_3=-4-\lambda_4 \\ \forall \lambda_4\in R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_4 + 5 \\ \lambda_2 = -2\lambda_4 + 1 \\ \lambda_3 = -4 - \lambda_4 \\ \forall \lambda_4 \in R \end{cases}$$

$\Rightarrow$ все разложения имеют вид

$$\boxed{6-4t-5t^2+5t^3 = (\lambda_4+5)\cdot f_1 + (-2\lambda_4+1) f_2 + (-4-\lambda_4) f_3 + \lambda_4 f_4.}$$

ответ

Если брать какие-то конкретные λ_4, то можно выписать явный вид этих разложений.

Например, при $\lambda_4=0$ получим $6-4t-5t^2+5t^3 = 5f_1+f_2-4f_3$.

§5. Ранг матрицы.

Опр. Рангом ненулевой матрицы называется максимальный порядок ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы равен нулю.

Обозначение: rg A, rang A.

Из определения следует, что ранг матрицы не превосходит её размеров.

Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Все миноры третьего порядка равны нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Найти ранг матрицы

Не все миноры второго порядка равны нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Ранг матрицы А =2

Опр. Пусть $\text{rg}\ A=r>0$. Любой ненулевой минор r-го порядка этой матрицы называется базисным минором, а строки и столбцы, в которых расположен базисный минор, называются базисными строками и столбцами.

Базисный минор НЕ обязательно один, их может быть несколько, но все они имеют один и тот же порядок, равный рангу матрицы.

Найти ранг матрицы

Не все миноры второго порядка равны нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \quad (*)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \quad (**)$$

Ранг матрицы A[illegible])=2

Базисные миноры: (*), (**)

Теорема о базисном миноре.

Базисные строки(столбцы) матрицы являются линейно независимыми. Любая строка (столбец) является линейной комбинацией базисных строк(столбцов).

Без доказательства.

Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

Определитель квадратной матрицы размера nxn равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо его строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов).

Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

Определитель квадратной матрицы размера $n \times n$ равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо его строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов).

Доказательство.

1) Достаточность.

Дано: строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов). Поэтому, по свойствам определителя, определитель матрицы равен нулю

Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

Определитель квадратной матрицы размера $n x n$ равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо его строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов).

Доказательство.

1) Достаточность.

Дано: строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов). Поэтому, по свойствам определителя, определитель матрицы равен нулю

2) Необходимость.

Определитель матрицы равен нулю. Поэтому $rg\ A<n$ и по теореме о базисном миноре есть хотя бы одна небазисная строка, которая будет выражаться через базисные.

ЧТД

Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

Определитель квадратной матрицы размера nxn равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо его строка(столбец) является линейной комбинацией других её строк(столбцов).

Эта теорема позволяет выяснять зависимость или независимость векторов не по определению. Составляем из векторов построчно матрицу и считаем её определитель (если матрица квадратная). Если определитель равен нулю, то это значит, что какая-то строка выразилась через другую, т.е. система векторов будет зависимой.

Эта теорема позволяет выяснять зависимость или независимость векторов не по определению. Составляем из векторов построчно матрицу и считаем её определитель (если матрица квадратная). Если определитель равен нулю, то это значит, что какая-то строка выразилась через другую, т.е. система векторов будет зависимой.

Примеры.

Выяснить, линейно зависимая или линейно независимая система векторов

1) a_1=(6,-4,-2), a_2=(-9,6,3), a_3=(-3,6,3).

Составляем определитель : $\begin{vmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -9 & 6 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$=3$\cdot\, 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$=0

Поэтому, система зависимая.

Примеры.

Выяснить, линейно зависимая или линейно независимая система векторов

1) a_1=(6,-4,-2), a_2=(-9,6,3), a_3=(-3,6,3).

Составляем определитель : $\begin{vmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -9 & 6 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$=3$\cdot$ $3 \cdot 2$ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$=0

Поэтому, система зависимая

2) a_1=(5,2,1), a_2=(-1,4,2), a_3=(-1,-1,6).

Составляем определитель : $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$=120-4+1+4+10+12$\neq 0$

Поэтому, система линейно независимая.

Опр. Пусть есть две системы векторов. Если каждый вектор первой системы линейно выражается через векторы второй системы, то говорят, что первая система линейно выражается через вторую.

Опр. Пусть есть две системы векторов. Если каждый вектор первой системы линейно выражается через векторы второй системы, то говорят, что первая система линейно выражается через вторую.

Теорема.

Если бОльшая система векторов(по количеству векторов) линейно выражается через меньшую, то бОльшая система линейно зависимая.

Без доказательства.

Свойства ранга матрицы.

Теор. Ранг матрицы равен максимальному числу её л/н строк (стб).

Свойства ранга матрицы.

<u>Теор.</u> Ранг матрицы равен максимальному числу её л/н строк (стб).

<u>Д-во</u> Пусть $\operatorname{rg} A = r > 0$. Возьмём базисные строки $a'_1, .., a'_r$. Их r штук и они л/н. При этом, по теор. о базисном миноре $\forall$ другая строка a'_k, $k \neq 1,..,r$, л/в через базисные строки $\Rightarrow$ система $a'_1, a'_2, .., a'_r, a'_k$ л/з $\Rightarrow$ максимально возможное число л/н строк равно r. Аналогично для стб. Чтд.

<u>Следствие</u> $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$

Свойства ранга матрицы.

<u>Теор.</u> Ранг матрицы равен максимальному числу её л/н строк (ст6).

<u>Док-во</u> Пусть $rg A = r > 0$. Возьмём базисные строки $a_1', .., a_r'$. Их r штук и они л/н. При этом, по теор. о базисном миноре $\forall$ другая строка a_k', $k \neq 1, .., r$, л/в через базисные строки $\Rightarrow$ система $a_1', a_2', .., a_r', a_k'$ л/з $\Rightarrow$ максимально возможное число л/н строк равно r. Аналогично для ст6. Чтд.

<u>Следствие</u> $rg A = rg A^T$

<u>Теор</u> Если все строки (ст6) м-цы A л/в через стр (ст6) м-цы B, то $rg A \leq rg B$

Следствие $\text{rg}\, A = \text{rg}\, A^T$

Теор Если все строки (ст) м-цы A л/в через стр (ст) м-цы B, то $\text{rg}\, A \le \text{rg}\, B$

Д-во пусть $\text{rg}\, A = r$, $\text{rg}\, B = s$ и $a_1, .. a_r$ и $b_1, .. b_s$ - базисные ст м-ц A и B соответственно. Д-м, что $r \le s$. От противного.

Следствие $\text{rg}\, A = \text{rg}\, A^T$

Теор Если все строки (стб) м-цы A л/в через стр (стб) м-цы B, то $\text{rg}\, A \le \text{rg}\, B$.

Д-во Пусть $\text{rg}\, A = r$, $\text{rg}\, B = s$ и $a_1, .. a_r$ и $b_1, .. b_s$ - базисные стб м-ц A и B соответственно. Д-м, что $r \le s$. От противного. Пусть $r > s$. По условию теоремы все стб $a_1, .. a_r$ л/в через столбцы м-цы B, которые, в свою очередь (по теор. о базисном миноре) л/в через баз. стб. $b_1, .. b_s$ $\Rightarrow$ система $a_1, .., a_r$ л/в через $b_1, .. b_s$ и $r > s$ (т.е. бо́льшая система вект. л/в через меньшую) $\Rightarrow$ $a_1, .. a_r$ л/з (бо́льшая система л/з). Противоречие, т.к. $a_1, .. a_r$ - базисные и $\Rightarrow$ л/н. Сл-но, $r \le s$. Чтд.

Теор. Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей, т.е. если $C=AB$, то $\mathrm{rg}\, C \le \mathrm{rg}\, A$ и $\mathrm{rg}\, C \le \mathrm{rg}\, B$.

Теор. Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей; т.е. если $C=AB$, то $\mathrm{rg}\, C \le \mathrm{rg}\, A$ и $\mathrm{rg}\, C \le \mathrm{rg}\, B$.

Док-во Когда проходили ~~пр~~ перемножение матриц, то заметили, что строки матр C л/в через строки B, а стб матр C – через стб матр A. Для матр 2×2 ещё раз покажу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$b_1' = (b_{11} \ \ b_{12})$

$b_2' = (b_{21} \ \ b_{22})$

$$c_1' = a_{11}b_1' + a_{12}b_2' =$$

$$= a_{11}(b_{11}, b_{12}) + a_{12}(b_{21} \ \ b_{22}) =$$

$$= (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{21}, \ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})$$

строки C — л/к из строк B

стб C л/к из стб A $\qquad c_1 = b_{11}a_1 + b_{21}a_2$

Теор. Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей, т.е. если $C=AB$, то $\mathrm{rg}\, C \le \mathrm{rg}\, A$ и $\mathrm{rg}\, C \le \mathrm{rg}\, B$.

Д-во Когда проходили ~~про~~ перемножение матриц, то заметили, что строки мтр C л/в через строки B, а стб мтр C – через стб мтр A [illegible]

93

Теор. $\Rightarrow$ по предыд. теореме $\mathrm{rg}\, C \le \mathrm{rg}\, A$ и $\mathrm{rg}\, C \le \mathrm{rg}\, B$ Чтд

Теор (инвариантность ранга при умножении на невырожд. мтц).

Ранг мтр не меняется при умножении её на невырожд. мтц.

Теор (инвариантность ранга при умножении на невырожд. матр).

Ранг матр не меняется при умножении её на невырожд. матр.

Док-во. Дана м-ца A, $\operatorname{rg} A = r$. Умножим её на невырожд. матр P, $|P| \neq 0$.

$\Rightarrow C = AP \Rightarrow$ по предыд. теор. $\underline{\operatorname{rg} C \leq \operatorname{rg} A}$.

Теперь, т.к. P невырожд., то $\exists P^{-1} \Rightarrow$ $C = AP \mid P^{-1} \Rightarrow$

$A = CP^{-1} \Rightarrow$ по предыд. теор. $\underline{\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} C}$

$\Rightarrow \operatorname{rg} C = \operatorname{rg} A$.

Аналогично случай умножения слева $C = QA$, $|Q| \neq 0$. Чтд

Теор (инвариантность ранга при умножении на невырожд. матр).

Ранг матр не меняется при умножении её на невырожд. матр.

Док Дана матр A, $\operatorname{rg} A = r$. Умножим её на невырожд. матр P, $|P| \neq 0$.

$\Rightarrow C = AP \Rightarrow$ по предыд. теор. $\underline{\operatorname{rg} C \leq \operatorname{rg} A}$.

Теперь, т.к. P невырожд., то $\exists P^{-1} \Rightarrow C = AP \;|P^{-1} \Rightarrow$

$A = CP^{-1} \Rightarrow$ по предыд. теор. $\underline{\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} C}$

$\Rightarrow \operatorname{rg} C = \operatorname{rg} A$.

Аналогично случай умножения слева $C = QA$, $|Q| \neq 0$ ч.т.д.

Теорема об инвариантности ранга относительно элементарных преобразований.

Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.

Доказательство.

Элементарные преобразования матрицы эквивалентны умножению исходной матрицы на матрицы элементарных преобразований. Поэтому, по предыдущей теореме, ранг не меняется.

ЧТД.

Способ вычисления ранга матрицы.

Исходную матрицу с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду. Ранг при этом не меняется. Потом находят либо максимальный ненулевой минор (его размер и будет рангом), либо максимальное количество ненулевых строк(их количество и будет рангом)

Найти ранг

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{matrix} a_4' - a_1' \\ a_3' - a_2' \\ a_2' - 3a_1' \end{matrix} \right\} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \{ a_4' - a_2' \}$$

Найти ранг

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{matrix} a_4'-a_1', \\ a_3'-a_2' \\ a_2'-3a_1' \end{matrix} \right\} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \{a_4'-a_2'\}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \{a_4'-a_3'\} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти ранг

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \left\{\begin{matrix} a_4'-a_1' \\ a_3'-a_2' \\ a_2'-3a_1' \end{matrix}\right\} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \{a_4'-a_2'\}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \{a_4'-a_3'\} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 строки не обнулилось $\Rightarrow$ rg $A=3$

Или $M^{1,2,3}_{1,2,3}=\begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=25\neq 0$. Его размер $3\times 3 \Rightarrow$ rg $A=3$

Д/З ① Пусть x, y, z л/н система. Будет ли л/н система векторов

$x+y,\ y+z,\ z+x$

Да

② Являются ли системы вект. л/з?

а) $(2,-3,1)$; $(3,-1,5)$; $(1,-4,3)$

нет

б) $(-1,-2,3)$; $(4,0,3)$; $(1,2,-3)$

да

③ Представить d как л/к $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

$d = a + b - c$

$\bar{a} = (2,3,1)$, $b = (5,7,0)$, $c = (3,-2,4)$, $d = (4,12,-3)$

④ $\bar{a} = (6,4,2)$, $b = (-9,6,3)$, $c = (-3,6,3)$

$c = \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b$

Представить $\bar{c}$ в виде л/к $\bar{a}, \bar{b}$:

5 Посчитать ранг м-цы

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 3

б) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$ 2

г) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 1