

Дискретная математика, модуль 2

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Занятие 1: Основные
определения.

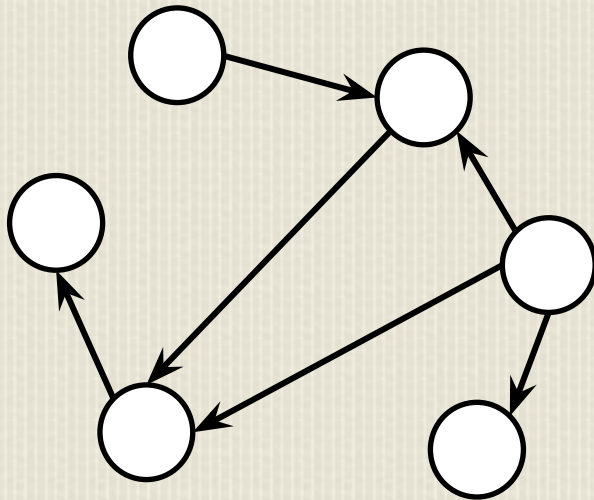
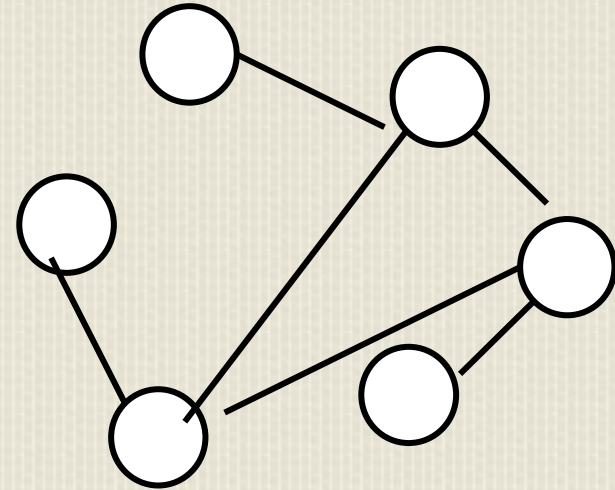
Занятие 2: Способы задания
графов. Изоморфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Графом G называется любая пара (V, U) , где $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ - множество элементов любой природы, а $U = \{u_1, u_2, \dots\}$ – семейство пар элементов из V , причем допускаются пары вида (v_i, v_j) и одинаковые пары.
- Если пары в U рассматриваются как неупорядоченные, то граф называется неориентированным, если как упорядоченные, то граф называется ориентированным (орграфом).
- Элементы множества V называются вершинами графа, а пары из U в неориентированном графе называются ребрами, а в орграфе – ориентированными ребрами или чаще дугами.
- Ребро $u = (v_i, v_j)$ в неориентированном графе соединяет вершины v_i и v_j , а в ориентированном графе дуга $u = (v_i, v_j)$ идет из вершины v_i в вершину v_j .

ИЗОБРАЖЕНИЕ ГРАФОВ

□ Вершины будем изображать точками, а каждое ребро (дугу) (v_i, v_j) – линией, соединяющей точки, соответствующие вершинам v_i и v_j .



□ Если (v_i, v_j) – дуга, то на этой линии будем указывать стрелку от v_i к v_j .

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Вершины v_i и v_j смежны в графе $G = (V, U)$, если в U входит пара (v_i, v_j) или (v_j, v_i) . Ребро (дуга) (v_i, v_j) инцидентно вершинам v_i и v_j .
- Два различных ребра графа называются смежными, если они имеют, по крайней мере, одну общую вершину.
- Пара вида (v_i, v_i) называется петлей в вершине v_i .
- Если пара (v_i, v_j) встречается в U более одного раза, то говорят, что (v_i, v_j) – кратное ребро.

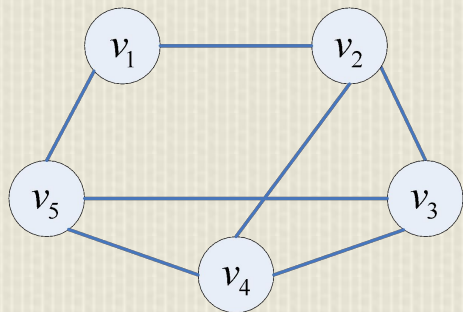
ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Каждое ребро u из U (кроме петель) инцидентно ровно двум вершинам v_i, v_j , которые оно соединяет.
- Степенью $St(v)$ вершины v неориентированного графа G называется число ребер, инцидентных v .
- Вершина степени 0 называется изолированной вершиной.
- Вершина степени 1 называется висячей или концевой вершиной.
- Пусть $G=(V,U)$ – n -вершинный граф, а s_1, s_2, \dots, s_n – степени его вершин, выписанные в порядке невозрастания: $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$.
- Упорядоченную систему (s_1, s_2, \dots, s_n) будем называть вектором степеней графа G и кратко обозначать $s(G)$.

Степень графа

▣ Степень графа G : $S(G) = \max_{v_i \in V} \{s(v_i)\}$

▣ Минимальная степень графа: $\delta(G) = \min_{v_i \in V} \{s(v_i)\}$



$$s(v_1) = 2$$

$$s(v_2) = 3$$

$$s(v_3) = 3$$

$$s(v_4) = 3$$

$$s(v_5) = 3$$

$$S(G) = 3$$

$$\delta(G) = 2$$

Сумма степеней вершин

□ Теорема

Сумма степеней вершин графа есть число четное:

$$\sum_{v_i \in V} s(v_i) = 2q$$

□ Следствие

Число вершин с нечетными степенями – четно.

Частичные графы и подграфы

Пусть $G=(V,U)$ - некоторый граф

- Граф $G_1=(V_1,U_1)$ называется частичным графом графа G , если $V_1=V$ и $U_1\subseteq U$

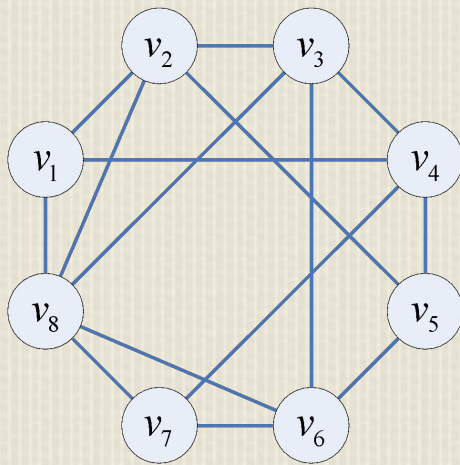
- Граф $G_2=(V_2,U_2)$ называется подграфом графа G , если:
 - $V_2\subseteq V$
 - из $v_i\in V_2, v_j\in V_2, v_i$ и v_j смежны в G , следует, что v_i и v_j смежны в G_2

- Граф $G_3=(V_3,U_3)$ называется частичным подграфом графа G , если он является частичным графом подграфа графа G

КЛИКА ГРАФА

- Пусть $G=(V,U)$ - некоторый граф.
- Подграф графа, любые две вершины которого смежны, называется полным подграфом.
- Клика графа – любой максимальный по включению полный подграф.
- Кликовое число графа $\rho(G)$ (густота или плотность) – максимальное число вершин в кликах данного графа.
- Тогда, образно говоря, чем более плотен граф, тем будет больше кликовое число.

КЛИКА ГРАФА



$\{v_1, v_5, v_6\}$ - неполный подграф, не клика

$\{v_3, v_4\}$ - полный подграф, клика

$\{v_1, v_2\}$ - полный подграф, не клика

$\{v_1, v_2, v_8\}$ - полный подграф, клика

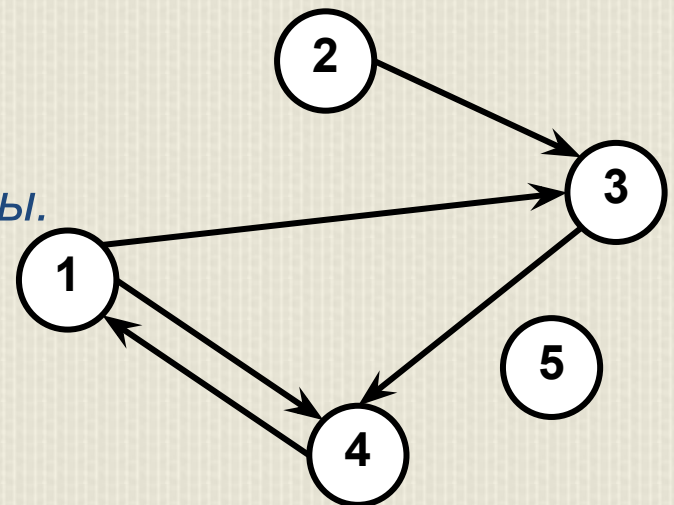
$$p(G)=3$$

КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

1. Ориентированным графом G называется пара $(V(G), U(G))$, где $V(G)$ — непустое конечное множество элементов, называемых вершинами, а $U(G)$ — конечное множество упорядоченных пар элементов из $V(G)$, называемых дугами (или ориентированными ребрами).

Дуга, у которой вершина v_1 является первым элементом, а вершина v_2 — вторым, называется дугой из v_1 в v_2 : (v_1, v_2) .

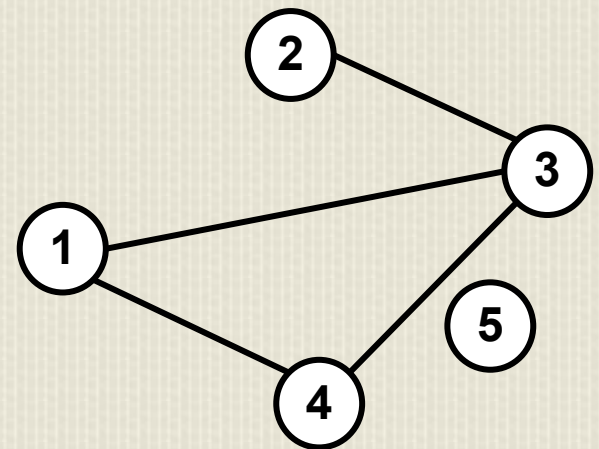
Заметим, что дуги (v_1, v_2) и (v_2, v_1) различны.



КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

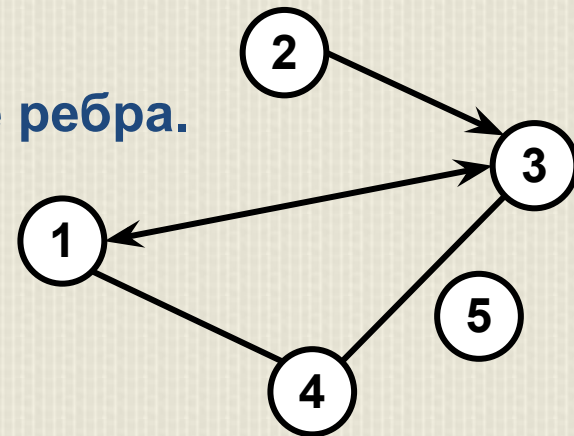
2. Неориентированным графом G называется пара $(V(G), U(G))$, где $V(G)$ — непустое конечное множество элементов, называемых вершинами, а $U(G)$ — конечное множество неупорядоченных пар элементов из $V(G)$, называемых ребрами.

Будем называть $V(G)$ множеством вершин, а $U(G)$ — множеством ребер графа G .
О каждом ребре вида (v_1, v_2) говорят, что оно соединяет вершины v_1 и v_2 .

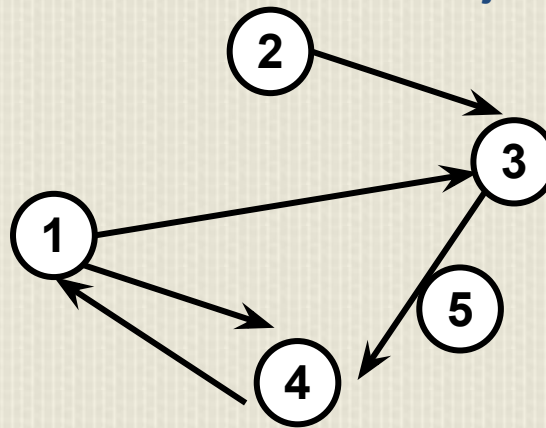
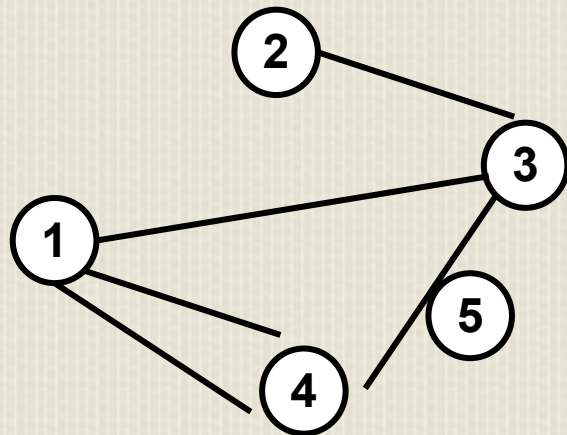


КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

3. Смешанный граф – граф, содержащий как ориентированные, так и неориентированные ребра.



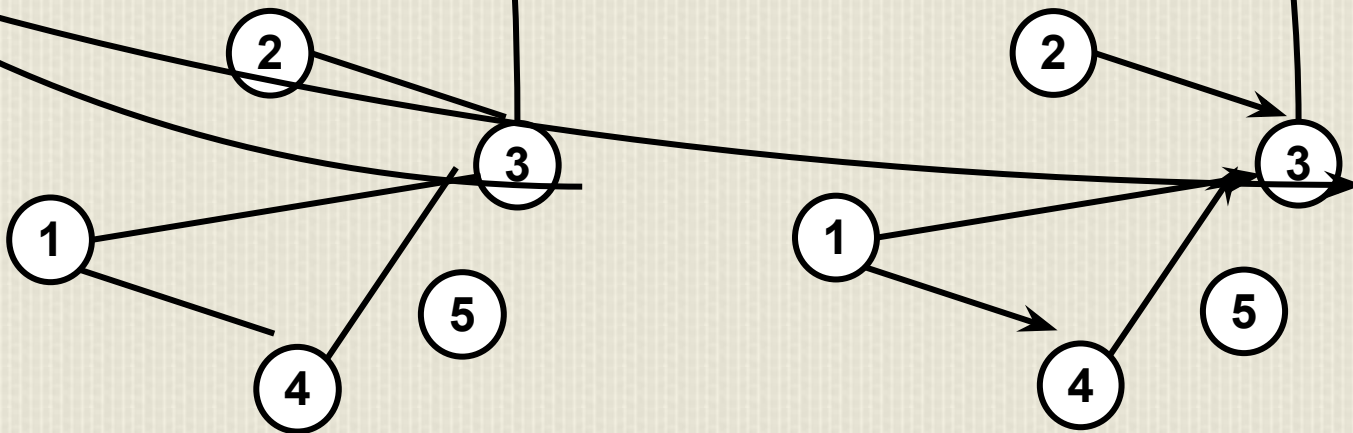
4. Мультиграф – граф, в котором имеется несколько кратных ребер или однонаправленных дуг: $u_1=(v_i, v_j)$, $u_2=(v_i, v_j)$.



КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

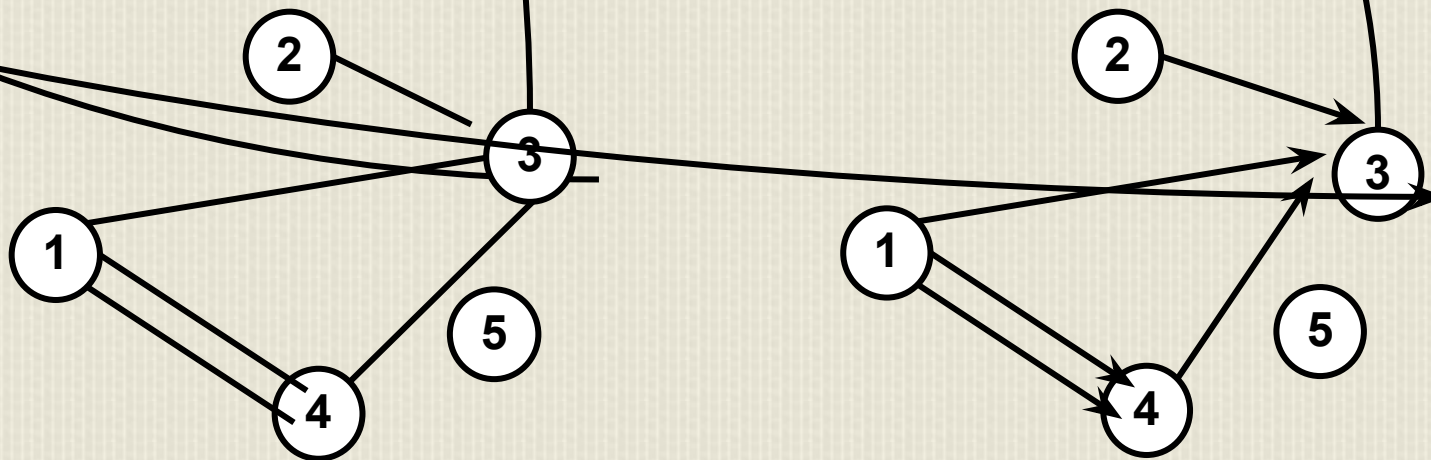
5. *Псевдограф* – граф, содержащий петли.

в неориентированном графе петлей называется ребро вида (v_1, v_1) ,
которое соединяют вершину v_1 саму с собой,
в ориентированном графе петлей называется дуга вида (v_1, v_1) ,
которая соединяет вершину v_1 саму с собой.



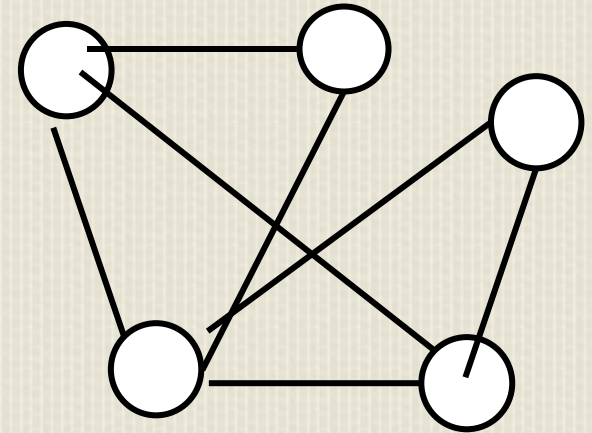
КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

6. Мульти-псевдограф – граф, в котором имеются петли и кратные ребра или дуги.



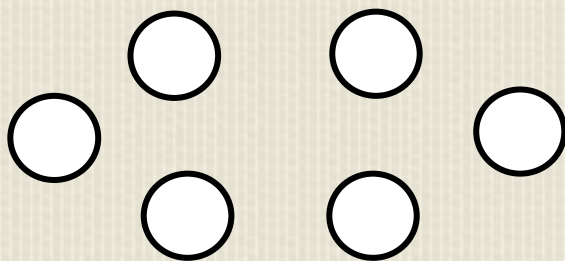
КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

7. **Взвешенный граф** – граф, вершинам и/или дугам (ребрам) которого сопоставляются (приписываются) числа, называемые весом.
8. **Простым графом** называется граф, который не содержит кратных ребер и не содержит петель.



КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

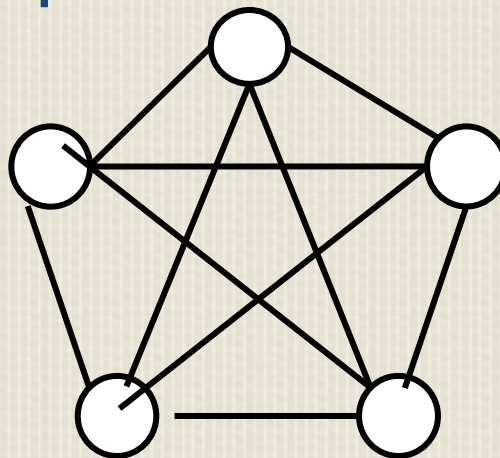
9. Пустым графом называется граф, у которого множество ребер пусто. Будем обозначать пустой граф с n вершинами через P_n



10. Простой граф называется полным, если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром. Полный граф с n вершинами обычно обозначается через K_n .

Заметим, что граф K_n имеет

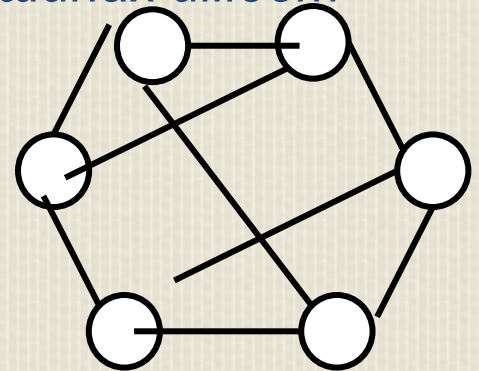
ровно $n \cdot \frac{n-1}{2}$ ребер.



КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

11. Граф, у которого все n вершин имеют одну и ту же степень, называется регулярным графом. Если степень каждой вершины равна r , то граф называется регулярным степени r .

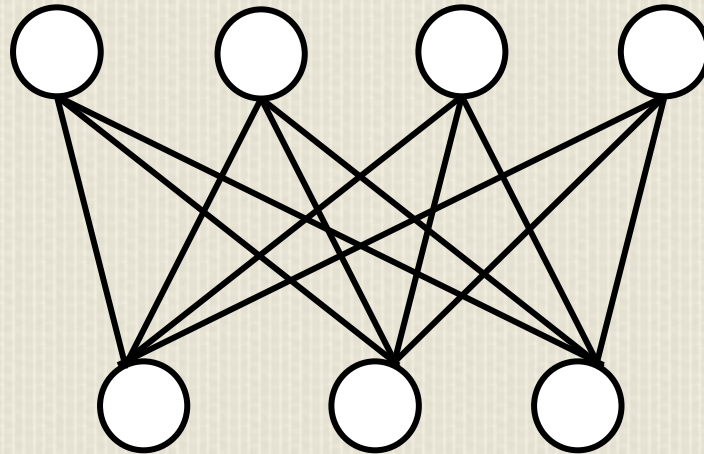
Заметим, что регулярный граф степени r на n вершинах имеет ровно $n \cdot \frac{r}{2}$ ребер.



12. Двудольный граф — это граф $G(V, U)$, такой, что множество вершин V разбито на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 , причем всякое ребро U инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 (то есть соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2). Множества V_1 и V_2 называются «долями» двудольного графа.

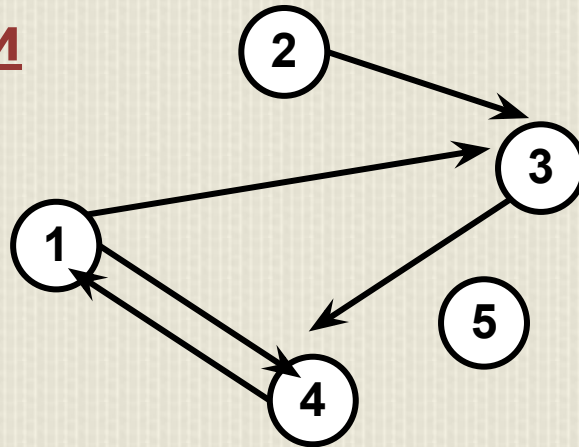
КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

13. Двудольный граф называется «полным», если любые две вершины из V_1 и V_2 являются смежными. Если $|V_1|=n_1$, $|V_2|=n_2$, то полный двудольный граф обозначается K_{n_1, n_2} . Заметим, что граф K_{n_1, n_2} имеет ровно n_1+n_2 вершин и n_1*n_2 ребер.



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

□ 1. Графически

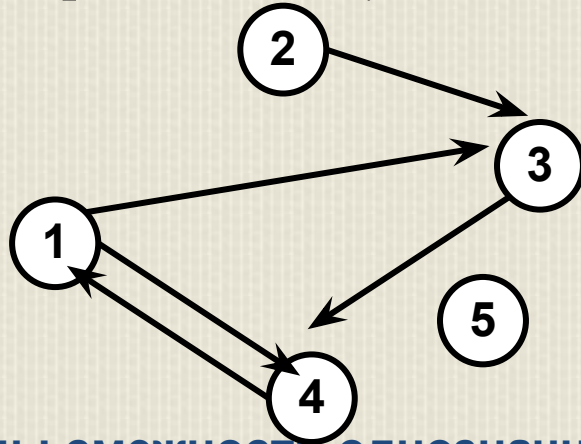


- Графический способ изображения графов является самым наглядным и наиболее удобным для человеческого восприятия.
- Однако для практического использования в прикладных целях, когда на основании теории графов решаются задачи с помощью вычислительной техники и специально разработанных алгоритмов, требуется специальное, ориентированное на автоматизированную обработку, представление данных.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

□ 2. При помощи матрицы смежности $S (V \times V)$:

$$s(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists \text{ ребро или дуга } (v_i, v_j); \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	1	1	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	0	0	0	1	0
v_4	1	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0

- Матрицы смежности однозначно задают как неориентированные (в этом случае матрица симметрична относительно главной диагонали), так и ориентированные графы. Принципиально нет проблем и с заданием смешанных графов, для них эквивалентно выглядит задание ребра и пары разнонаправленных дуг.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

3. При помощи матрицы инциденций $A (U \times V)$

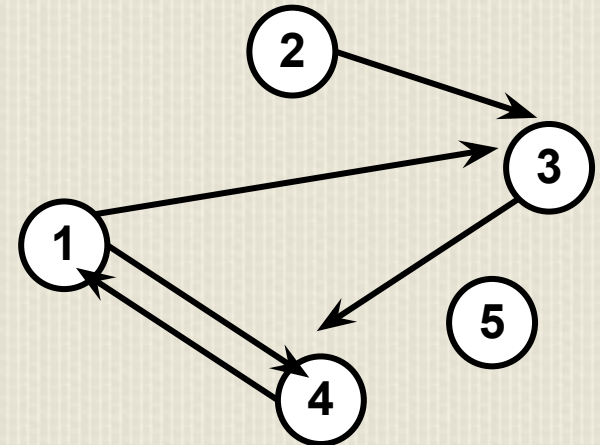
для ориентированных графов:

$$a(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j \text{ исток дуги } u_i; \\ -1, & \text{если } v_j \text{ сток дуги } u_i; \\ 0, & \text{если } v_j \text{ не инцидентна дуге } u_i; \end{cases}$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_{23}	0	1	-1	0	0
u_{13}	1	0	-1	0	0
u_{14}	1	0	0	-1	0
u_{41}	-1	0	0	1	0
u_{34}	0	0	1	-1	0

для неориентированных графов:

$$a(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j \text{ инцидентна ребру } u_i; \\ 0, & \text{если } v_j \text{ не инцидентна ребру } u_i; \end{cases}$$



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

- Матрицы инциденций однозначно задают как неориентированные, так и ориентированные графы.
- В принципе нет никаких препятствий для задания смешанных графов – в отличие от матрицы смежности в этом случае задание ребра и пары разнонаправленных дуг будет отличаться.
- Никаких проблем не возникает с мультиграфами (и в ориентированном, и в неориентированном случаях), а также с неориентированными псевдографами.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

- Неоднозначность возникает при задании ориентированных псевдографов: на пересечении строки, помеченной петлей, и столбца, помеченного вершиной, на которой эта петля присутствует, по правилу должны одновременно находиться как 1 так и -1 .
- Из этой ситуации имеется выход: вместо одной матрицы A ($U \times V$) граф задается двумя матрицами – истоков A^+ ($U \times V$) и стоков A^- ($U \times V$):

$$a^+(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j \text{ исток дуги } u_i; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$a^-(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j \text{ сток дуги } u_i; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

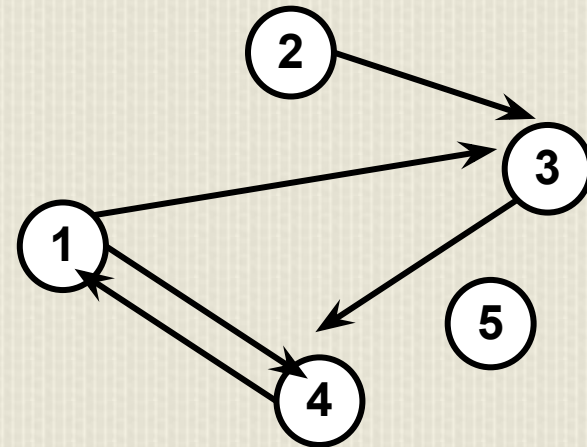
4. При помощи функционального представления Γ^1 и Γ^{-1}

$\Gamma^1(v_i) = \{v_j\}$: \exists дуга (v_i, v_j) ;

$\Gamma^{-1}(v_i) = \{v_j\}$: \exists дуга (v_j, v_i) .

При помощи функционального представления однозначно задаются как неориентированные (в этом случае $\Gamma^1 = \Gamma^{-1}$), так и ориентированные и смешанные графы. Как и в случае с матрицей смежности, для смешанных графов эквивалентно выглядит задание ребра и пары разнонаправленных дуг.

- $\Gamma^1(v_1) = \{v_3, v_4\}$; $\Gamma^{-1}(v_1) = \{v_4\}$;
- $\Gamma^1(v_2) = \{v_3\}$; $\Gamma^{-1}(v_2) = \emptyset$;
- $\Gamma^1(v_3) = \{v_4\}$; $\Gamma^{-1}(v_3) = \{v_1, v_2\}$;
- $\Gamma^1(v_4) = \{v_1\}$; $\Gamma^{-1}(v_4) = \{v_1, v_3\}$;
- $\Gamma^1(v_5) = \emptyset$; $\Gamma^{-1}(v_5) = \emptyset$.



ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

- **Изоморфизмом графов G_1 и G_2** называется биекция между множествами вершин графов такая, что любые две вершины графа G_1 смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины смежны в графе G_2 .

Здесь графы понимаются неориентированными и не имеющими весов вершин и ребер.

В случае, если понятие изоморфизма применяется к ориентированным или взвешенным графам, накладываются дополнительные ограничения на сохранение ориентации дуг и значений весов.

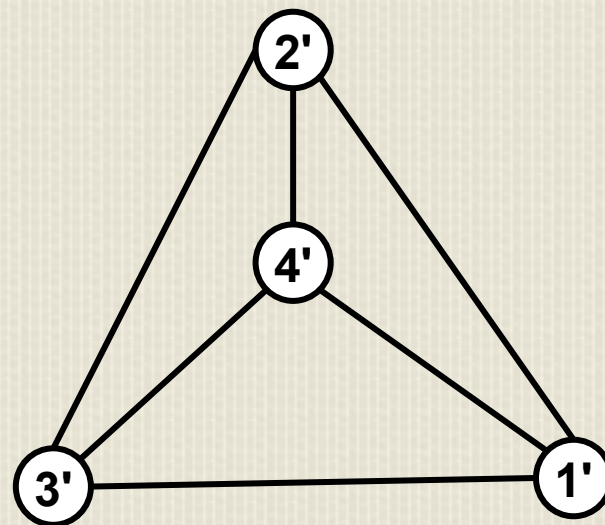
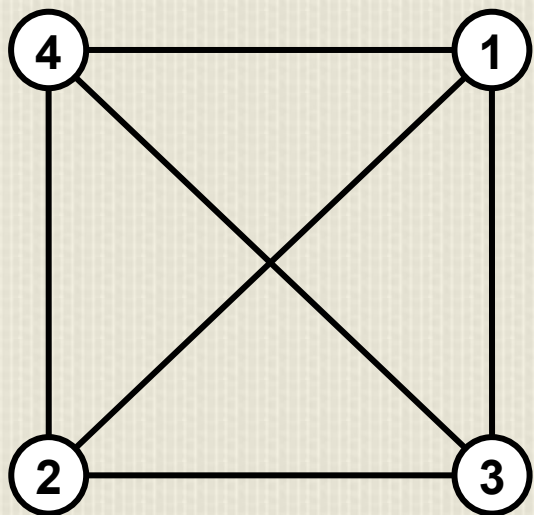
Если изоморфизм графов установлен, они называются изоморфными.

ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

- Взаимно однозначное отображение множества вершин графа G_1 на множество вершин графа G_2 , сохраняющее смежность, называют изоморфизмом.
- Изоморфные графы – это графы, которые имеют одинаковое число вершин и одинаковое число ребер, причем для вершин графов можно ввести одинаковые обозначения таким образом, что неупорядоченные пары вершин, обозначающие ребра, у изоморфных графов будут одинаковы.
- Иными словами, графы называются изоморфными, если существует такая нумерация вершин в этих графах, что они имеют одну и ту же матрицу смежности (фактически изоморфные графы – это одинаковые графы, которые отличаются только другим *изображением*).

ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

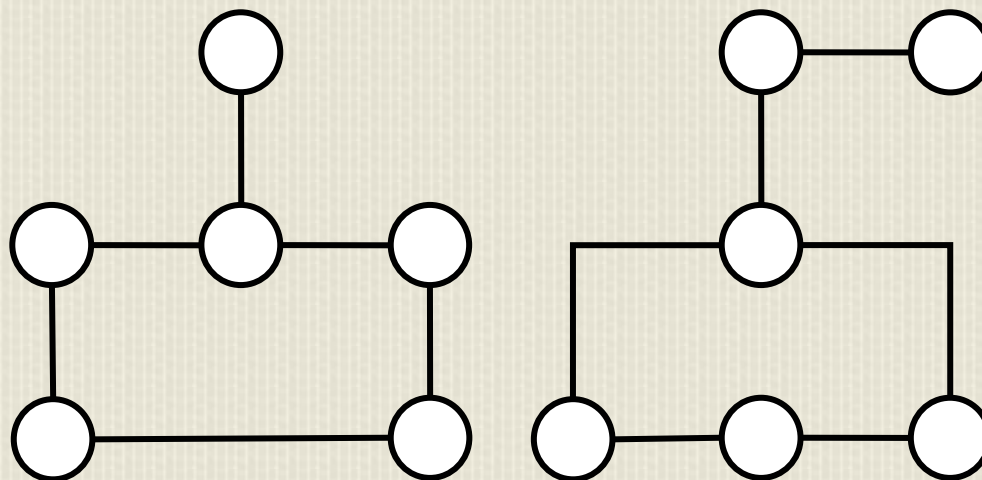
- Например, два графа на рисунке ниже изоморфны, так как между множествами их вершин и ребер существуют взаимно однозначное отображение



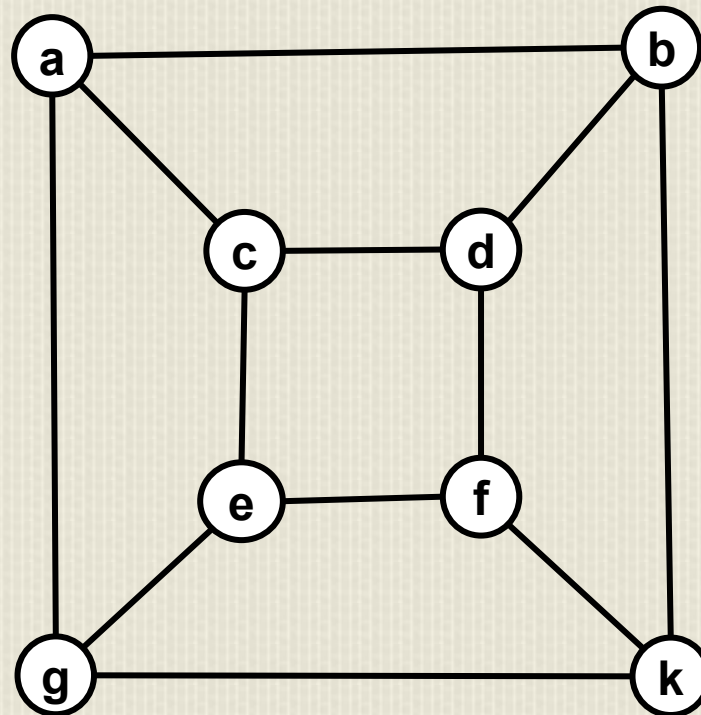
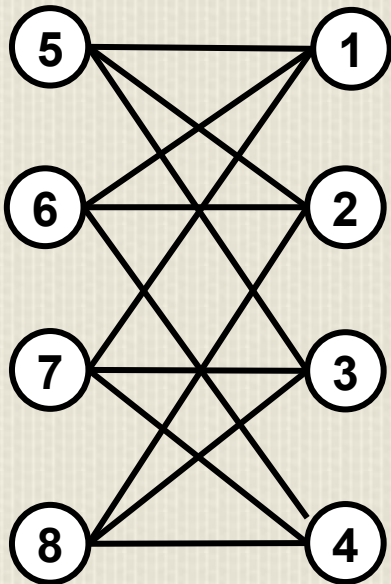
- Иными словами, изоморфные графы различаются только обозначением вершин.

ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

- Для изоморфизма графов G и G' необходимо совпадение векторов их степеней: $s(G)=s(G')$. Однако достаточным это условие не является.
- Например, на рисунке ниже видим две пары неизоморфных графов с одинаковыми векторами: $s = (1, 2, 2, 2, 2, 3)$.

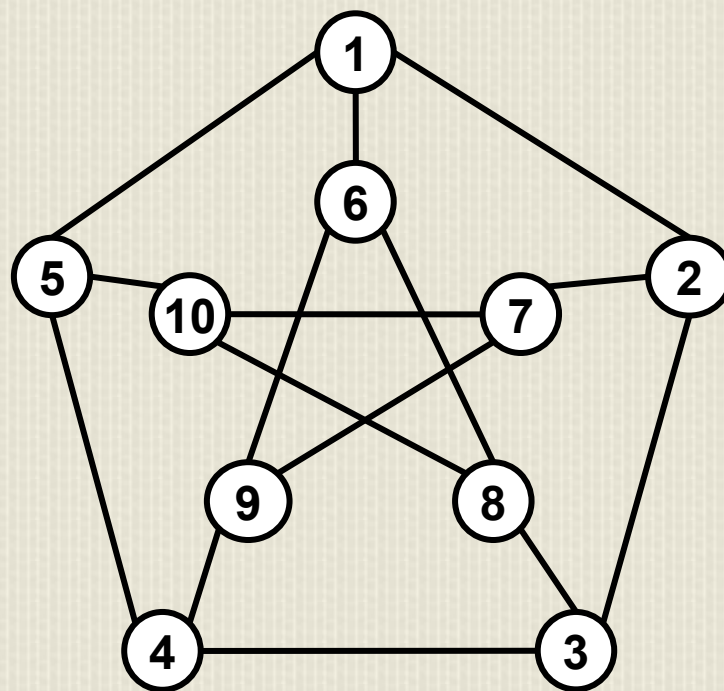
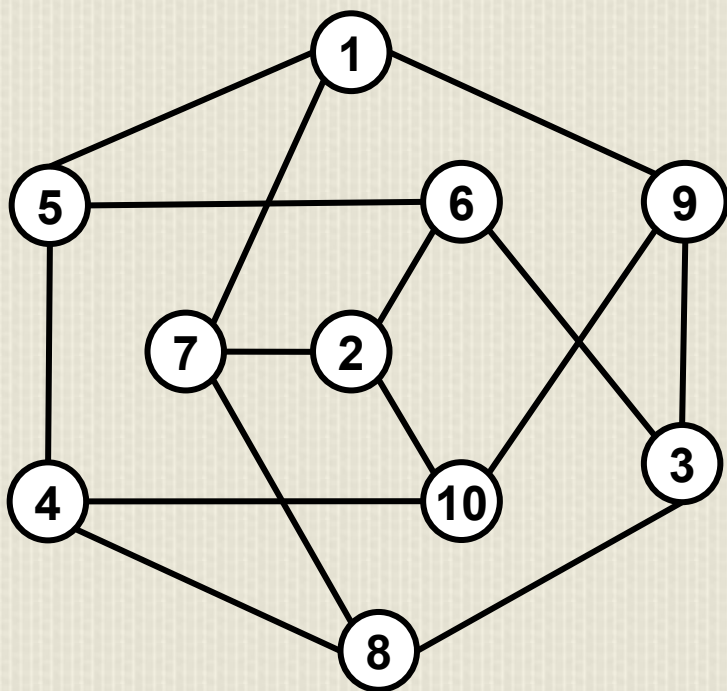


ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ



Постройте матрицы смежности обоих графов.
Найдите взаимно однозначное отображение между V и V' .
Найти еще несколько изоморфных данному графов

ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ



- Найдите взаимно однозначное отображение между V и V' .

ИНВАРИАНТЫ ГРАФА

- Количественная или качественная характеристики, неизменные для всех изоморфных между собой графов (орграфов) называется **ИНВАРИАНТОМ**
- Примеры инвариантов графа G : количество вершин $n(G)$, количество ребер $m(G)$ и вектор степеней $s(G)=(s_1, s_2, \dots, s_n)$, который в частности, дает числовые инварианты минимальной и максимальной степени вершин графа: $\min_st(v_i)$ и $\max_st(v_i)$, $i=1, 2, \dots, n$.
- Поиск полной системы инвариантов графа, задающей граф с точность до изоморфизма – основная задача теории графов

(полная система инвариантов ещё не найдена)

ЗАДАЧА 2.1.

Дан неориентированный граф, заданный своим функциональным представлением:

□ $\Gamma(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\};$

□ $\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3\};$

□ $\Gamma(v_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\};$

□ $\Gamma(v_4) = \{v_1, v_5\};$

□ $\Gamma(v_5) = \{v_1, v_3, v_4\};$

□ $\Gamma(v_6) = \emptyset.$

□ Задать этот граф тремя другими способами: графически; с помощью матрицы инциденций; с помощью матрицы смежности.



ЗАДАЧА 2.1.

Решение:

- Подобные задачи на построение графа необходимо начинать с определения всех вершин, входящих в множество V . Для функционального представления множество вершин графа совпадает с областью определения функции Γ . В нашем случае получаем, что $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Также необходимо заметить, что множество V может и не совпадать с объединением множеств $\Gamma(v_i)$. Что очень хорошо видно в этом примере: вершина v_6 не входит ни в одно из множеств, порождаемых функцией Γ .

а) Построение графического способа задания графа.

- Графический способ изображения графов является самым наглядным и наиболее удобным для человеческого восприятия, потому и решение любой задачи в теории графов лучше всего начинать с построения графического представления.



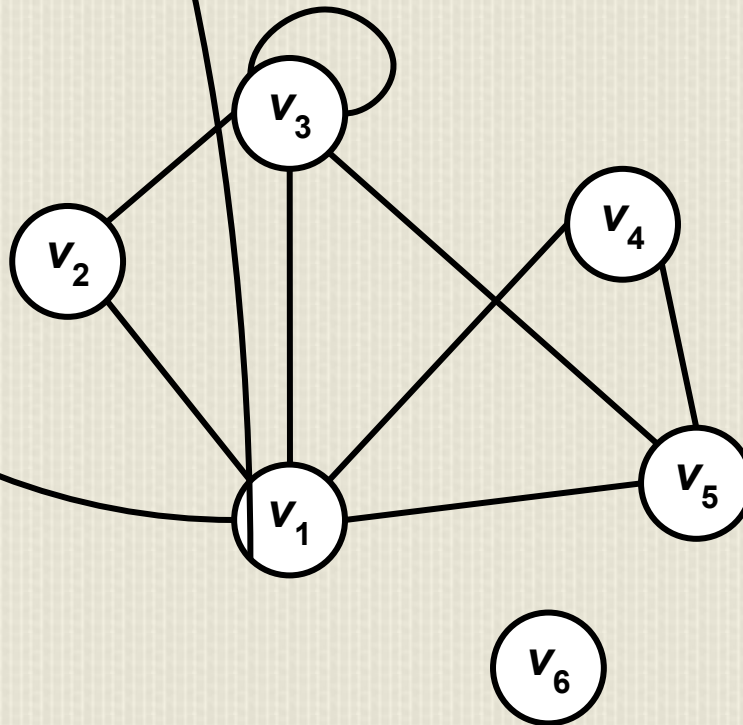
ЗАДАЧА 2.1.

- Сначала изобразим в виде кружков с написанным названием внутри все вершины, входящие в множество V .
- Они могут находится совершенно в произвольных местах и не обязаны каким-либо образом быть упорядочены.
- Выберем вершину v_1 и с помощью линий соединим ее со всеми вершинами, входящими в множество $\Gamma(v_1)$, то есть с вершинами v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 .
- Сама же вершина v_1 соединяется сама с собой с помощью петли.
- Далее рассмотрим вершину v_2 , она смежна с вершинам v_1 и v_3 , но ребро (v_1, v_2) уже построено, а в случае неориентированного графа, значит, и ребро (v_2, v_1) тоже построено.
- Таким образом необходимо построить ребро только между вершинами v_2 и v_3 .



ЗАДАЧА 2.1.

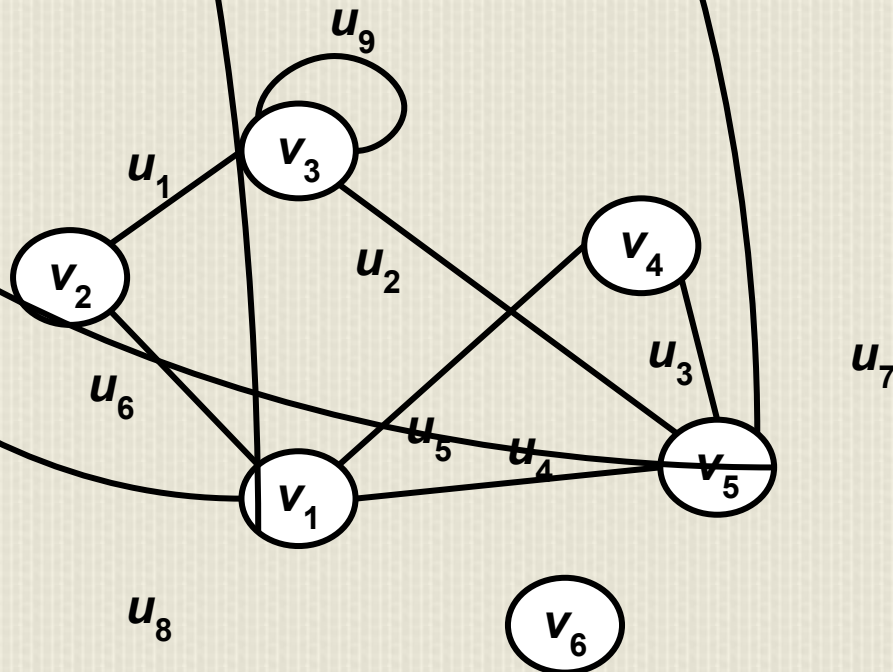
- Повторив этот шаг для оставшихся вершин множества V , получим требуемое графическое задание графа. Результат построения приведен на рисунке ниже.



ЗАДАЧА 2.1.

б) Построение матрицы инциденций.

- Для построения матрицы инциденций необходимо определиться с нумерацией ребер в исходном графе. Поэтому каждому ребру графа в его графическом представлении припишем название, например так, как показано на рисунке ниже.



ЗАДАЧА 2.1.

- Далее необходимо построить матрицу размерности девять на шесть, перечислив ребра u_i в первом столбце, а вершины v_j – в первой строке.
- Рассмотрим заполнение строки, соответствующей ребру u_1 .
- Как видно из рисунка ребро u_1 инцидентно вершинам v_2 и v_3 , а значит в соответствующих им ячейках строки u_1 ставим единицы.
- Повторяем тот же алгоритм для ребер u_2 , u_3 , u_4 , u_5 и u_6 .
- В случае же ребер u_7 , u_8 и u_9 единица оказывается только в ячейке, соответствующей вершине, с которой данное ребро непосредственно соединено (т.о. для петель в строке матрицы инциденций стоит одна единичка).
- Получившаяся в результате матрица инциденций представлена на рисунке ниже.



ЗАДАЧА 2.1.

Получившаяся в результате матрица инциденций:

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
u_1	0	1	1	0	0	0
u_2	0	0	1	0	1	0
u_3	0	0	0	1	1	0
u_4	1	0	0	0	1	0
u_5	1	0	0	1	0	0
u_6	1	1	0	0	0	0
u_7	0	0	0	0	1	0
u_8	1	0	0	0	0	0
u_9	0	0	1	0	0	0



ЗАДАЧА 2.1.

в) Построение матрицы смежности.

- Построение матрицы смежности легче производить по графическому заданию графа.
- Для этого сначала необходимо построить матрицу размерности шесть на шесть, по вертикали и горизонтали перечислив вершины v_i .
- Рассмотрим построение строки, соответствующей вершине v_1 : данная вершина смежна вершинам v_2 , v_3 , v_4 , и v_5 , а значит в соответствующих им ячейках матрицы проставляем единицы.
- То же повторяем для вершин v_2 , v_3 , v_4 и v_5 .
- Вершина v_6 не связана ребром ни с одной другой вершиной графа, а потому матрица смежности содержит соответствующую ей нулевую строку и нулевой столбец.



ЗАДАЧА 2.1.

- Полученная матрица смежности представлена на рисунке ниже.

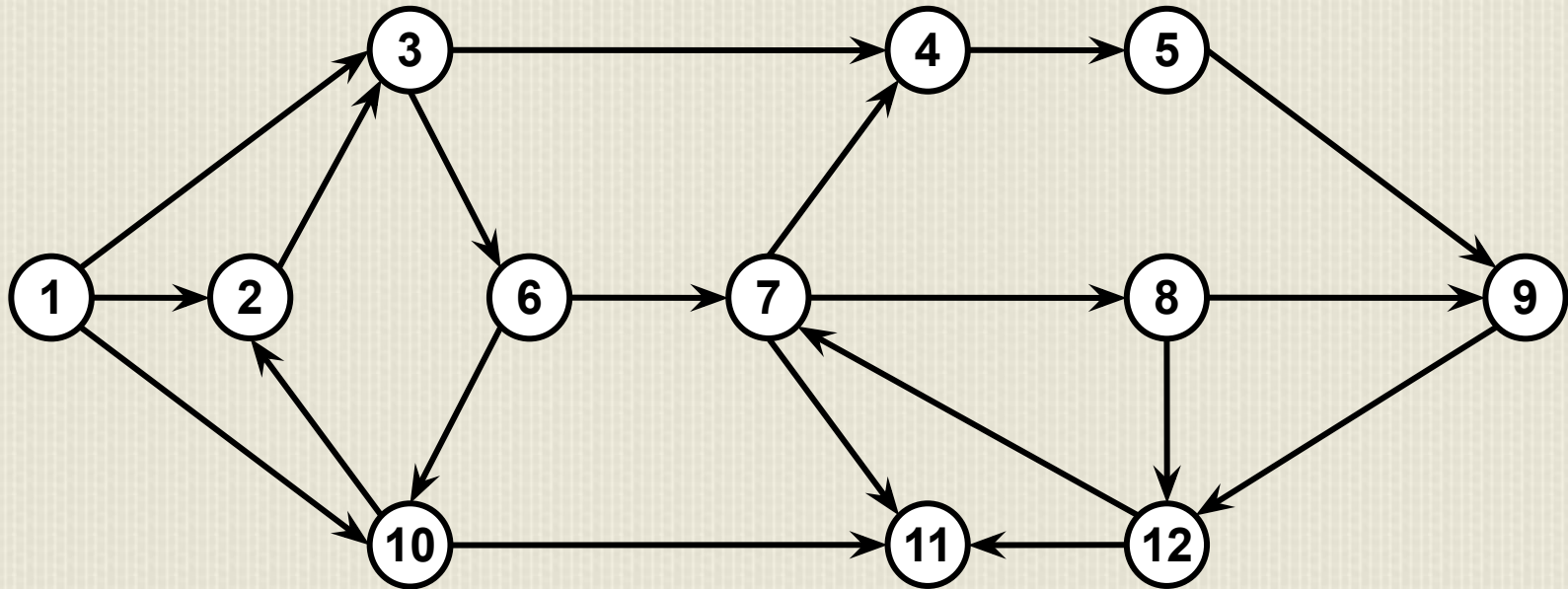
V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	1	1	1	1	1	0
v_2	1	0	1	0	0	0
v_3	1	1	1	0	1	0
v_4	1	0	0	0	1	0
v_5	1	0	1	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0

- Как и следовало ожидать, матрица смежности для неориентированного графа оказалась симметричной.



ЗАДАЧА 2.2.

- Дан ориентированный граф, заданный графическим способом:



- Задать этот граф тремя другими способами: с помощью матрицы смежности; с помощью матрицы инцидентий; с помощью функционального представления.

ЗАДАЧА 2.2.

- Как видно из графического представления граф содержит 12 вершин. Теперь можно начинать построение требуемых способов задания графа.

а) Построение матрицы смежности.

- Сначала необходимо отметить принципиальное отличие между матрицей смежности ориентированного и неориентированного графа.
- В случае ориентированного графа матрица S не обязательно должна быть симметричной. Например, как видно из графического представления графа, дуга (v_1, v_2) принадлежит множеству U , а дуга (v_2, v_1) – нет.
- Сначала, как и в прошлом задании, построим матрицу размерности 12 на 12, по вертикали и горизонтали перечислив вершины v_i . Рассмотрим вершину v_1 . Как видно из графического представления графа, из v_1 исходят дуги, приходящие в вершины v_2, v_3, v_{10} , поэтому, в соответствующих им ячейках строки v_1 ставим единицы. Далее рассмотрим вершину v_2 : по той же схеме получаем единицу в столбце v_3 .



ЗАДАЧА 2.2.

- Продолжая этот алгоритм для всех оставшихся вершин, получим матрицу смежности, представленную на рисунке ниже.

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
v_2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
v_7	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
v_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
v_{11}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
v_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0



ЗАДАЧА 2.2.

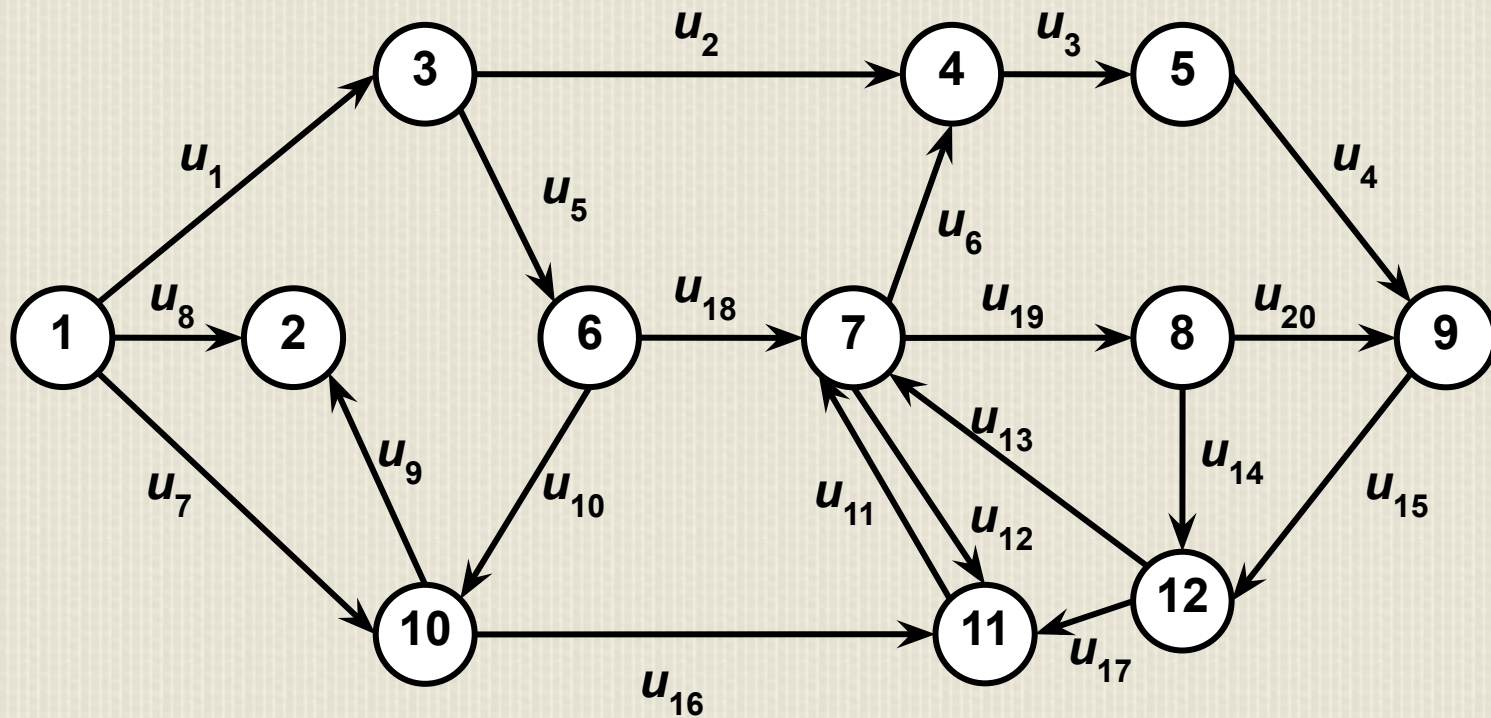
б) Построение матрицы инциденций.

- Как и в случае с матрицей смежности, матрица инциденций неориентированного графа кардинально отличается от матрицы смежности ориентированного графа. Основное отличие заключается в том, что в ней указывается не просто инцидентность ребра u_i вершине v_j , а так же сведения о том, является ли вершина v_j истоком или стоком ребра u_i .
- Сначала необходимо пронумеровать все дуги исходного графа. Стоит так же заметить, что вершинам v_7 и v_{11} инцидентны одновременно две разнонаправленные дуги.



ЗАДАЧА 2.2.

- Возможная нумерация ребер графа предложена на рисунке



ЗАДАЧА 2.2.

- Далее построим матрицу размерности 20 на 12, по строкам перечислив дуги u_i , а по столбцам вершины v_j .
- Рассмотрим вершину v_1 : она является истоком дуг u_1 , u_7 и u_8 , поэтому в соответствующих им строках столбца v_1 проставляем единицы.
- Вершина v_3 является истоком дуг u_2 и u_5 и стоком для дуги u_1 , поэтому в ячейках матрицы A на пересечении u_2 , u_5 и v_3 проставляем единицы, а на пересечении u_1 и v_3 – минус единицы.
- Продолжая такой разбор столбцов для остальных вершин графа, получаем матрицу инциденций, представленную на рисунке ниже.



ЗАДАЧА 2.2.

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
u_1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
u_4	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0
u_5	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
u_6	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0
u_7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
u_8	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_9	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
u_{10}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
u_{11}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
u_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0
u_{13}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
u_{14}	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
u_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1
u_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
u_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
u_{18}	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
u_{19}	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
u_{20}	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0



ЗАДАЧА 2.2.

в) Построение функционального представления.

- Функциональные представления графа и орграфа также отличаются. Если неориентированный граф полностью характеризуется функцией Γ , то для ориентированного графа необходимо ввести функцию $\Gamma^1(v_i)$, характеризующую исток вершины v_i , и функцию $\Gamma^{-1}(v_i)$, характеризующую сток вершины v_i .
- Функциональное представление достаточно просто строится с помощью графического задания этого графа.
- Но наиболее простым путем здесь будет построение с помощью матрицы смежности.
- Не сложно заметить, что строкам матрицы смежности соответствует функция $\Gamma^1(v_i)$, а столбцам - $\Gamma^{-1}(v_i)$.



ЗАДАЧА 2.2.

□ Таким образом получаем, что:

- | | |
|---|--|
| □ $\Gamma^1(v_1) = \{v_2, v_3, v_{10}\};$ | $\Gamma^{-1}(v_1) = \emptyset;$ |
| □ $\Gamma^1(v_2) = \{v_3\};$ | $\Gamma^{-1}(v_2) = \{v_1, v_{10}\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_3) = \{v_4, v_6\};$ | $\Gamma^{-1}(v_3) = \{v_1, v_2\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_4) = \{v_5\};$ | $\Gamma^{-1}(v_4) = \{v_3, v_7\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_5) = \{v_9\};$ | $\Gamma^{-1}(v_5) = \{v_4\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_6) = \{v_{10}\};$ | $\Gamma^{-1}(v_6) = \{v_3\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_7) = \{v_4, v_8, v_{11}\};$ | $\Gamma^{-1}(v_7) = \{v_{11}, v_{12}\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_8) = \{v_9, v_{12}\};$ | $\Gamma^{-1}(v_8) = \{v_7\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_9) = \{v_{12}\};$ | $\Gamma^{-1}(v_9) = \{v_5, v_8\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_{10}) = \{v_2, v_{11}\};$ | $\Gamma^{-1}(v_{10}) = \{v_1, v_6\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_{11}) = \{v_{11}\};$ | $\Gamma^{-1}(v_{11}) = \{v_7, v_{12}\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_{12}) = \{v_7, v_{11}\};$ | $\Gamma^{-1}(v_{12}) = \{v_8, v_{12}\}.$ |



ЗАДАЧА 2.3.

- Дан ориентированный граф, заданный матрицей инциденций:

V	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_1	1	-1							
u_2	1							-1	
u_3	1								-1
u_4								1	-1
u_5							-1		1
u_6							-1	1	
u_7		1					-1		
u_8		-1					1		
u_9		1	-1						
u_{10}			-1				1		
u_{11}						-1	1		
u_{12}				-1				1	

- Задать этот граф тремя другими способами: графически, с помощью матрицы смежности, с помощью функционального представления.

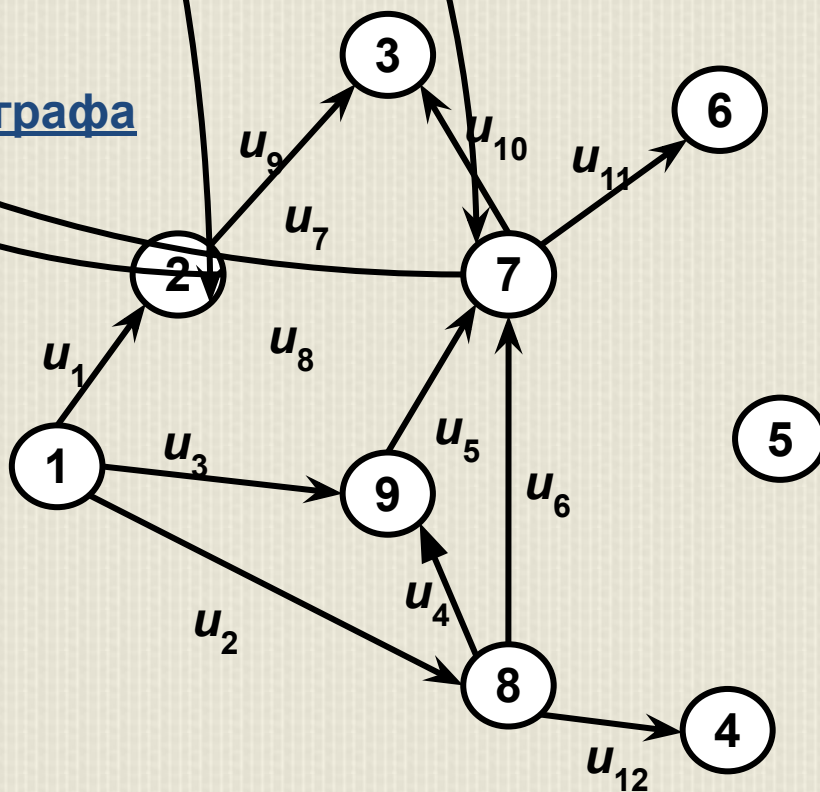


ЗАДАЧА 2.3.

Решение:

- Решение данной задачи полностью аналогично решению задачи 2.2. Поэтому здесь приводятся только ответы:

а) Графическое представление графа



ЗАДАЧА 2.3.

б) Матрица смежности графа.

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
v_2	0	0	1	0	0	0	1	0	0
v_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_7	0	1	1	0	0	1	0	0	0
v_8	0	0	0	1	0	0	1	0	1
v_9	0	0	0	0	0	0	1	0	0



ЗАДАЧА 2.3.

в) Функциональное представление графа:

- | | |
|--|---|
| □ $\Gamma^1(v_1) = \{v_2, v_8, v_9\};$ | $\Gamma^{-1}(v_1) = \emptyset;$ |
| □ $\Gamma^1(v_2) = \{v_3, v_7\};$ | $\Gamma^{-1}(v_2) = \{v_1, v_7\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_3) = \emptyset;$ | $\Gamma^{-1}(v_3) = \{v_2, v_7\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_4) = \emptyset;$ | $\Gamma^{-1}(v_4) = \{v_8\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_5) = \emptyset;$ | $\Gamma^{-1}(v_5) = \emptyset;$ |
| □ $\Gamma^1(v_6) = \emptyset;$ | $\Gamma^{-1}(v_6) = \{v_7\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_7) = \{v_2, v_3, v_6\};$ | $\Gamma^{-1}(v_7) = \{v_2, v_8, v_9\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_8) = \{v_4, v_7, v_9\};$ | $\Gamma^{-1}(v_8) = \{v_1\};$ |
| □ $\Gamma^1(v_9) = \{v_7\};$ | $\Gamma^{-1}(v_9) = \{v_1, v_8\}.$ |



ЗАДАЧА 2.4.

- Дан неориентированный граф, заданный матрицей смежности:

V	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1						
2	1		1	1	1			
3		1				1	1	1
4		1		1		1	1	
5		1			1			
6			1	1				1
7			1	1				
8			1			1		

- Задать этот граф тремя другими способами: графически; с помощью матрицы инциденций; с помощью функционального представления.

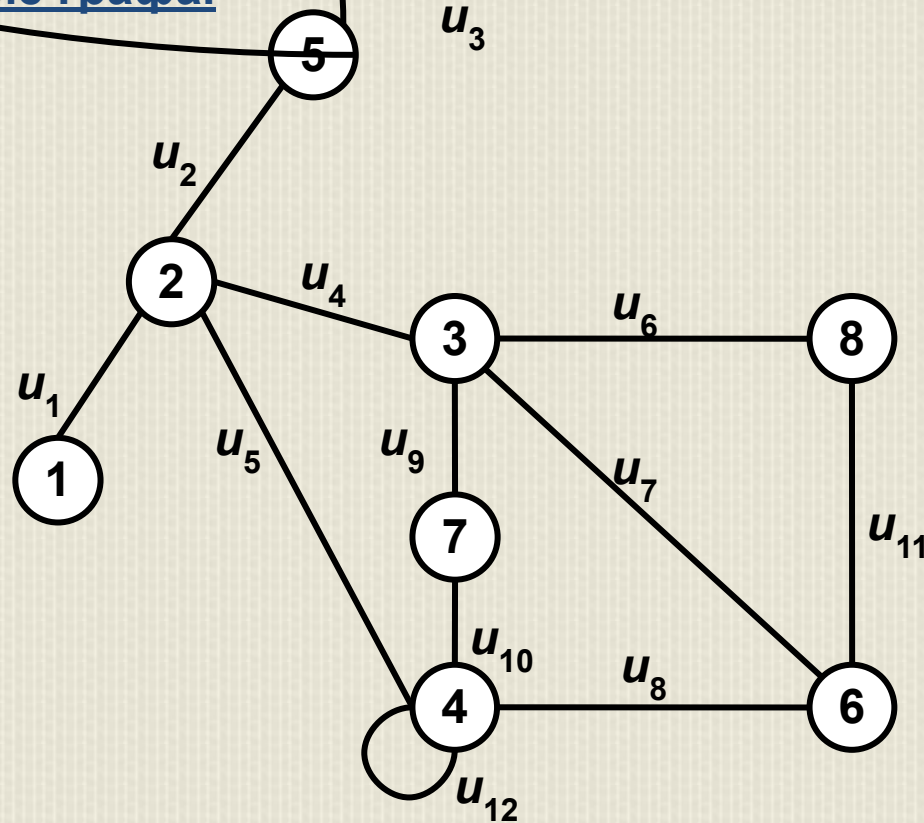


ЗАДАЧА 2.4.

Решение:

- Решение данной задачи полностью аналогично решению задачи 2.1. Поэтому здесь приводятся только ответы:

а) Графическое задание графа.



ЗАДАЧА 2.4.

б) Матрица инциденций графа.

V	1	2	3	4	5	6	7	8
u_1	1	1	0	0	0	0	0	0
u_2	0	1	0	0	1	0	0	0
u_3	0	0	0	0	1	0	0	0
u_4	0	1	1	0	0	0	0	0
u_5	0	1	0	1	0	0	0	0
u_6	0	0	1	0	0	0	0	1
u_7	0	0	1	0	0	0	1	0
u_8	0	0	0	1	0	0	1	0
u_9	0	0	1	0	0	0	1	0
u_{10}	0	0	0	1	0	0	1	0
u_{11}	0	0	0	0	0	0	1	1
u_{12}	0	0	0	1	0	0	0	0



ЗАДАЧА 2.4.

в) Функциональное представление графа:

- $\Gamma(v_1) = \{v_1, v_1\};$
- $\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3, v_4, v_5\};$
- $\Gamma(v_3) = \{v_1, v_6, v_7, v_8\};$
- $\Gamma(v_4) = \{v_2, v_4, v_6, v_7\};$
- $\Gamma(v_5) = \{v_2, v_5\};$
- $\Gamma(v_6) = \{v_3, v_4, v_8\};$
- $\Gamma(v_7) = \{v_3, v_4\};$
- $\Gamma(v_8) = \{v_3, v_6\}.$



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ: СОВЕТЫ И ЗАМЕЧАНИЯ

- Решение любой задачи на графы лучше начинать с построения графического представления исходного графа.
- Необходимо быть очень осторожным при определении количества вершин, образующих граф, так как некоторые вершины могут быть несвязанными с другими вершинами.
- Вершины в графическом представлении графа лучше располагать так, чтобы пересекалось как можно меньше ребер и дуг, а сами вершины были сгруппированы по некоторому признаку подобия.
- Матрица смежности неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали, в то время как матрица смежности ориентированного графа имеет, вообще говоря, произвольный вид.



СОВЕТЫ И ЗАМЕЧАНИЯ

- Для удобства нули в матрицах смежности и инциденций чаще всего опускаются.
- Функции $\Gamma^1(v_i)$ и $\Gamma^{-1}(v_i)$ в функциональном представлении неориентированного графа совпадают и обозначаются просто $\Gamma(v_i)$.
- Строкам матрицы смежности ориентированного графа соответствует функция $\Gamma^1(v_i)$, а столбцам - $\Gamma^{-1}(v_i)$.

