Дискретная математика, модуль 2

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Занятие 1: Основные определения.

Занятие 2: Способы задания графов. Изоморфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- **Графом G** называется любая пара (V,U), где $V = \{v_1, v_2, ... \}$ - множество элементов любой природы, а $U = \{u_1, u_2, ... \}$ – семейство пар элементов из V, причем допускаются пары вида (v_i, v_i) и одинаковые пары.

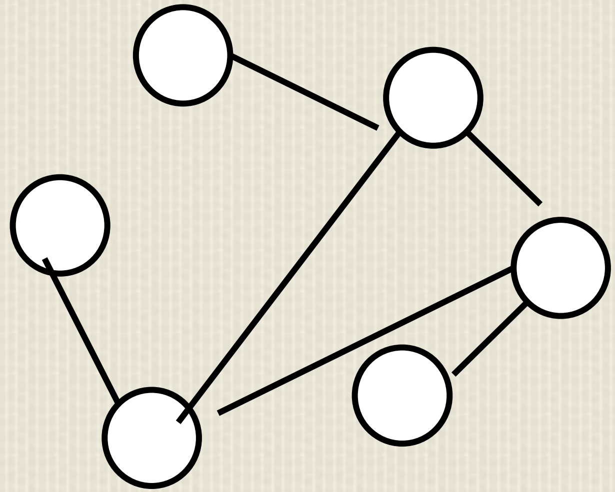
- Если пары в U рассматриваются как неупорядоченные, то граф называется ***неориентированным***, если как упорядоченные, то граф называется ***ориентированным*** (***орграфом***).

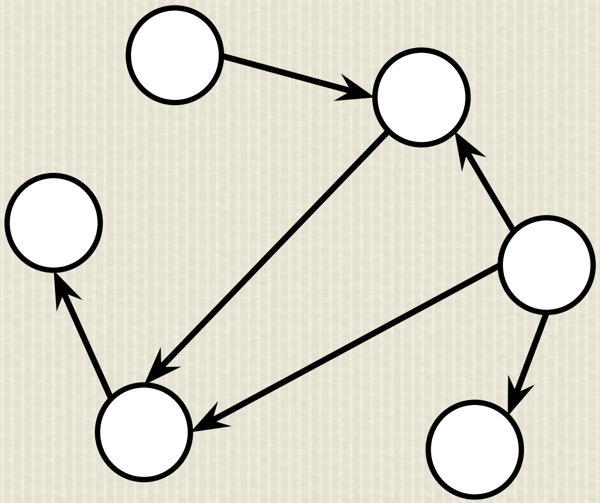
- Элементы множества V называются ***вершинами*** графа, а пары из U в неориентированном графе называются ***ребрами***, а в орграфе – ориентированными ребрами или чаще ***дугами***.

- Ребро $u = (v_i, v_j)$ в неориентированном графе соединяет вершины v_i и v_j, а в ориентированном графе дуга $u = (v_i, v_j)$ идет из вершины v_i в вершину v_j.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ГРАФОВ

- Вершины будем изображать точками, а каждое ребро (дугу) (v_i, v_j) – линией, соединяющей точки, соответствующие вершинам v_i и v_j.





- Если (v_i, v_j) – дуга, то на этой линии будем указывать стрелку от v_i к v_j.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Вершины v_i и v_j ***смежны*** в графе $G = (V, U)$, если в U входит пара (v_i, v_j) или (v_j, v_i). Ребро (дуга) (v_i, v_j) ***инцидентно*** вершинам v_i и v_j.
- Два различных ребра графа называются ***смежными***, если они имеют, по крайней мере, одну общую вершину.
- Пара вида (v_i, v_i) называется ***петлей*** в вершине v_i.
- Если пара (v_i, v_j) встречается в U более одного раза, то говорят, что (v_i, v_j) – ***кратное*** *ребро*.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- **Каждое ребро *u* из *U* (кроме петель) *инцидентно* ровно двум вершинам v_i, v_j, которые оно соединяет.**

- ***Степенью St(v)* вершины *v* неориентированного графа *G* называется число ребер, инцидентных *v*.**

- **Вершина степени 0 называется *изолированной* вершиной.**
- **Вершина степени 1 называется *висячей* или *концевой* вершиной.**

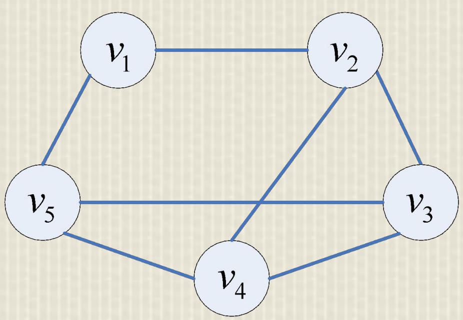
- **Пусть $G=(V,U)$ – *n*-вершинный граф, а $s_1,s_2,\ldots,s_n$ – степени его вершин, выписанные в порядке невозрастания: $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n$.**

- **Упорядоченную систему $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ будем называть *вектором степеней графа* *G* и кратко обозначать $s(G)$.**

Степень графа

- **Степень графа** *G:* $$S(G) = \max_{v_i \in V}\{s(v_i)\}$$

- **Минимальная степень графа:** $$\delta(G) = \min_{v_i \in V}\{s(v_i)\}$$



$$s(v_1) = 2$$
$$s(v_2) = 3$$
$$s(v_3) = 3$$
$$s(v_4) = 3$$
$$s(v_5) = 3$$

$$S(G) = 3$$
$$\delta(G) = 2$$

Сумма степеней вершин

- **Теорема**
  Сумма степеней вершин графа есть число четное:

$$\sum_{v_i \in V} s(v_i) = 2q$$

- **Следствие**
  Число вершин с нечетными степенями – четно.

Частичные графы и подграфы

Пусть *G=(V,U)* - некоторый граф

- **Граф $G_1=(V_1,U_1)$ называется *частичным графом* графа *G*, если $V_1=V$ и $U_1 \subseteq U$**

- **Граф $G_2=(V_2,U_2)$ называется *подграфом* графа *G*, если:**
  - $V_2 \subseteq V$
  - ***из*** $v_i \in V_2$, $v_j \in V_2$, v_i ***и*** v_j ***смежны в G, следует, что***
    v_i ***и*** v_j ***смежны в*** G_2
- **Граф $G_3=(V_3,U_3)$ называется *частичным подграфом* графа *G*, если он является частичным графом подграфа графа *G***

КЛИКА ГРАФА

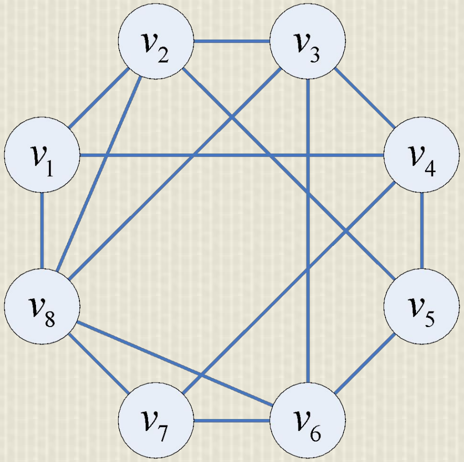
- **Пусть *G*=(*V,U*) - некоторый граф.**
- **Подграф графа, любые две вершины которого смежны, называется *полным подграфом*.**

- ***Клика графа* – любой максимальный по включению полный подграф.**

- ***Кликовое число графа* ρ(*G*) (густота или *плотность*) – максимальное число вершин в кликах данного графа.**

- *Тогда, образно говоря, чем более плотен граф, тем будет больше кликовое число.*

КЛИКА ГРАФА



{v_1,v_5 ,v_6}- неполный подграф, не клика

{v_3,v_4}- полный подграф, клика

{v_1,v_2}- полный подграф, не клика

{v_1,v_2,v_8}- полный подграф, клика

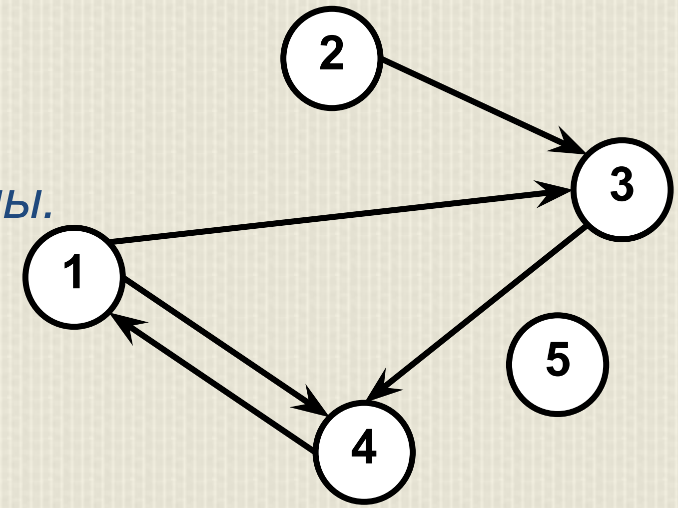
$p(G)=3$

КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

1. **Ориентированным графом** G называется пара (*V*(*G*), *U*(*G*)), где *V*(*G*) — непустое конечное множество элементов, называемых вершинами, а *U*(*G*) — конечное множество упорядоченных пар элементов из *V*(*G*), называемых дугами (или ориентированными ребрами).

Дуга, у которой вершина v_1 является первым элементом, а вершина v_2 — вторым, называется дугой из v_1 в v_2: (v_1, v_2).

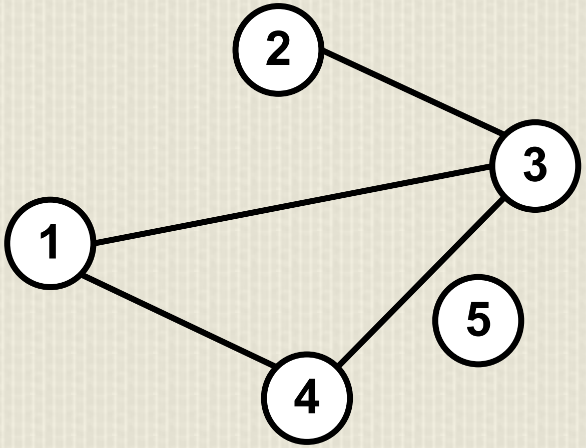
Заметим, что дуги (v_1, v_2) и (v_2, v_1) различны.



КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

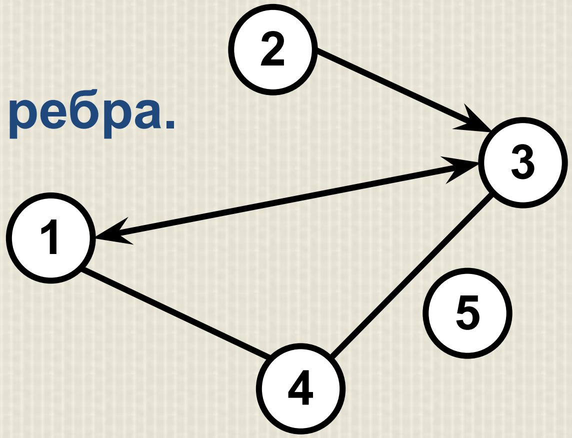
2. Неориентированным графом *G* называется пара (*V*(*G*), *U*(*G*)), где *V*(*G*) — непустое конечное множество элементов, называемых вершинами, а *U*(*G*) — конечное множество неупорядоченных пар элементов из *V(G)*, называемых ребрами.

Будем называть V(G) множеством вершин, а U(G) — множеством ребер графа G. О каждом ребре вида (v_1, v_2) говорят, что оно соединяет вершины v_1 и v_2.

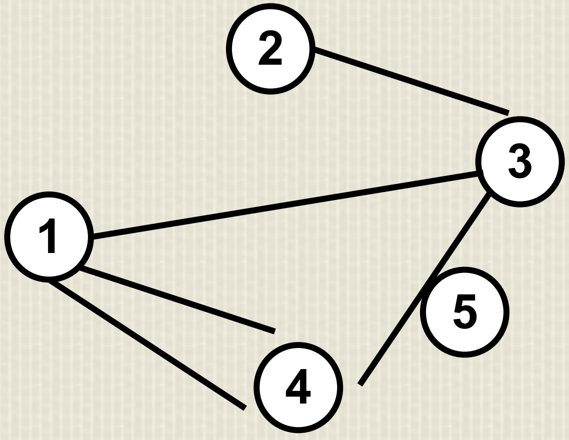


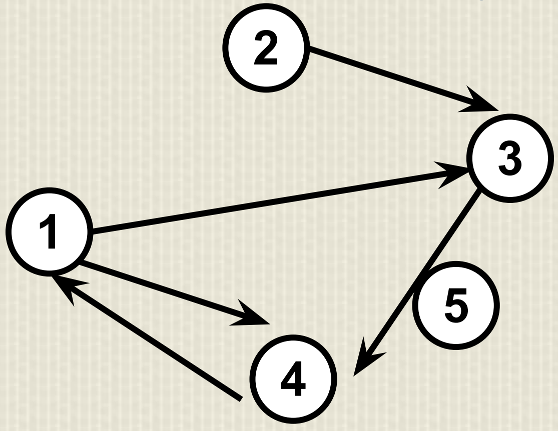
КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

3. ***Смешанный*** ***граф*** **– граф, содержащий как ориентированные, так и неориентированные ребра.**



4. ***Мультиграф*** **– граф, в котором имеется несколько кратных ребер или однонаправленных дуг:** $u_1=(v_i,v_j)$, $u_2=(v_i,v_j)$.



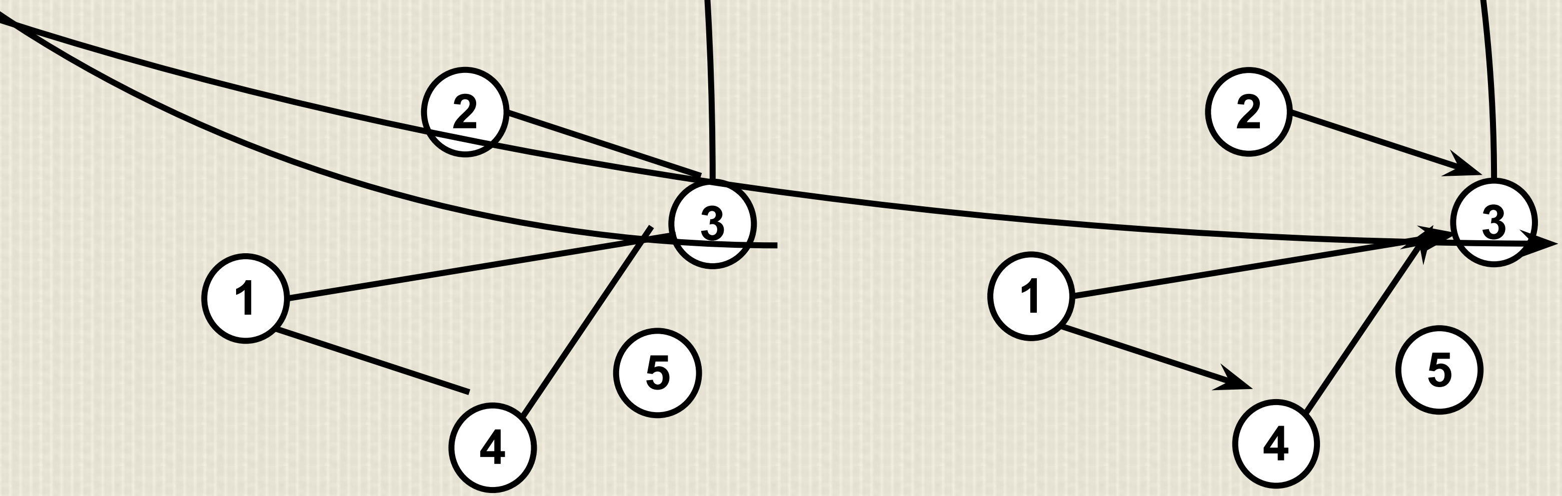


КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

5. ***Псевдограф*** **– граф, содержащий петли.**

в неориентированном графе петлей называется ребро вида (v_1, v_1), которое соединяют вершину v_1 саму с собой,

в ориентированном графе петлей называется дуга вида (v_1, v_1), которая соединяет вершину v_1 саму с собой.



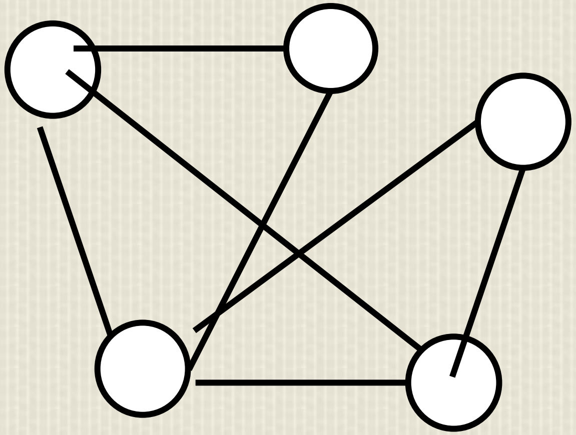
КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

6. ***Мульти-псевдограф*** **– граф, в котором имеются петли и кратные ребра или дуги.**

КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

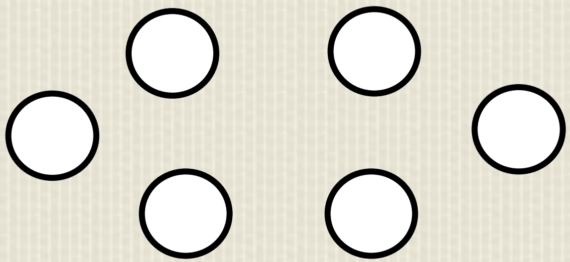
7. ***Взвешенный граф*** **– граф, вершинам и/или дугам (ребрам) которого сопоставляются (приписываются) числа, называемые весом.**

8. ***Простым графом*** **называется граф, который не содержит кратных ребер и не содержит петель.**

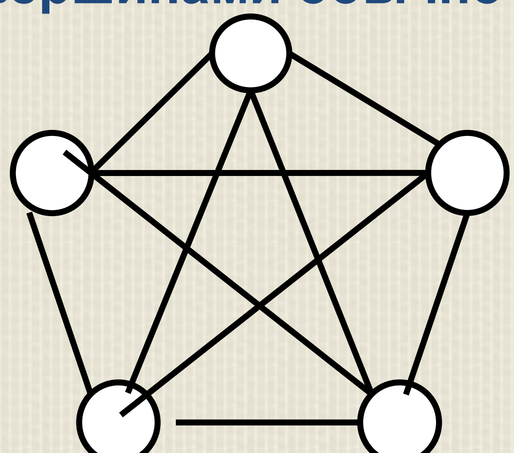


КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

9. ***Пустым графом*** **называется граф, у которого множество ребер пусто. Будем обозначать пустой граф с** ***n*** **вершинами через** P_n



10. **Простой граф называется** ***полным*****, если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром. Полный граф с** ***n*** **вершинами обычно обозначается через** K_n**.**



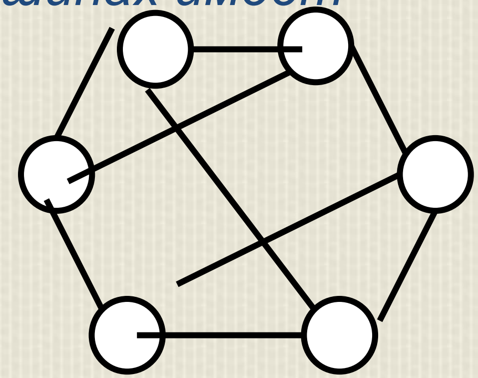
Заметим, что граф K_n *имеет*

ровно $n \cdot \frac{n-1}{2}$ *ребер.*

КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ

11. **Граф, у которого все *n* вершин имеют одну и ту же степень, называется <u>*регулярным графом*</u>. Если степень каждой вершины равна *r*, то граф называется регулярным степени *r* .**

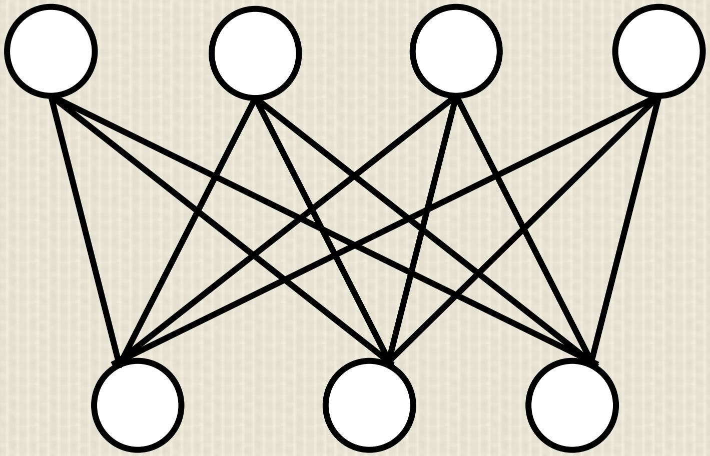
Заметим, что регулярный граф степени r на n вершинах имеет ровно $n \cdot \frac{r}{2}$ *ребер.*



12. **<u>*Двудольный граф*</u> — это граф *G*(*V*,*U*), такой, что множество вершин *V* разбито на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, причем всякое ребро *U* инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 (то есть соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2). Множества V_1 и V_2 называются «долями» двудольного графа.**

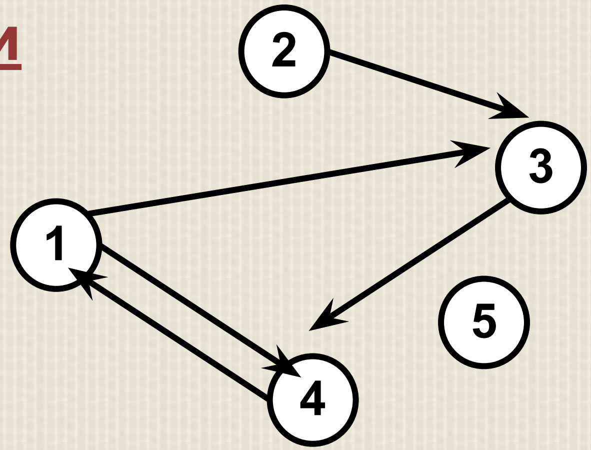
Классификация графов

13. **Двудольный граф называется «полным»**, если любые две вершины из V_1 и V_2 являются смежными. Если $|V_1|=n_1$, $|V_2|=n_2$, то полный двудольный граф обозначается $K_{n1',n2}$. Заметим, что граф $K_{n1',n2}$ имеет ровно n_1+n_2 вершин и n_1*n_2 ребер.



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

- **1. Графически**

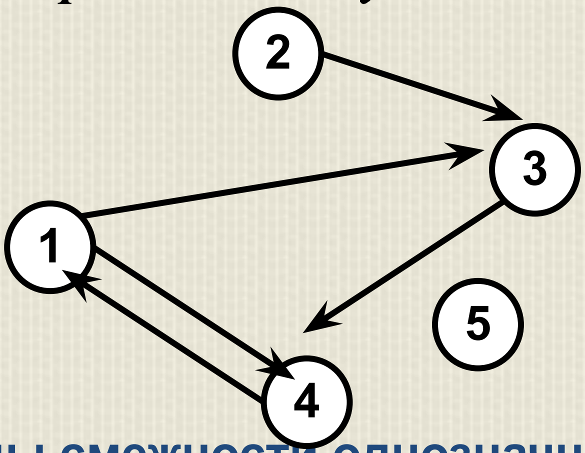


- **Графический способ изображения графов является самым наглядным и наиболее удобным для человеческого восприятия.**
- **Однако для практического использования в прикладных целях, когда на основании теории графов решаются задачи с помощью вычислительной техники и специально разработанных алгоритмов, требуется специальное, ориентированное на автоматизированную обработку, представление данных.**

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

- 2. При помощи матрицы смежности S ($V \times V$):

$$s(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists \text{ ребро или дуга } (v_i, v_j); \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	1	1	0
v_2	0	0	1	0	0
v_3	0	0	0	1	0
v_4	1	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0

- **Матрицы смежности однозначно задают как неориентированные (в этом случае матрица симметрична относительно главной диагонали), так и ориентированные графы. Принципиально нет проблем и с заданием смешанных графов, для них эквивалентно выглядит задание ребра и пары разнонаправленных дуг.**

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

- **3. При помощи матрицы инциденций A (U×V)**

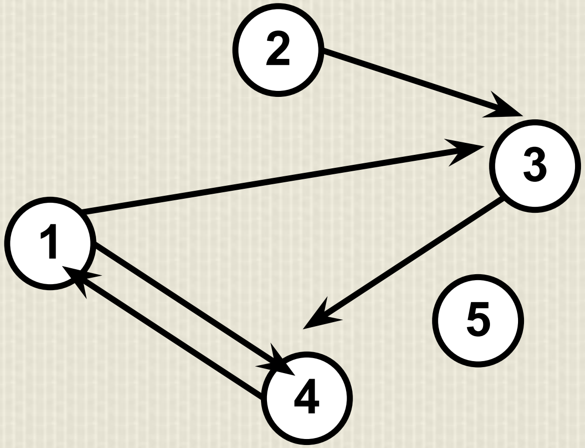
для ориентированных графов:

$$a(i,j)=\begin{cases}1, \textit{если } v_j \textit{ исток дуги } u_i;\\ -1, \textit{если } v_j \textit{ сток дуги } u_i;\\ 0, \textbf{если } v_j \textit{ не инцидентна дуге } u_i\end{cases}$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_{23}	0	1	-1	0	0
u_{13}	1	0	-1	0	0
u_{14}	1	0	0	-1	0
u_{41}	-1	0	0	1	0
u_{34}	0	0	1	-1	0

для неориентированных графов:

$$a(i,j)=\begin{cases}1, \textit{если } v_j \textit{ инцидентна ребру } u_i;\\ 0, \textbf{если } v_j \textit{ не инцидентна ребру } u_i\end{cases}$$



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

- **Матрицы инциденций однозначно задают как неориентированные, так и ориентированные графы.**
- **В принципе нет никаких препятствий для задания смешанных графов – в отличие от матрицы смежности в этом случае задание ребра и пары разнонаправленных дуг будет отличаться.**
- **Никаких проблем не возникает с мультиграфами (и в ориентированном, и в неориентированном случаях), а также с неориентированными псевдографами.**

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

- **Неоднозначность возникает при задании ориентированных псевдографов: на пересечении строки, помеченной петлей, и столбца, помеченного вершиной, на которой эта петли присутствует, по правилу должны одновременно находиться как 1 так и –1.**

- **Из этой ситуации имеется выход: вместо одной матрицы А (*U*×*V*) граф задается двумя матрицами – истоков A^+ (*U*×*V*) и стоков A^- (*U*×*V*):**

$$a^+(i,j)=\begin{cases}1, & \textit{если } v_j \textit{ исток дуги } u_i;\\ 0, & \textit{иначе}.\end{cases}$$

$$a^-(i,j)=\begin{cases}1, & \textit{если } v_j \textit{ сток дуги } u_i;\\ 0, & \textit{иначе}.\end{cases}$$

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

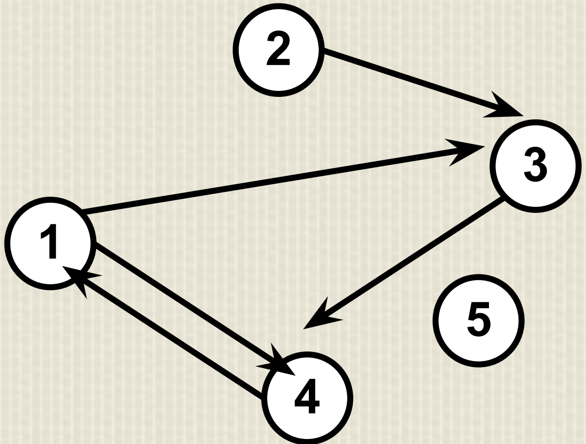
- **4. При помощи функционального представления Γ^{1} и Γ^{-1}**

$\Gamma^{1}(v_i) = \{v_j\}$: $\exists$ дуга (v_i, v_j);

$\Gamma^{-1}(v_i) = \{v_j\}$: $\exists$ дуга (v_j, v_i).

При помощи функционального представления однозначно задаются как неориентированные (в этом случае $\Gamma^{1} = \Gamma^{-1}$), так и ориентированные и смешанные графы. Как и в случае с матрицей смежности, для смешанных графов эквивалентно выглядит задание ребра и пары разнонаправленных дуг.

- $\Gamma^{1}(v_1)=\{v_3,v_4\}$; $\Gamma^{-1}(v_1)=\{v_4\}$;
- $\Gamma^{1}(v_2)=\{v_3\}$; $\Gamma^{-1}(v_2)=\varnothing$;
- $\Gamma^{1}(v_3)=\{v_4\}$; $\Gamma^{-1}(v_3)=\{v_1,v_2,\}$;
- $\Gamma^{1}(v_4)=\{v_1\}$; $\Gamma^{-1}(v_4)=\{v_1,v_3\}$;
- $\Gamma^{1}(v_5)=\varnothing$; $\Gamma^{-1}(v_5)=\varnothing$.



ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

- **Изоморфизмом графов** G_1 и G_2 называется биекция между множествами вершин графов такая, что любые две вершины графа G_1 смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины смежны в графе G_2.

Здесь графы понимаются неориентированными и не имеющими весов вершин и ребер.

В случае, если понятие изоморфизма применяется к ориентированным или взвешенным графам, накладываются дополнительные ограничения на сохранение ориентации дуг и значений весов.

Если изоморфизм графов установлен, они называются изоморфными.

ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

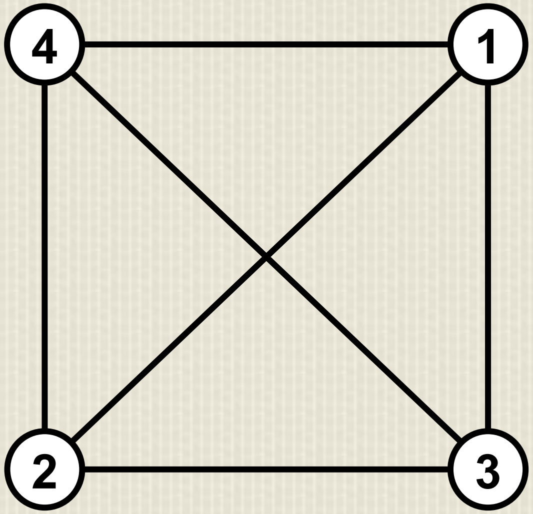
- **Взаимно однозначное отображение множества вершин графа G_1 на множество вершин графа G_2, сохраняющее смежность, называют *изоморфизмом*.**

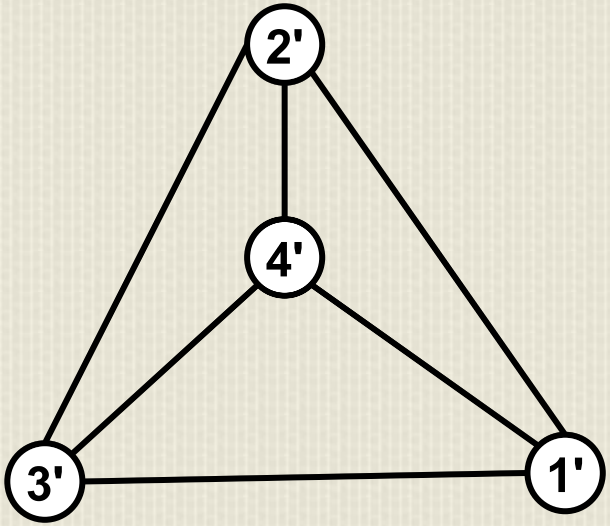
- ***Изоморфные графы* – это графы, которые имеют одинаковое число вершин и одинаковое число ребер, причем для вершин графов можно ввести одинаковые обозначения таким образом, что неупорядоченные пары вершин, обозначающие ребра, у изоморфных графов будут одинаковы.**

- **Иными словами, графы называются *изоморфными*, если существует такая нумерация вершин в этих графах, что они имеют одну и ту же матрицу смежности (фактически изоморфные графы – это одинаковые графы, которые отличаются только другим *изображением*).**

ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

- **Например, два графа на рисунке ниже изоморфны, так как между множествами их вершин и ребер существуют взаимно однозначное отображение**



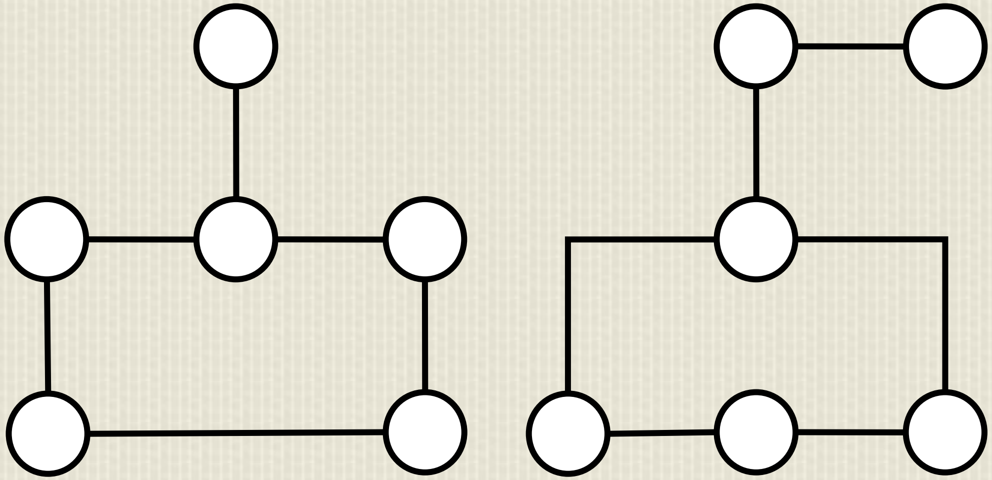


- **Иными словами, изоморфные графы различаются только обозначением вершин.**

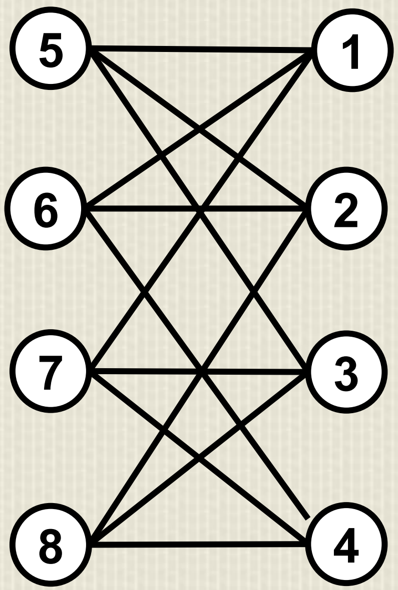
ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

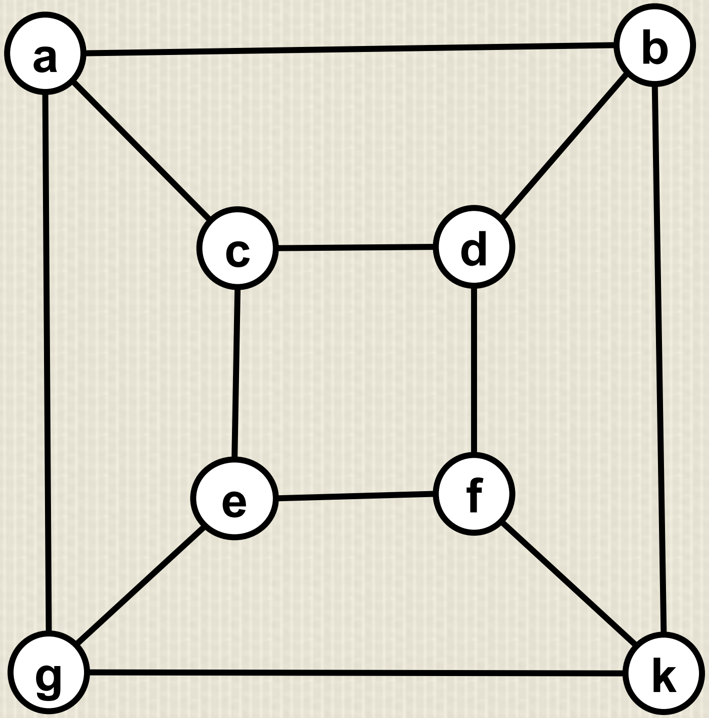
- **Для изоморфизма графов *G* и *G'* необходимо совпадение векторов их степеней: *s*(*G*)=*s*(*G'*). Однако *достаточным это условие не является*.**

- **Например, на рисунке ниже видим две пары неизоморфных графов с одинаковыми векторами: *s* = (1, 2, 2, 2, 2, 3).**



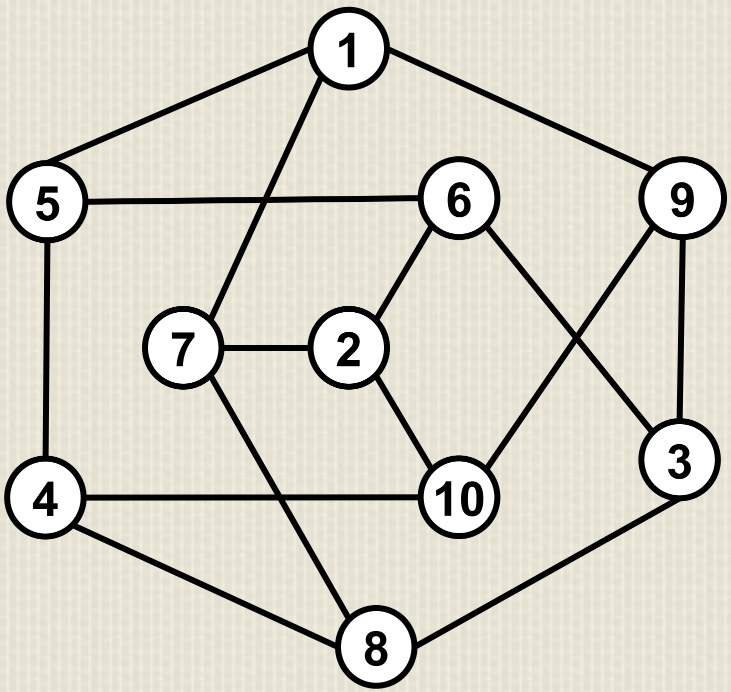
ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

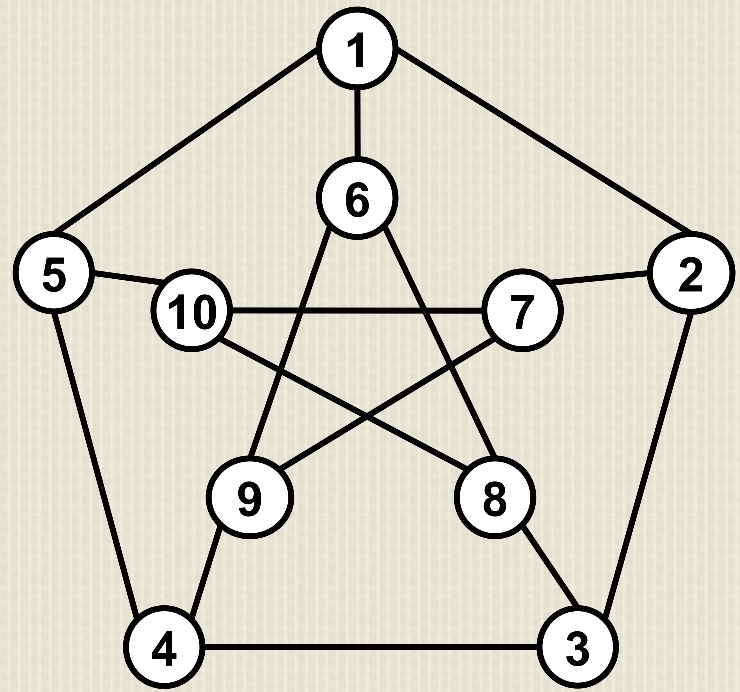




Постройте матрицы смежности обоих графов.
Найдите взаимно однозначное отображение между *V* и *V'*.
Найти еще несколько изоморфных данному графов

ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ





- **Найдите взаимно однозначное отображение между *V* и *V'*.**

ИНВАРИАНТЫ ГРАФА

- **Количественная или качественная характеристики, неизменные для всех изоморфных между собой графов (орграфов) называется *ИНВАРИАНТОМ***
- **Примеры инвариантов графа G : количество вершин $n(G)$, количество ребер $m(G)$ и вектор степеней $s(G)=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$, который в частности, дает числовые инварианты минимальной и максимальной степени вершин графа: $\mathrm{min\_st}(v_i)$ и $\mathrm{max\_st}(v_i)$, $i=1,2,\ldots,n$.**
- **Поиск полной системы инвариантов графа, задающей граф с точность до изоморфизма – основная задача теории графов**

(*полная система инвариантов ещё не найдена*)

ЗАДАЧА 2.1.

Дан неориентированный граф, заданный своим функциональным представлением:

- $\Gamma(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;
- $\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3\}$;
- $\Gamma(v_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$;
- $\Gamma(v_4) = \{v_1, v_5\}$;
- $\Gamma(v_5) = \{v_1, v_3, v_4\}$;
- $\Gamma(v_6) = \varnothing$.

- **Задать этот граф тремя другими способами: графически; с помощью матрицы инциденций; с помощью матрицы смежности.**

ЗАДАЧА 2.1.

Решение:

- **Подобные задачи на построение графа необходимо начинать с определения всех вершин, входящих в множество *V*. Для функционального представления множество вершин графа совпадает с областью определения функции Г. В нашем случае получаем, что $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$. Также необходимо заметить, что множество *V* может и не совпадать с объединением множеств Г(v_i). Что очень хорошо видно в этом примере: вершина v_6 не входит ни в одно из множеств, порождаемых функцией Г.**

а) Построение графического способа задания графа.

- **Графический способ изображения графов является самым наглядным и наиболее удобным для человеческого восприятия, потому и решение любой задачи в теории графов лучше всего начинать с построения графического представления.**

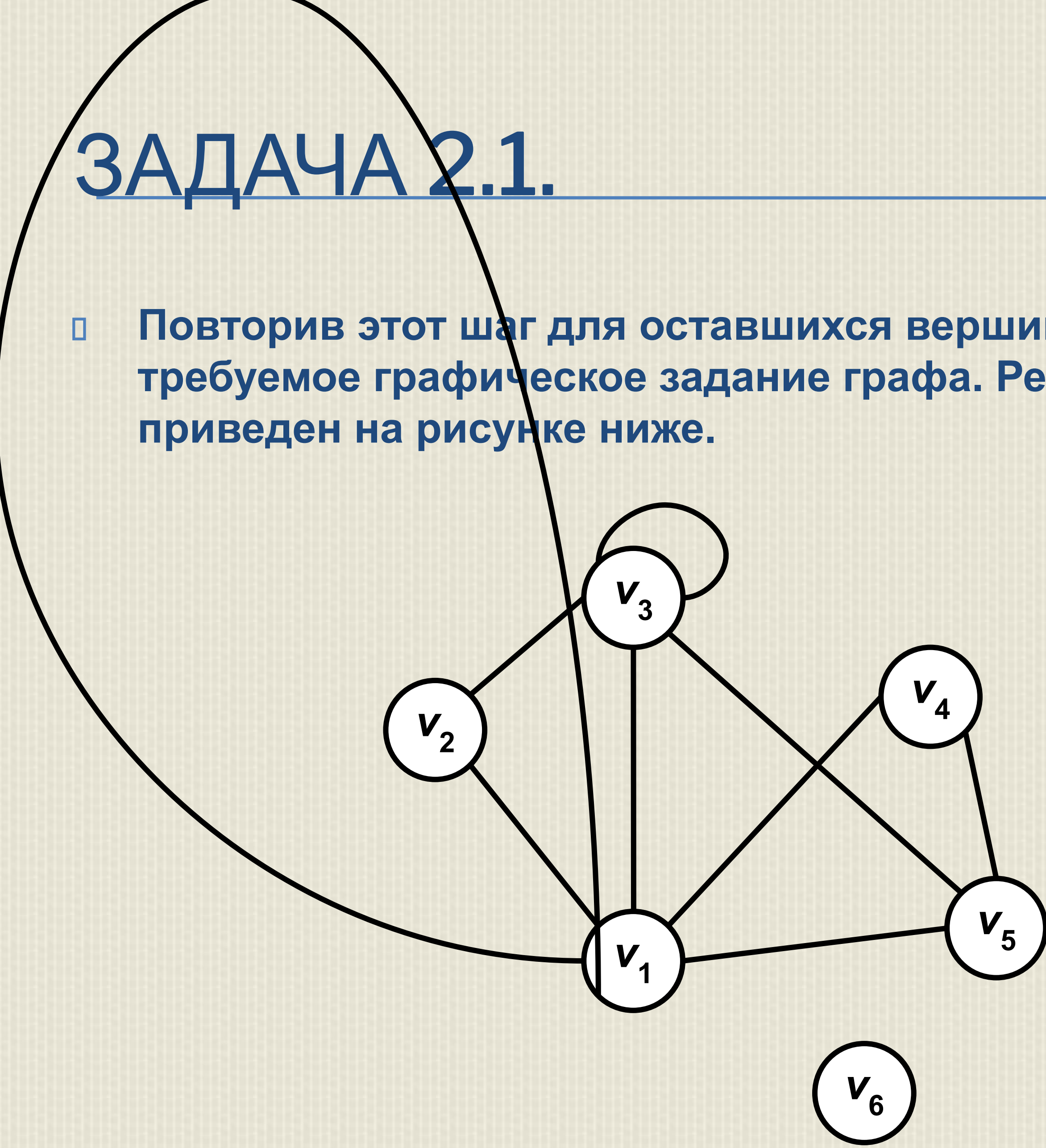
ЗАДАЧА 2.1.

- **Сначала изобразим в виде кружков с написанным названием внутри все вершины, входящие в множество *V*.**
- **Они могут находится совершенно в произвольных местах и не обязаны каким-либо образом быть упорядочены.**
- **Выберем вершину v_1 и с помощью линий соединим ее со всеми вершинами, входящими в множество $\Gamma(v_1)$, то есть с вершинами v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.**
- **Сама же вершина v_1 соединяется сама с собой с помощью петли.**

- **Далее рассмотрим вершину v_2, она смежна с вершинам v_1 и v_3, но ребро (v_1, v_2) уже построено, а в случае неориентированного графа, значит, и ребро (v_2, v_1) тоже построено.**
- **Таким образом необходимо построить ребро только между вершиами v_2 и v_3.**

ЗАДАЧА 2.1.

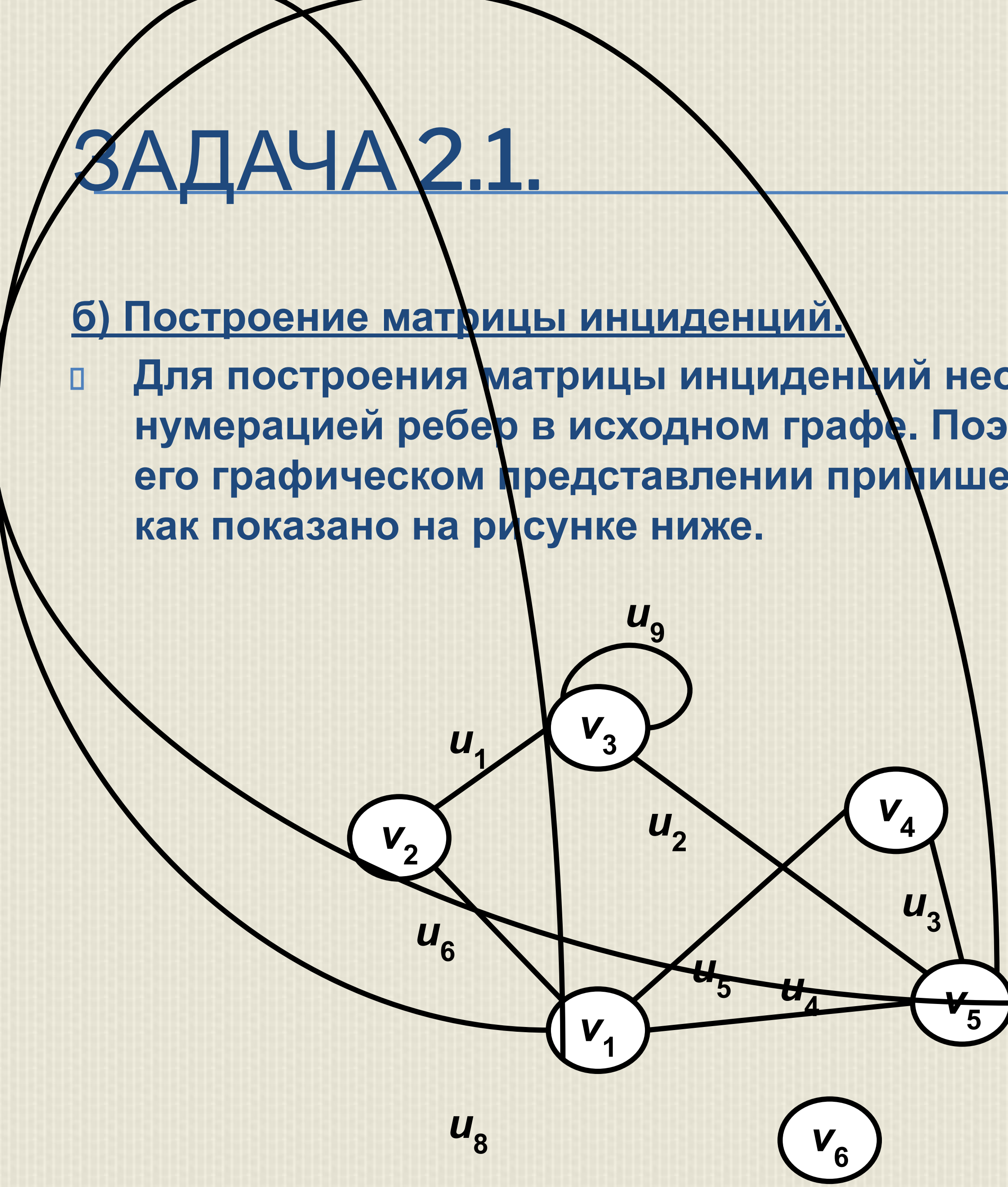
- Повторив этот шаг для оставшихся вершин множества *V* , получим требуемое графическое задание графа. Результат построения приведен на рисунке ниже.



ЗАДАЧА 2.1.

<u>б) Построение матрицы инциденций.</u>

- Для построения матрицы инциденций необходимо определиться с нумерацией ребер в исходном графе. Поэтому каждому ребру графа в его графическом представлении припишем название, например так, как показано на рисунке ниже.



ЗАДАЧА 2.1.

- Далее необходимо построить матрицу размерности девять на шесть, перечислив ребра u_i в первом столбце, а вершины v_j – в первой строке.
- Рассмотрим заполнение строки, соответствующей ребру u_1.
- Как видно из рисунка ребро u_1 инцидентно вершинам v_2 и v_3, а значит в соответствующих им ячейках строки u_1 ставим единицы.
- Повторяем тот же алгоритм для ребер u_2, u_3, u_4, u_5 и u_6.
- В случае же ребер u_7, u_8 и u_9 единица оказывается только в ячейке, соответствующей вершине, с которой данное ребро непосредственно соединено (т.о. для петель в строке матрицы инциденций стоит одна единичка).
- Получившаяся в результате матрица инциденций представлена на рисунке ниже.

ЗАДАЧА 2.1.

Получившаяся в результате матрица инциденций:

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
u_1	0	1	1	0	0	0
u_2	0	0	1	0	1	0
u_3	0	0	0	1	1	0
u_4	1	0	0	0	1	0
u_5	1	0	0	1	0	0
u_6	1	1	0	0	0	0
u_7	0	0	0	0	1	0
u_8	1	0	0	0	0	0
u_9	0	0	1	0	0	0

ЗАДАЧА 2.1.

в) Построение матрицы смежности.

- **Построение матрицы смежности легче производить по графическому заданию графа.**
- **Для этого сначала необходимо построить матрицу размерности шесть на шесть, по вертикали и горизонтали перечислив вершины v_i.**
- **Рассмотрим построение строки, соответствующей вершине v_i: данная вершина смежна вершинам v_2, v_3, v_4, и v_5, а значит в соответствующих им ячейках матрицы проставляем единицы.**
- **То же повторяем для вершин v_2, v_3, v_4 и v_5.**
- **Вершина v_6 не связана ребром ни с одной другой вершиной графа, а потому матрица смежности содержит соответствующую ей нулевую строку и нулевой столбец.**

ЗАДАЧА 2.1.

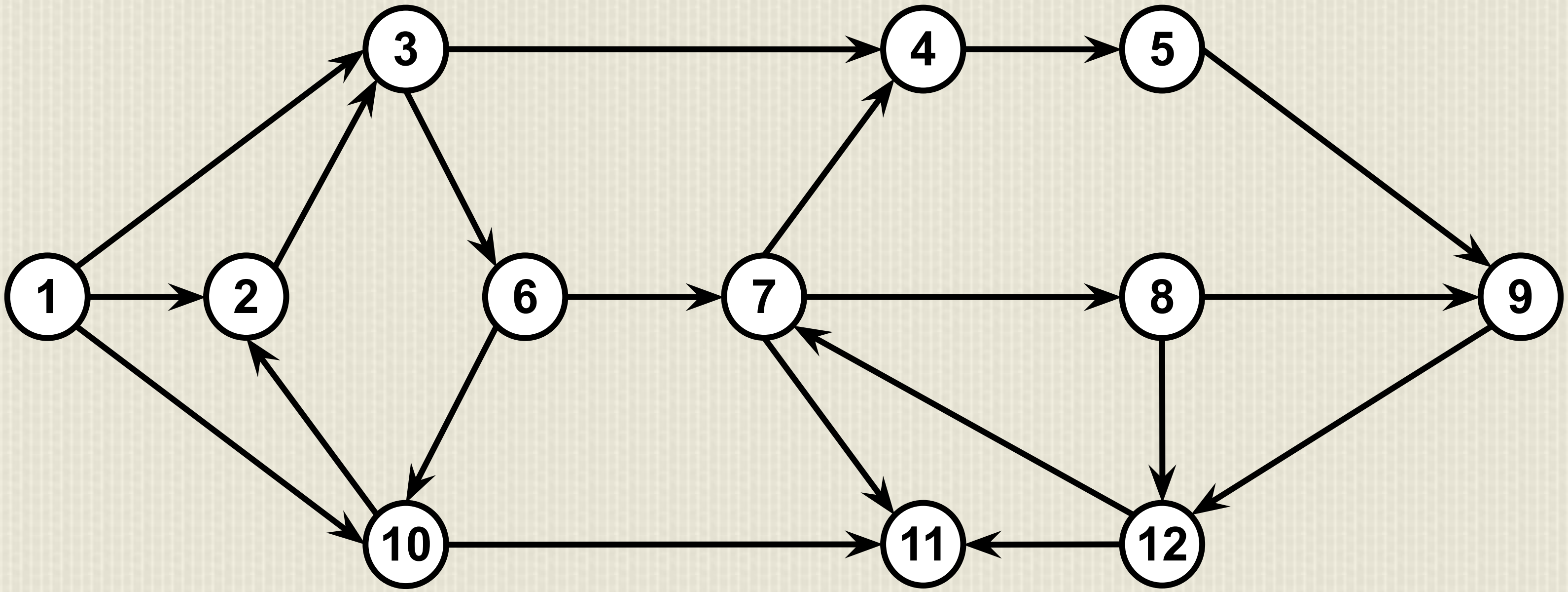
- Полученная матрица смежности представлена на рисунке ниже.

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	1	1	1	1	1	0
v_2	1	0	1	0	0	0
v_3	1	1	1	0	1	0
v_4	1	0	0	0	1	0
v_5	1	0	1	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0

- Как и следовало ожидать, матрица смежности для неориентированного графа оказалась симметричной.

ЗАДАЧА 2.2.

- **Дан ориентированный граф, заданный графическим способом:**



- **Задать этот граф тремя другими способами: с помощью матрицы смежности; с помощью матрицы инциденций; с помощью функционального представления.**

ЗАДАЧА 2.2.

- **Как видно из графического представления граф содержит 12 вершин. Теперь можно начинать построение требуемых способов задания графа.**

а) Построение матрицы смежности.

- **Сначала необходимо отметить принципиальное отличие между матрицей смежности ориентированного и неориентированного графа.**
- **В случае ориентированного графа матрица S не обязательна должна быть симметричной. Например, как видно из графического представления графа, дуга (v_1,v_2) принадлежит множеству U, а дуга (v_2,v_1) – нет.**
- **Сначала, как и в прошлом задании, построим матрицу размерности 12 на 12, по вертикали и горизонтали перечислив вершины v_i. Рассмотрим вершину v_1. Как видно из графического представления графа, из v_1 исходят дуги, приходящие в вершины v_2, v_3, v_{10}, поэтому, в соответствующих им ячейках строки v_1 ставим единицы. Далее рассмотрим вершину v_2: по той же схеме получаем единицу в столбце v_3.**

ЗАДАЧА 2.2.

- Продолжая этот алгоритм для всех оставшихся вершин, получим матрицу смежности, представленную на рисунке ниже.

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
v_2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
v_7	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
v_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
v_{11}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
v_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0

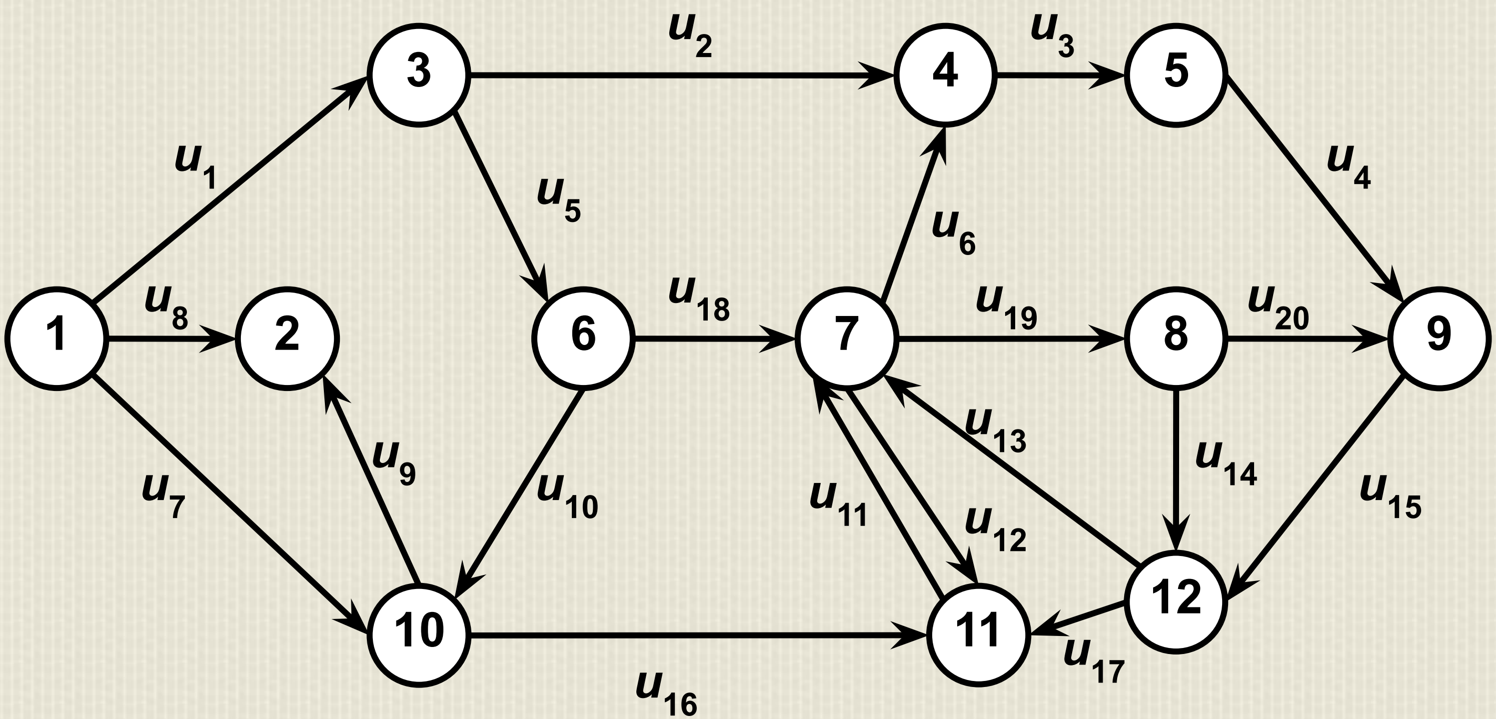
ЗАДАЧА 2.2.

<u>**б) Построение матрицы инциденций.**</u>

- **Как и в случае с матрицей смежности, матрица инциденций неориентированного графа кардинально отличается от матрицы смежности ориентированного графа. Основное отличие заключается в том, что в ней указывается не просто инцидентность ребра u_i вершине v_j, а так же сведения о том, является ли вершина v_j истоком или стоком ребра u_i.**
- **Сначала необходимо пронумеровать все дуги исходного графа. Стоит так же заметить, что вершинам v_7 и v_{11} инцидентны одновременно две разнонаправленные дуги.**

ЗАДАЧА 2.2.

- **Возможная нумерация ребер графа предложена на рисунке**



ЗАДАЧА 2.2.

- **Далее построим матрицу размерности 20 на 12, по строкам перечислив дуги u_i, а по столбцам вершины v_j.**
- **Рассмотрим вершину v_1: она является истоком дуг u_1, u_7 и u_8, поэтому в соответствующих им строках столбца v_1 проставляем единицы.**
- **Вершина v_3 является истоком дуг u_2 и u_5 и стоком для дуги u_1, поэтому в ячейках матрицы A на пересечении u_2, u_5 и v_3 проставляем единицы, а на перечечении u_2 и v_3 – минус единицы.**
- **Продолжая такой разбор столбцов для остальных вершин графа, получаем матрицу инциденций, представленную на рисунке ниже.**

ЗАДАЧА 2.2.

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
u_1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
u_4	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0
u_5	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
u_6	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0
u_7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
u_8	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_9	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
u_{10}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
u_{11}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
u_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0
u_{13}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
u_{14}	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
u_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1
u_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
u_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
u_{18}	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
u_{19}	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
u_{20}	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0

ЗАДАЧА 2.2.

в) Построение функционального представления.

- **Функциональные представления графа и орграфа также отличаются. Если неориентированный граф полностью характеризуется функцией Г, то для ориентированного графа необходимо ввести функцию $Г^1(v_i)$, характеризующую исток вершины v_i, и функцию $Г^{-1}(v_i)$, характеризующую сток вершины v_i.**
- **Функциональное представление достаточно просто строится с помощью графического задания этого графа.**
- **Но наиболее простым путем здесь будет построение с помощью матрицы смежности.**
- **Не сложно заметить, что строкам матрицы смежности соответствует функция $Г^1(v_i)$, а столбцам - $Г^{-1}(v_i)$.**

ЗАДАЧА 2.2.

- **Таким образом получаем, что:**
- $\Gamma^1(v_1) = \{v_2, v_3, v_{10}\}$; $\Gamma^{-1}(v_1) = \varnothing$;
- $\Gamma^1(v_2) = \{v_3\}$; $\Gamma^{-1}(v_2) = \{v_1, v_{10}\}$;
- $\Gamma^1(v_3) = \{v_4, v_6\}$; $\Gamma^{-1}(v_3) = \{v_1, v_2\}$;
- $\Gamma^1(v_4) = \{v_5\}$; $\Gamma^{-1}(v_4) = \{v_3, v_7\}$;
- $\Gamma^1(v_5) = \{v_9\}$; $\Gamma^{-1}(v_5) = \{v_4\}$;
- $\Gamma^1(v_6) = \{v_{10}\}$; $\Gamma^{-1}(v_6) = \{v_3\}$;
- $\Gamma^1(v_7) = \{v_4, v_8, v_{11}\}$; $\Gamma^{-1}(v_7) = \{v_{11}, v_{12}\}$;
- $\Gamma^1(v_8) = \{v_9, v_{12}\}$; $\Gamma^{-1}(v_8) = \{v_7\}$;
- $\Gamma^1(v_9) = \{v_{12}\}$; $\Gamma^{-1}(v_9) = \{v_5, v_8\}$;
- $\Gamma^1(v_{10}) = \{v_2, v_{11}\}$; $\Gamma^{-1}(v_{10}) = \{v_1, v_6\}$;
- $\Gamma^1(v_{11}) = \{v_{11}\}$; $\Gamma^{-1}(v_{11}) = \{v_7, v_{12}\}$;
- $\Gamma^1(v_{12}) = \{v_7, v_{11}\}$; $\Gamma^{-1}(v_{12}) = \{v_8, v_{12}\}$.

ЗАДАЧА 2.3.

- **Дан ориентированный граф, заданный матрицей инциденций:**

V	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_1	1	-1							
u_2	1							-1	
u_3	1								-1
u_4								1	-1
u_5							-1		1
u_6							-1	1	
u_7		1					-1		
u_8		-1					1		
u_9		1	-1						
u_{10}			-1				1		
u_{11}						-1	1		
u_{12}				-1				1	

- **Задать этот граф тремя другими способами: графически, с помощью матрицы смежности, с помощью функционального представления.**

ЗАДАЧА 2.3.

Решение:

- Решение данной задачи полностью аналогично решению задачи 2.2. Поэтому здесь приводятся только ответы:

а) Графическое представление графа

ЗАДАЧА 2.3.

б) Матрица смежности графа.

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
v_2	0	0	1	0	0	0	1	0	0
v_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_7	0	1	1	0	0	1	0	0	0
v_8	0	0	0	1	0	0	1	0	1
v_9	0	0	0	0	0	0	1	0	0

ЗАДАЧА 2.3.

в) Функциональное представление графа:

- $\Gamma^1(v_1) = \{v_2, v_8, v_9\}$; $\Gamma^{-1}(v_1) = \varnothing$;
- $\Gamma^1(v_2) = \{v_3, v_7\}$; $\Gamma^{-1}(v_2) = \{v_1, v_7\}$;
- $\Gamma^1(v_3) = \varnothing$; $\Gamma^{-1}(v_3) = \{v_2, v_7\}$;
- $\Gamma^1(v_4) = \varnothing$; $\Gamma^{-1}(v_4) = \{v_8\}$;
- $\Gamma^1(v_5) = \varnothing$; $\Gamma^{-1}(v_5) = \varnothing$;
- $\Gamma^1(v_6) = \varnothing$; $\Gamma^{-1}(v_6) = \{v_7\}$;
- $\Gamma^1(v_7) = \{v_2, v_3, v_6\}$; $\Gamma^{-1}(v_7) = \{v_2, v_8, , v_9\}$;
- $\Gamma^1(v_8) = \{v_4, v_7, v_9\}$; $\Gamma^{-1}(v_8) = \{ v_1\}$;
- $\Gamma^1(v_9) = \{v_7\}$; $\Gamma^{-1}(v_9) = \{v_1, v_8\}$.

ЗАДАЧА 2.4.

- **Дан неориентированный граф, заданный матрицей смежности:**

V	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1						
2	1		1	1	1			
3		1				1	1	1
4		1		1		1	1	
5		1			1			
6			1	1				1
7			1	1				
8			1			1		

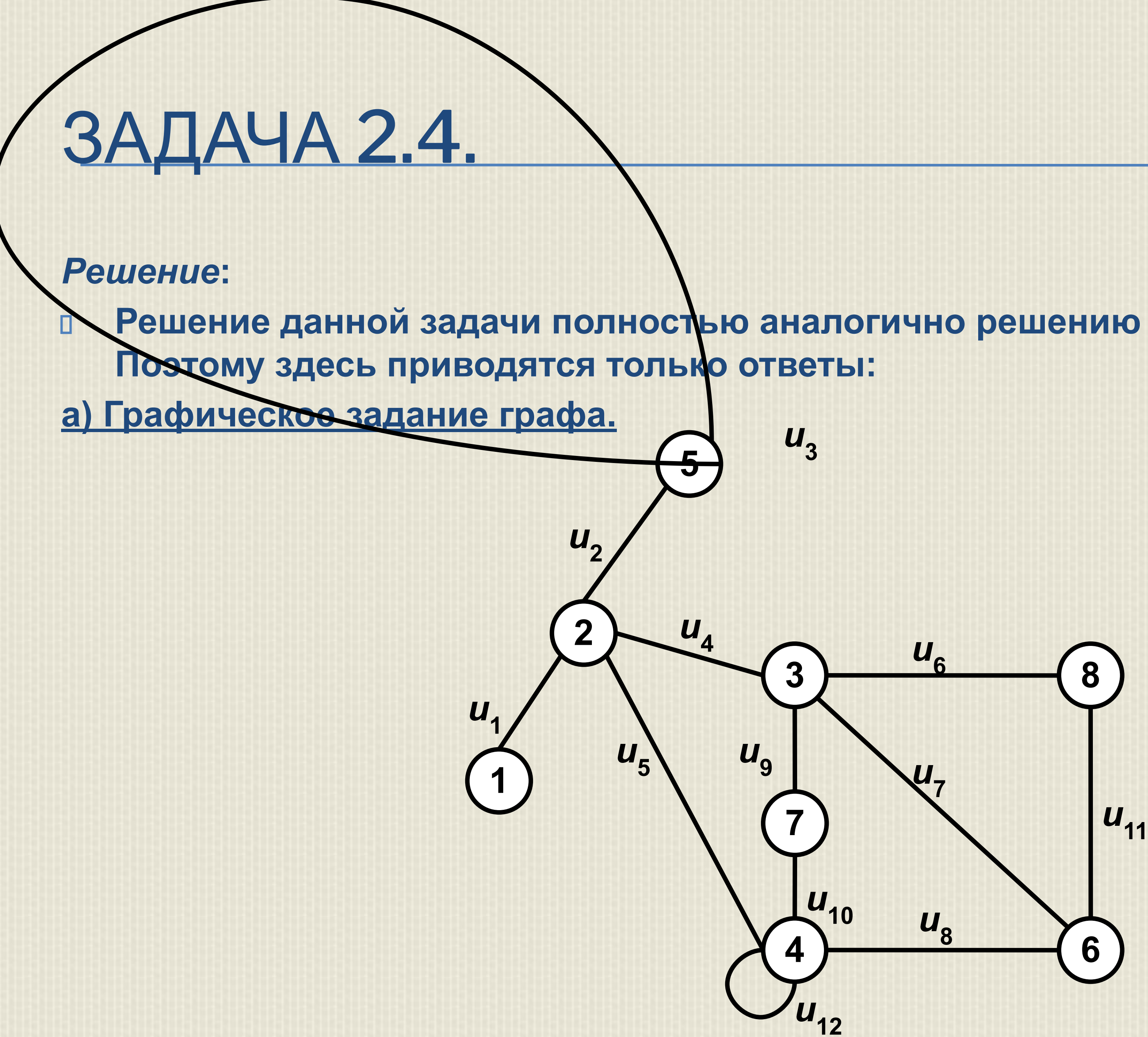
- **Задать этот граф тремя другими способами: графически; с помощью матрицы инциденций; с помощью функционального представления.**

ЗАДАЧА 2.4.

Решение:

- Решение данной задачи полностью аналогично решению задачи 2.1. Поэтому здесь приводятся только ответы:

а) Графическое задание графа.



ЗАДАЧА 2.4.

б) Матрица инциденций графа.

V	1	2	3	4	5	6	7	8
u_1	1	1	0	0	0	0	0	0
u_2	0	1	0	0	1	0	0	0
u_3	0	0	0	0	1	0	0	0
u_4	0	1	1	0	0	0	0	0
u_5	0	1	0	1	0	0	0	0
u_6	0	0	1	0	0	0	0	1
u_7	0	0	1	0	0	0	1	0
u_8	0	0	0	1	0	0	1	0
u_9	0	0	1	0	0	0	1	0
u_{10}	0	0	0	1	0	0	1	0
u_{11}	0	0	0	0	0	0	1	1
u_{12}	0	0	0	1	0	0	0	0

ЗАДАЧА 2.4.

в) Функциональное представление графа:

- $\Gamma(v_1) = \{v_1, v_1\}$;
- $\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$;
- $\Gamma(v_3) = \{v_{1,}, v_6, v_7, v_8\}$;
- $\Gamma(v_4) = \{v_2, v_4, v_6, v_7\}$;
- $\Gamma(v_5) = \{v_2, v_5\}$;
- $\Gamma(v_6) = \{v_3, v_4, v_8\}$;
- $\Gamma(v_7) = \{v_3, v_4\}$;
- $\Gamma(v_8) = \{v_3, v_6\}$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ: СОВЕТЫ И ЗАМЕЧАНИЯ

- **Решение любой задачи на графы лучше начинать с построения графического представления исходного графа.**

- **Необходимо быть очень осторожным при определении количества вершин, образующих граф, так как некоторые вершины могут быть несвязанными с другими вершинами.**

- **Вершины в графическом представлении графа лучше располагать так, чтобы пересекалось как можно меньше ребер и дуг, а сами вершины были сгруппированы по некоторому признаку подобия.**

- **Матрица смежности неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали, в то время как матрица смежности ориентированного графа имеет, вообще говоря, произвольный вид.**

СОВЕТЫ И ЗАМЕЧАНИЯ

- **Для удобства нули в матрицах смежности и инциденций чаще всего опускаются.**
- **Функции $Г^1(v_i)$и $Г^{-1}(v_i)$ в функциональном представлении неориентированного графа совпадают и обозначаются просто $Г(v_i)$.**
- **Строкам матрицы смежности ориентированного графа соответствует функция $Г^1(v_i)$, а столбцам - $Г^{-1}(v_i)$.**