

# Потоки платежей

1. Типы потоков платежей
2. Финансовые ренты
3. Непрерывные потоки платежей, изменяющиеся во времени
4. Расчет параметров финансовой ренты

# 1. Типы потоков платежей

**Потоки платежей** – это платежи, последовательные во времени (выплаты, по купонам облигаций, пенсии и т.д.)

Основные характеристики потоков платежей:

1. Регулярный поток платежей
2. Нерегулярный поток платежей
3. Нарощенная сумма потока платежей
4. Современная стоимость потока платежей

**Регулярный поток платежей (финансовая рента, аннуитет)** – это платежи, у которых все выплаты направлены в одну сторону (например, поступления), а интервалы (периоды) между платежами одинаковы

**Нерегулярный поток платежей** – это платежи, у которых часть выплат является положительной величиной (поступления), а другая часть – отрицательной (выплаты); Интервалы могут быть различными

**Наращенная сумма потока платежей** – это сумма всех выплат с начисленными на них к концу срока сложными процентами

**Современная стоимость потока платежей** – это сумма всех выплат, дисконтированных на начало срока этого потока по сложной процентной ставке

Рассмотрим общий случай потока платежей

Введем обозначения:

$R_k$  — ряд платежей, имеющих знак «плюс» или «минус»;

$t_k$  — время выплаты под номером  $k = 1, 2, \dots, K$ ;

$K$  — количество выплат;

$t_K$  — общий срок выплат;

$i$  — сложная процентная ставка наращенения, начисляемая один раз в году, выплаты производятся в конце периода (рис. 2.1).

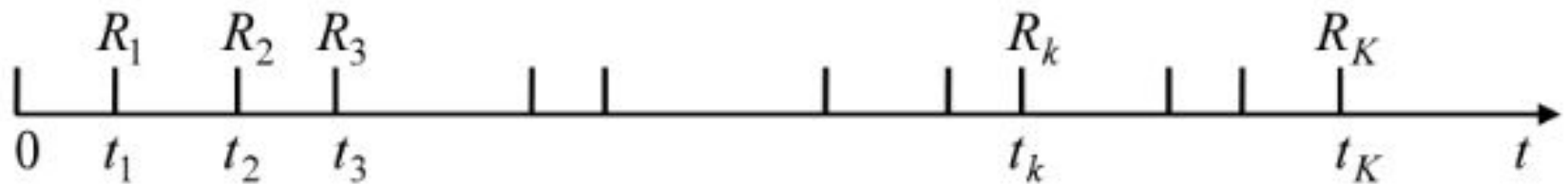


Рис. 2.1. Схема выплат

$$S = \sum_{k=1}^K R_k (1 + i)^{t_K - t_k} \quad (2.1) \text{ – наращенная сумма}$$

$$A = \sum_{k=1}^K \frac{R_k}{(1 + i)^{t_k}} \quad (2.2) \text{ – современная стоимость потока платежей}$$

Формулу (2.2) можно получить иначе (дисконтированием наращенной суммы (2.1))

$$\begin{aligned}\frac{S}{(1+i)^{t_K}} &= \sum_{k=1}^K R_k (1+i)^{t_K-t_k} \cdot \frac{1}{(1+i)^{t_K}} = \\ &= \sum_{k=1}^K R_k (1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^K \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}} = A\end{aligned}$$

$$A = \frac{S}{(1+i)^{t_K}}$$

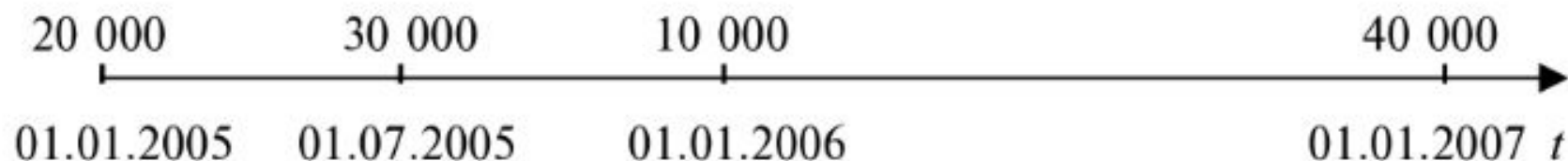
(2.3) – современная стоимость потока платежей

► **Пример 2.1.** Имеется следующий график платежей во времени:

- 1 января 2005 г. — 20 000 руб.;
- 1 июля 2005 г. — 30 000 руб.;
- 1 января 2006 г. — 10 000 руб.;
- 1 января 2007 г. — 40 000 руб.

Определить сумму задолженности на 1 января 2007 г. и ее современную стоимость на момент выплаты первой суммы при ставке наращивания 15% годовых.

**Р е ш е н и е.** График платежей представлен на схеме рис. 2.2.



**Рис. 2.2. Схема выплат для примера 2.1**



Решение:

1. Нарощенная сумма по (2.1):

$$S = (20 \cdot 1,15^2 + 30 \cdot 1,15^{1,5} + 10 \cdot 1,15 + 40) \cdot 1000 = 114\,947,13 \text{ руб.}$$

2. Современная стоимость потока платежей по (2.2):

$$A = \left( 20 + \frac{30}{1,15^{0,5}} + \frac{10}{1,15} + \frac{40}{1,15^2} \right) \cdot 1000 = 86\,916,54 \text{ руб.}$$

3. Современная стоимость потока платежей по (2.3):

$$A = \frac{114\,947,13}{1,15^2} = 86\,916,54 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

## 2. Финансовые ренты

По моменту выплат в пределах между началом и концом периода ренты делятся на:

- 1) Постнумерандо (обыкновенные), выплаты в конце периода
- 2) Аннуитеты пренумерандо, выплаты в начале периода
- 3) Ренты с платежами в середине периода

Рассмотрим финансовые ренты постнумерандо

**Постоянной** называется рента, выплаты которой не изменяются во времени

**Годовая рента постнумерандо** предусматривает выплаты и начисление процентов 1 раз в конце года

Определим наращенную сумму годовой ренты.

*В течение  $n$  лет в фонд (банк) в конце каждого года вносится по  $R$  рублей, на них начисляются сложные проценты по ставке  $i\%$  годовых (на первый взнос проценты начисляются на  $n-1$  год, на второй –  $n-2$  года и т.д.):*

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \dots + R(1+i) + R$$

*Справа – сумма геометрической прогрессии со знаменателем  $q=1+i$ , первым элементом  $R$ , количеством элементов  $n$ . Сумма вычисляется по формуле:*

$$S_n = \frac{R(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\Rightarrow S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(2.4) – наращенная сумма годовой ренты

Формулу (2.4) можно переписать в виде:

$$S = R \cdot s_{n,i} \quad (2.5)$$

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (2.6) \text{ – коэффициент}$$

наращения ренты  
(табулированная функция)



$$A = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad (2.7) \text{ – современная стоимость} \\ \text{годовой ренты}$$

Формулу (2.7) можно переписать в виде:

$$A = R \cdot a_{n,i} \quad (2.8)$$

$$a_{n,i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad (2.9) \text{ - коэффициент} \\ \text{приведения ренты} \\ \text{(табулированная функция)}$$

► **Пример 2.2.** В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых.

Определить коэффициенты наращенния и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

**Решение.** Коэффициент наращенния ренты находим по формуле (2.6):

$$s_{n;i} = \frac{1,15^7 - 1}{0,15} = 11,066799.$$

Нарашенная сумма в соответствии с (2.5) составит:

$$S = 10\,000 \cdot 11,066799 = 110\,667,99 \text{ руб.}$$

Коэффициент приведения ренты рассчитаем по формуле (2.9):

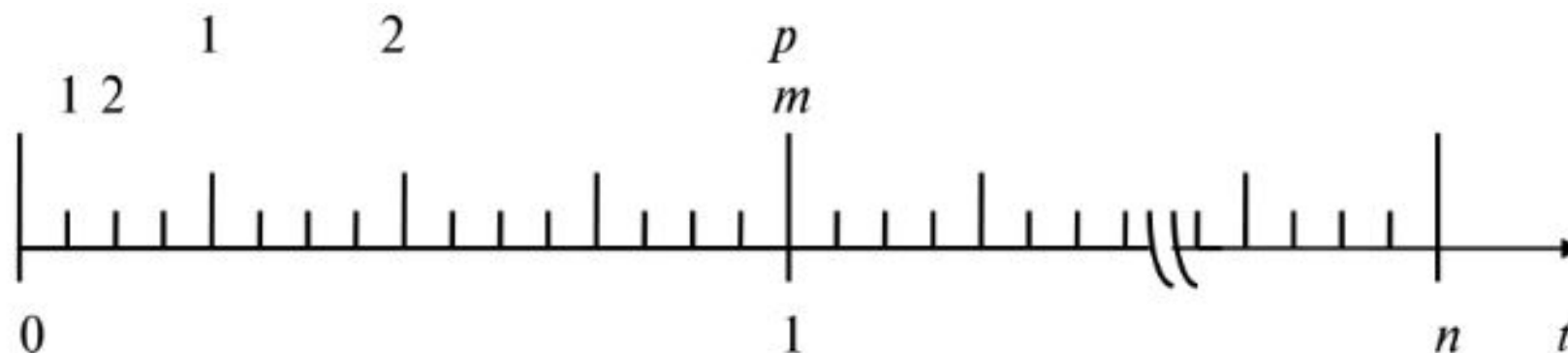
$$a_{n;i} = \frac{1 - 1,15^{-7}}{0,15} = 4,16042.$$

Современная стоимость определяется соотношением (2.8):

$$A = 10\,000 \cdot 4,16042 = 41\,604,2 \text{ руб.} \blacktriangleright$$



Наиболее общий тип ренты с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году (на рис. 2.3. - возможная схема выплат и начислений такой ренты)



**Рис. 2.3. Схема выплат при ренте с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году**

Если выплаты производятся  $p$  раз в году, то такая рента называется  **$p$ -срочной**, или **рентой с неоднократными выплатами в году**

В любом году производится  $p$  выплат по  $R/p$  руб., где  $R$  — годовая выплата. Количество начислений процентов в году по номинальной ставке  $j$  равно  $m$ . Срок ренты —  $n$  лет. Аналогично случаю годовой ренты находим соотношения для наращенной суммы и современной стоимости исследуемой ренты:

$$S = R s_{mn; j/m}^{(p)}, \quad (2.10)$$

$$S_{mn;j/m}^{(p)} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p \left[ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right]}$$

(2.11) - коэффициент  
наращения р-срочной ренты  
(табулированная функция)

$$A = R \cdot a_{mn;j/m}^{(p)}$$

(2.12) – современная стоимость  
р-срочной ренты

$$a_{mn;j/m}^{(p)} = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p \left[ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right]}$$

(2.13) – коэффициент  
приведения р-срочной ренты  
(табулированная функция)

► **Пример 2.3.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в конце квартала, а проценты начисляются ежемесячно.

Определить коэффициенты наращенения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

**Решение.** Коэффициент наращенения ренты находим по формуле (2.11):

$$s_{mn; j/m}^{(p)} = \frac{\left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12 \cdot 7} - 1}{4 \cdot \left[\left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12/4} - 1\right]} = 12,10876.$$

Наращенная сумма в соответствии с **(2.10)** составит:

$$S = 10\,000 \cdot 12,10876 = 121\,087,6 \text{ руб.}$$

Коэффициент приведения ренты находим по формуле **(2.13)**:

$$a_{mn; j/m}^{(p)} = \frac{1 - \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{-12 \cdot 7}}{4 \cdot \left[ \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12/4} - 1 \right]} = 4,264981 .$$

Современную стоимость фонда рассчитаем по формуле **(2.12)**:

$$A = 10\,000 \cdot 4,264981 = 42\,649,81 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

Частный случай: количество начислений процентов в году равно количеству выплат в году ( $m=p$ )

(2.10)-(2.13)  $\Rightarrow$

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{j} \quad (2.14) - \text{наращенная сумма}$$

$$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j} \quad (2.15) - \text{современная стоимость}$$

► **Пример 2.4.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем проценты начисляются и выплаты производятся в конце каждого месяца.

Определить величину фонда на конец срока.

**Р е ш е н и е.** Нарощенную сумму определим по формуле (2.14):

$$S = 10\,000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12 \cdot 7} - 1}{0,15} = 122\,607,5 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

► **Пример 2.5.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся и проценты начисляются в конце каждого квартала.

Определить современную стоимость фонда.

**Р е ш е н и е.** Современная стоимость фонда находится по формуле (2.15):

$$A = 10\,000 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{-4 \cdot 7}}{0,15} = 42\,885,03 \text{ руб.} \blacktriangleright$$



Рассмотрим случай *годовой ренты с начислением процентов по номинальной процентной ставке* ( $p=1$ ).

(2.10)-(2.13)  $\Rightarrow$

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} = R \cdot s_{mn; j/m} \quad (2.16) - \text{ наращенная сумма}$$

$$s_{mn; j/m} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} \quad (2.17) - \text{ коэффициент наращения ренты (табулированная функция)}$$

$$A = R \cdot a_{mn; j/m}$$

(2.18) – современная стоимость ренты

$$a_{mn; j/m} = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$$

(2.19) – коэффициент приведения ренты (табулированная функция)

► **Пример 2.6.** В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по номинальной ставке 15% годовых, причем проценты начисляются поквартально.

Определить коэффициенты наращенения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

Решение. Коэффициент наращенной ренты находим по формуле (2.17):

$$s_{mn; j/m} = \frac{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{4 \cdot 7} - 1}{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^4 - 1} = 11,366394 .$$

Наращенная сумма в соответствии с (2.16) составит:

$$S = 10\,000 \cdot 11,366394 = 113\,663,94 \text{ руб.}$$

Коэффициент приведения ренты определим по формуле (2.19):

$$a_{mn; j/m} = \frac{1 - \left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{-4 \cdot 7}}{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^4 - 1} = 4,054672 .$$

Современную стоимость ренты рассчитаем по формуле (2.18):

$$A = 10\,000 \cdot 4,054672 = 40\,546,72 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

Рассмотрим р-срочную ренту ( $m=1$ )  
(2.10)-(2.13)  $\Rightarrow$

$$S = R \cdot s_{n;i}^{(p)} \quad (2.20) - \text{наращенная сумма}$$

$$s_{n;i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p \left[ (1+i)^{1/p} - 1 \right]} \quad (2.21) - \text{коэффициент наращенной ренты (табулированная функция)}$$

$$A = R \cdot a_{n;i}^{(p)}$$

(2.22) – современная стоимость ренты

$$a_{n;i}^{(p)} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{p \left[ (1+i)^{1/p} - 1 \right]}$$

(2.23) – коэффициент приведения ренты (табулированная функция)

► **Пример 2.7.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в конце квартала.

Определить коэффициенты наращенной и приведенной ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

**Решение.** Коэффициент наращенной ренты находим по формуле (2.21):

$$s_{n;i}^{(p)} = \frac{1,15^7 - 1}{4 \cdot (1,15^{1/4} - 1)} = 11,671187 .$$

Нарощенную сумму рассчитаем по формуле (2.20):

$$S = 10\,000 \cdot 11,671187 = 116\,711,87 \text{ руб.}$$

Коэффициент приведенной ренты находим по формуле (2.23):

$$a_{n;i}^{(p)} = \frac{1 - 1,15^{-7}}{4 \cdot (1,15^{1/4} - 1)} = 4,387632 .$$

Современная стоимость фонда согласно (2.22):

$$A = 10\,000 \cdot 4,387632 = 43\,876,32 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

## Финансовые ренты пренумерандо и ренты с выплатами в середине периодов

*Расчеты характеристик аналогичны рентам постнумерандо*

$$S_1 = S \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p} \quad (2.24) - \text{наращенная сумма ренты пренумерандо}$$

$S_1$ ,  $S$  - наращенная сумма ренты пренумерандо и постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году соответственно



$$A_1 = A \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p}$$

(2.25) – современная стоимость ренты пренумерандо

$A_1$ ,  $A$  - современная стоимость ренты пренумерандо и постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году соответственно

► **Пример 2.8.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в начале каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно.

Определить наращенную сумму и современную стоимость фонда.

**Решение.** Наращенную сумму находим по формуле

$$S_1 = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}.$$

Наращенная сумма ренты постнумерандо с аналогичными характеристиками определена в примере 2.3:

$$S = 10\,000 \cdot 12,10876 = 121\,087,6 \text{ руб.}$$

Наращенная сумма исследуемой ренты в соответствии с **(2.24)** составит:

$$S_1 = 121\,087,6 \cdot \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12/4} = 125\,685,38 \text{ руб.}$$

Современная стоимость ренты постнумерандо с аналогичными характеристиками определена в примере 2.3 по формуле **(2.12)**:

$$A = 10\,000 \cdot 4,264981 = 42\,649,81 \text{ руб.}$$

Современную стоимость исследуемой ренты рассчитаем по формуле **(2.25)**:

$$A_1 = 42\,649,81 \cdot \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12/4} = 44\,269,25 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

Рассмотрим ренту с выплатами в середине периода:

$$S_{1/2} = S \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{2p}}$$

(2.26) - наращенная сумма ренты с выплатами в середине периода

$S_{1/2}$  - наращенная сумма ренты с выплатами в середине периода;

$S$  - наращенная сумма ренты постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году

$$A_{1/2} = A \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{2p}}$$

(2.27) - современная стоимость ренты с выплатами в середине периода

$A_{1/2}$  - современная стоимость ренты с выплатами в середине периода;

$A$  - современная стоимость ренты постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году

► **Пример 2.9.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в середине каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно.

Определить наращенную сумму и современную стоимость фонда.

**Р е ш е н и е.** Наращенную сумму находим по формуле

$$S_{1/2} = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p \left[ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right]} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{2p}}.$$

Наращенная сумма ренты постнумерандо с аналогичными характеристиками рассчитана в примере 2.3:

$$S = 10\,000 \cdot 12,10876 = 121\,087,6 \text{ руб.}$$

Наращенную сумму исследуемой ренты определим по формуле (2.26):

$$S_{1/2} = 121\,087,6 \cdot \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12/8} = 123\,365,07 \text{ руб.}$$

Современная стоимость ренты постнумерандо с аналогичными характеристиками определена в примере 2.3:

$$A = 10\,000 \cdot 4,264981 = 42\,649,81 \text{ руб.}$$

Современная стоимость исследуемой ренты в соответствии с (2.27):

$$A_{1/2} = 42\,649,81 \cdot \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12/8} = 43\,451,99 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

## Финансовые отложенные и вечные ренты

**Отложенными** называются ренты, у которых начало выплат отложено вперед

Порядок вычислений:

1. Находят современную стоимость исходной ренты
2. Дисконтируют полученный результат к началу отложенной ренты



$${}_t A = \frac{A}{(1+i)^t} = \frac{R \cdot a_{n;i}}{(1+i)^t} \quad (2.28) - \text{современная стоимость} \\ \text{годовой отложенной ренты}$$

$A$  - современная стоимость исходной ренты, у которой моментом приведения считается начало выплат;

$t$  – время задержки в выплате ренты;

$a_{n;i}$  – коэффициент приведения ренты к началу выплат

► **Пример 2.10.** Спустя три года после образования фонда в него начинают поступать средства по 10 000 руб. в конце каждого года в течение последующих 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых.

Определить современную стоимость и наращенную сумму фонда.

**Решение.** Современная стоимость фонда определяется по формуле (2.28), которую перепишем в виде:

$${}_t A = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} (1 + i)^{-t}.$$

Подставив в нее исходные данные примера, получим

$${}_3 A = 10\,000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,15)^{-7}}{0,15} \cdot (1 + 0,15)^{-3} = 27\,355,44 \text{ руб.}$$

Наращенную сумму фонда определяем по формуле (2.4) для годовой ренты:

$$S = 10\,000 \cdot \frac{1,15^7 - 1}{0,15} = 110\,667,99 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

## **Задача деления ренты постнумерандо между двумя участниками**

Годовая выплата  $R$ , срок  $n$ . Вначале выплаты получает первый участник, его доля от капитализированной ренты равна  $x$ . Вторым участник получает оставшиеся платежи. Его доля  $1 - x$ . Необходимо определить время получения первым ( $n_1$ ) и вторым участниками ( $n_2$ ).

*Решение:*

Если известно время  $n_1$ , то

$$n_2 = n - n_1$$

Из условия  $\Rightarrow$

$$\frac{A_1}{x} = \frac{{}_t A_2}{1-x}$$

$$\Rightarrow (1-x)R \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i} = xR \frac{1-(1+i)^{-n_2}}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^t}. \quad (2.29)$$

С учетом  $n_2=n-n_1$ ,  $n_1=t \Rightarrow$

$$1-(1+i)^{-n_1} - x + x(1+i)^{-n_1} = x(1+i)^{-n_1} - x(1+i)^{-n},$$
$$(1+i)^{-n_1} = 1-x + x(1+i)^{-n}. \quad (2.30)$$

Прологарифмируем (2.30)  $\Rightarrow$

$$-n_1 \cdot \ln(1+i) = \ln \left[ 1 - x + x(1+i)^{-n} \right]$$

$$\Rightarrow n_1 = - \frac{\ln \left[ 1 - x + x(1+i)^{-n} \right]}{\ln(1+i)}$$

(2.31) - время получения доли  
первым участником

Если срок ренты очень большой или конкретно не оговаривается ( $n \rightarrow \infty$ ), то такая рента называется **вечной**.

Из формул  $A = R \cdot a_{mn;j/m}^{(p)}$  (2.12)  $a_{mn;j/m}^{(p)} = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p \left[ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right]}$  (2.13)

$$\Rightarrow A_{\infty;m}^{(p)} = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p \left[ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right]} = \frac{R}{p \left[ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right]}$$

(2.31) – современная стоимость р-срочной ренты с начислением процентов несколько раз в году

$R$  – годовая выплата

$j$  - номинальная процентная ставка

$p$  – количество выплат в году

$m$  – количество начислений процентов в году

► **Пример 2.11.** Пусть годовая рента постнумерандо со сроком 20 лет делится между двумя участниками, причем первый участник получает 25% капитализированной стоимости ренты. Процентная ставка принимается равной 15% годовых.

Определить длительность периодов получения ренты первым и вторым участниками.

**Решение.** Срок получения ренты первым участником определяется формулой (2.31):

$$n_1 = -\frac{\ln(1 - 0,25 + 0,25 \cdot 1,15^{-20})}{\ln 1,15} = 1,91 \approx 2 \text{ года} .$$

Второй участник будет получать выплаты следующие 18 лет. ►

► **Пример 2.12.** Определить цену  $p$ -срочной вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого месяца составляют 2000 руб. при процентной ставке 12% годовых и начислении процентов один раз в году.

**Решение.** Из условия задачи следует  $p = 12$ ,  $m = 1$ ,  $j = i = 0,12$ .  
Цену  $p$ -срочной вечной ренты рассчитаем по формуле (2.23):

$$A_{\infty}^{(12)} = \frac{2000 \cdot 12}{12 \cdot (1,12^{1/12} - 1)} = 210\,774,97 \text{ руб.} \blacktriangleright$$



Формула для вычисления современной стоимости годовой ренты следует из условий  $p = 1$ ,  $m = 1$ ,  $j = i$ :

$$A_{\infty} = \frac{R}{i}. \quad (2.33)$$

► **Пример 2.13.** Определить цену годовой вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого года составляют 24 000 руб. при процентной ставке 12% годовых.

**Решение.** Цена годовой вечной ренты согласно (2.33) составит:

$$A_{\infty} = \frac{24\,000}{0,12} = 200\,000 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

# Финансовые ренты с непрерывным начислением процентов

$$S = \sum_{k=1}^K R_k (1+i)^{t_K-t_k} \quad (2.1) \quad A = \sum_{k=1}^K \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} m \rightarrow \infty \\ \Rightarrow \end{aligned} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} s_{mn; j/m}^{(p)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]} = \frac{\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m\right)^n - 1}{p \left[\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m\right)^{1/p} - 1\right]}.$$

$$\begin{aligned} j \leftrightarrow \delta \text{ при } m \rightarrow \infty \\ \Rightarrow \end{aligned} \quad S = R \cdot s_{n; \delta}^{(p)} \quad (2.34) \text{ – наращенная сумма}$$

$$s_{n; \delta}^{(p)} = \frac{e^{\delta n} - 1}{p(e^{\delta/p} - 1)} \quad (2.35) \text{ – коэффициент наращивания ренты}$$

Частный случай: годовая рента ( $p=1$ )

$$S = R \cdot s_{n;\delta} \quad (2.36) \text{ – наращенная сумма}$$

$$s_{n;\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} \quad (2.37) \text{ – коэффициент наращивания ренты}$$

► **Пример 2.14.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально (раз в году), а проценты начисляются непрерывно.

Определить коэффициент наращивания ренты и величину фонда на конец срока.

**Решение.** Коэффициент наращивания (2.35) для поквартальных выплат

$$s_{n;\delta}^{(p)} = \frac{e^{0,15 \cdot 7} - 1}{4 \cdot (e^{0,15/4} - 1)} = 12,153586.$$

Наращенная сумма в соответствии с (2.34)

$$S = 10\,000 \cdot 12,153586 = 121\,535,86 \text{ руб.}$$

Для выплат один раз в году коэффициент наращивания согласно (2.37) равен

$$s_{n;\delta} = \frac{e^{0,15 \cdot 7} - 1}{e^{0,15} - 1} = 11,478727.$$

Наращенную сумму определяем по формуле (2.36):

$$S = 10\,000 \cdot 11,478727 = 114\,787,27 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

(2.12), (2.13),  $m \rightarrow \infty$ :

$$a_{n; \delta}^{(p)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn; j/m}^{(p)} = \frac{1 - \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{-m} \right)^n}{p \left[ \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^m \right)^{1/p} - 1 \right]} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{p(e^{\delta/p} - 1)}, \quad (2.38)$$

$$A = R \cdot a_{n; \delta}^{(p)}$$

(2.39) - современная стоимость  
р-срочной ренты с непрерывным  
начислением процентов

Частный случай: годовая рента ( $p=1$ )

$$A = R \cdot a_{n;\delta} \quad (2.40) \text{ – современная стоимость}$$

$$a_{n;\delta} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta} - 1} \quad (2.41) \text{ – коэффициент приведения ренты}$$

Связь между силой роста  $\delta$  и номинальной ставкой  $j$  имеет вид (1.9):

$$\delta = m \ln \left( 1 + \frac{j}{m} \right), \quad j = m \left( e^{\delta/m} - 1 \right).$$

► **Пример 2.15.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально (раз в году), а проценты начисляются непрерывно.

Определить коэффициент приведения ренты и ее современную стоимость.

**Решение.** Коэффициент приведения ренты и ее современную стоимость для поквартальных выплат находим по формулам (2.39), (2.38):

$$a_{n;\delta} = \frac{1 - e^{-0,15 \cdot 7}}{4 \cdot (e^{0,15/4} - 1)} = 4,252998;$$

$$A = 10\,000 \cdot 4,252998 = 42\,529,98 \text{ руб.}$$

Для выплат один раз в году коэффициент приведения ренты и ее современная стоимость определяются по формулам (2.41), (2.40):

$$a_{n;\delta} = \frac{1 - e^{-0,15 \cdot 7}}{e^{0,15} - 1} = 4,0168399;$$

$$A = 10\,000 \cdot 4,0168399 = 40\,168,399 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

## Ренты с непрерывной выплатой платежей ( $p \rightarrow \infty$ )

$$s_{n;\delta}^{(p \rightarrow \infty)} = s_{(n;\delta)} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta} \quad (2.42) - \text{коэффициент наращения ренты}$$

$$a_{n;\delta}^{(p \rightarrow \infty)} = a_{(n;\delta)} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} \quad (2.43) - \text{коэффициент приведения ренты}$$



$$S = R \cdot s_{n;\delta}^{(p \rightarrow \infty)}$$

(2.34) – наращенная сумма

$$A = R \cdot a_{n;\delta}^{(p \rightarrow \infty)}$$

(2.45) – современная стоимость

► **Пример 2.16.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся и проценты начисляются непрерывно.

Определить коэффициент приведения ренты и ее современную стоимость.

**Решение.** Коэффициент приведения ренты находим по формуле (2.43):

$$a_{n; \delta}^{(p \rightarrow \infty)} = \frac{1 - e^{-0,15 \cdot 7}}{0,15} = 4,333748.$$

Современная стоимость ренты согласно (2.45)

$$A = 10\,000 \cdot 4,333748 = 43\,337,48 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

## 2.5. Финансовые ренты с ежегодными изменениями выплат на постоянную величину

**Переменной рентой** называется поток платежей, у которого выплаты изменяются во времени по заданному закону, а интервалы между выплатами постоянны

Пусть выплаты в течение  $n$  лет представлены в виде ряда (по закону арифметической прогрессии)

$$R, R+a, R+2a, \dots, R+(n-1)a$$

$R$  – выплата в конце первого года

$a$  – постоянное годовое приращение

Современная стоимость такой ренты определяется суммой

$$A = R \frac{1}{1+i} + (R+a) \frac{1}{(1+i)^2} + (R+2a) \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + [R+(n-1)a] \frac{1}{(1+i)^n};$$

$$A = \frac{1}{1+i} \sum_{t=0}^{n-1} (R+ta) \left( \frac{1}{1+i} \right)^t.$$

Окончательно получим:

$$A = \left( R + \frac{a}{i} \right) a_{n;i} - \frac{na}{i(1+i)^n} \quad (2.46) \text{ – современная стоимость ренты}$$

$$S = A(1+i)^n \quad (2.47) \text{ – связь современной стоимости ренты с наращенной суммой}$$

Подставим (2.47) в (2.46):

$$S = \left( R + \frac{a}{i} \right) s_{n;i} - \frac{na}{i} \quad (2.48)$$

► **Пример 2.17.** По плану ежегодный прирост платежей будет увеличиваться на 2500 руб. (уменьшаться на 2500 руб.) в течение 10 лет при поступлениях денег в конце каждого года. Первая выплата равна 50 000 руб. Начисление процентов производится по ставке 12% годовых.

Определить современную стоимость и наращенную сумму переменного потока платежей.

**Решение.** Предварительно по формуле (2.9) рассчитаем коэффициент приведения постоянной ренты:

$$a_{n; i} = \frac{1 - 1,12^{-10}}{0,12} = 5,650223.$$

Современная стоимость потока платежей согласно (2.46) составит:

- для  $a = 2500$  руб. —

$$A = \left( 50\,000 + \frac{2500}{0,12} \right) \cdot 5,650223 - \frac{10 \cdot 2500}{0,12 \cdot 1,12^{10}} = 333\,146,37 \text{ руб.};$$

- для  $a = -2500$  руб. —

$$A = \left( 50\,000 - \frac{2500}{0,12} \right) \cdot 5,650223 + \frac{10 \cdot 2500}{0,12 \cdot 1,12^{10}} = 231\,875,93 \text{ руб.}$$

При определении наращенной суммы предварительно найдем коэффициент наращивания постоянной ренты  $s_{n; i}$  по формуле (2.6):

$$s_{n; i} = \frac{(1 + 0,12)^{10} - 1}{0,12} = 17,548735 .$$

Наращенная сумма потока платежей согласно (2.47) составит:

- для  $a = 2500$  руб. —

$$S = \left( 50\,000 + \frac{2500}{0,12} \right) \cdot 17,548735 - \frac{10 \cdot 2500}{0,12} = 1\,034\,702,06 \text{ руб.};$$

- для  $a = -2500$  руб. —

$$S = \left( 50\,000 - \frac{2500}{0,12} \right) \cdot 17,548735 + \frac{10 \cdot 2500}{0,12} = 720\,171,44 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

## 2.6. Финансовые ренты с изменением выплат по закону геометрической прогрессии

Пусть выплаты в течение  $n$  лет представлены в виде ряда (по закону геометрической прогрессии)

$$R, Rq, Rq^2, \dots, Rq^{n-1}$$

$R$  – выплата в конце первого года

$q$  – знаменатель прогрессии

$n$  – срок ренты

Современная стоимость такой ренты определяется суммой:

$$A = \frac{R}{1+i} + \frac{Rq}{(1+i)^2} + \frac{Rq^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{Rq^{n-1}}{(1+i)^n} =$$

$$= \frac{R}{1+i} \left( 1 + \frac{q}{1+i} + \frac{q^2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{q^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \right) = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{\frac{q^n}{(1+i)^n} - 1}{\frac{q}{1+i} - 1} = R \frac{\frac{q^n}{(1+i)^n} - 1}{q - 1 - i}.$$

Если  $q=1+\Delta$ , где  $\Delta$  - темп прироста ренты, то

$$A = R \frac{\left(\frac{1+\Delta}{1+i}\right)^n - 1}{1+\Delta-1-i} = R \frac{1 - \left(\frac{1+\Delta}{1+i}\right)^n}{i-\Delta}.$$

(2.49) – современная  
стоимость

$$S = A(1+i)^n \quad (2.50) \text{ – наращенная сумма}$$



Подставим (2.50) в (2.49):

$$S = R \frac{1 - \left(\frac{1 + \Delta}{1 + i}\right)^n}{i - \Delta} (1 + i)^n = R \frac{(1 + i)^n - (1 + \Delta)^n}{i - \Delta}$$

(2.51) – наращенная  
сумма

► **Пример 2.18.** По плану темп прироста ренты будет увеличиваться каждый год на 5% (уменьшаться на 5%) в течение 10 лет при поступлениях денег в конце каждого года. Первая выплата равна 50 000 руб. Начисление процентов производится по ставке 12% годовых.

Определить современную стоимость и наращенную сумму переменного потока платежей.

**Р е ш е н и е.** Современная стоимость потока платежей согласно (2.49) составит:

- для  $\Delta = 0,05$  —

$$A = 50\,000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1+0,05}{1+0,12}\right)^{10}}{0,12 - 0,05} = 339\,671,09 \text{ руб.};$$

- для  $\Delta = -0,05$  —

$$A = 50\,000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-0,05}{1+0,12}\right)^{10}}{0,12 + 0,05} = 237\,418,45 \text{ руб.}$$

Наращенную сумму потока платежей рассчитаем по формуле (2.51):

- для  $\Delta = 0,05$  —

$$S = 50\,000 \cdot \frac{1,12^{10} - 1,05^{10}}{0,12 - 0,05} = 1\,054\,966,84 \text{ руб.};$$

- для  $\Delta = -0,05$  —

$$S = 50\,000 \cdot \frac{1,12^{10} - 0,95^{10}}{0,12 + 0,05} = 737\,385,67 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

### 3. Непрерывные потоки платежей, изменяющиеся во времени

На практике часто бывает удобным представить переменный поток в виде непрерывного. В этом случае поток является функцией времени

$$R_t = R(t),$$

где  $t$  — время (см. рис. 2.4).

Срок инвестиций равен  $n$ .



Рис. 2.4. Ось времени для непрерывного переменного потока

Определим наращенную сумму для момента  $n$  при выплате в момент  $t$ :

$$dS = R(t)e^{\delta(n-t)} dt \quad (2.52)$$

$\delta$  - сила роста

$R(t)dt$  – величина выплаты в момент  $t$

$dt$  – бесконечно малый отрезок времени

$$(2.52) \Rightarrow S = \int_0^n R(t)e^{\delta(n-t)} dt \quad (2.53) - \text{наращенная сумма непрерывного переменного потока платежей}$$

$$A = \int_0^n R(t)e^{-\delta t} dt$$

(2.54) – современная стоимость непрерывного переменного потока платежей

(2.53), (2.54)  $\Rightarrow$

$$S = e^{\delta n} \int_0^n R(t)e^{-\delta t} dt \quad (2.55)$$

$$S = Ae^{\delta n}$$

(2.56) – связь между S и A

### 3.1. Непрерывные потоки платежей, изменяющиеся по параболическому закону

Поток платежей, изменяющийся по параболическому закону, представим в виде:

$$R_t = R(t) = R + at + bt^2$$

$$A = \left( R + \frac{a}{\delta} + \frac{2b}{\delta^2} \right) \cdot a_{(n;\delta)} - \frac{ane^{-\delta n}}{\delta} - \frac{bne^{-\delta n}}{\delta} \left( n + \frac{2}{\delta} \right)$$

(2.57) – современная  
СТОИМОСТЬ

здесь  $a_{(n;\delta)} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}$

$$S = A \cdot e^{\delta n} = \left( R + \frac{a}{\delta} + \frac{2b}{\delta^2} \right) \cdot S_{(n;\delta)} - \frac{an}{\delta} - \frac{bn}{\delta} \left( n + \frac{2}{\delta} \right)$$

(2.58) – наращенная сумма

здесь

$$a_{(n;\delta)} \cdot e^{\delta n} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} \cdot e^{\delta n} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta} = S_{(n;\delta)}$$

► **Пример 2.19.** Параболический непрерывный поток платежей имеет следующие параметры: базовый уровень выпуска  $R = 20\,000$  руб., ежегодное увеличение потока платежей  $a = 1000$  руб./год, ускорение увеличения потока платежей  $b = 100$  руб./год<sup>2</sup>, сила роста  $\delta = 10\%$ . Срок потока платежей составляет 5 лет.

Определить современную стоимость потока и его наращенную сумму.

**Решение.** Современная стоимость потока платежей определяется по формуле (2.57):

$$A = \left( 20\,000 + \frac{1000}{0,1} + \frac{2 \cdot 100}{0,1^2} \right) \cdot \frac{1 - e^{-0,1 \cdot 5}}{0,1} - \frac{1000 \cdot 5 \cdot e^{-0,1 \cdot 5}}{0,1} - \frac{100 \cdot 5 \cdot e^{-0,1 \cdot 5}}{0,1} \cdot \left( 5 + \frac{2}{0,1} \right) = 90\,591,8 \text{ руб.}$$



Наращенную сумму потока платежей можно рассчитать по формуле (2.58):

$$S = \left( 20\,000 + \frac{1000}{0,1} + \frac{2 \cdot 100}{0,1^2} \right) \cdot \frac{e^{0,1 \cdot 5} - 1}{0,1} - \frac{1000 \cdot 5}{0,1} - \frac{100 \cdot 5}{0,1} \left( 5 + \frac{2}{0,1} \right) = 149\,360,63 \text{ руб.}$$

Проверим результат по формуле

$$S = Ae^{\delta n} = 90\,591,8 \cdot e^{0,1 \cdot 5} = 149\,360,63 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

### 3.2. Непрерывные потоки платежей, изменяющиеся по линейному закону

Поток представим в виде:  $R_t = R(t) = R + at$

Подставим  $b=0$  в (2.57) и (2.58):

$$A = \left( R + \frac{a}{\delta} \right) \cdot a_{(n;\delta)} - \frac{ane^{-\delta n}}{\delta} \quad (2.59) \text{ – современная стоимость}$$

$$S = A \cdot e^{\delta n} = \left( R + \frac{a}{\delta} \right) \cdot s_{(n;\delta)} - \frac{an}{\delta} \quad (2.60) \text{ – наращенная сумма}$$

► **Пример 2.20.** Линейно изменяющийся непрерывный поток платежей имеет следующие параметры: базовый уровень выпуска  $R = 20\,000$  руб./год, ежегодное увеличение потока платежей  $a = 1000$  руб., сила роста  $\delta = 10\%$ . Срок данного потока платежей составляет 5 лет.

Определить современную стоимость потока и его наращенную сумму.

**Решение.** Современную стоимость потока определяем по формуле (2.59):

$$A = \left( 20\,000 + \frac{1000}{0,1} \right) \cdot \frac{1 - e^{-0,1 \cdot 5}}{0,1} - \frac{1000 \cdot 5 \cdot e^{-0,1 \cdot 5}}{0,1} = 87\,714,27 \text{ руб.}$$

Наращенную сумму потока определяем по формуле (2.60):

$$S = \left( 20\,000 + \frac{1000}{0,1} \right) \cdot \frac{e^{0,1 \cdot 5} - 1}{0,1} - \frac{1000 \cdot 5}{0,1} = 144\,616,4 \text{ руб.}$$

Проверить результат можно по формуле

$$S = Ae^{\delta n} = 87\,714,27 \cdot e^{0,1 \cdot 5} = 144\,616,4 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

## 4. Расчет параметров финансовой ренты

Для  $p$ -срочной ренты с начислением процентов  $m$  раз в году величина годовой выплаты определяется из формул (2.10)

и (2.12):

$$A = R \cdot a_{mn;j/m}^{(p)}, \quad S = R \cdot s_{mn;j/m}^{(p)}$$

$$\Rightarrow R = \frac{S}{s_{mn;j/m}^{(p)}} \quad R = \frac{A}{a_{mn;j/m}^{(p)}}$$

- где  $S$  — наращенная сумма ренты;  
 $A$  — современная стоимость ренты;  
 $s_{mn;j/m}^{(p)}$  — коэффициенты наращения ренты;  
 $a_{mn;j/m}^{(p)}$  — коэффициенты приведения ренты;  
 $p$  — количество выплат в году;  
 $m$  — количество начислений процентов в году;  
 $j$  — номинальная процентная ставка;  
 $n$  — срок ренты в годах.

► **Пример 2.21.** В фонд ежегодно в конце периода поступают средства в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются ежемесячно (раз в году). Нарощенная сумма к концу срока составит 100 000 руб.

Определить коэффициент наращенной ренты и размер годовой выплаты.

**Решение.** Коэффициент наращенной ренты при поквартальных выплатах и начислении процентов ежемесячно находим по формуле (2.11):

$$s_{mn; j/m}^{(p)} = \frac{\left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12 \cdot 7} - 1}{4 \cdot \left[\left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12/4} - 1\right]} = 12,10876 .$$

Коэффициент наращивания ренты при поквартальных выплатах и начислении процентов раз в году ( $m = 1$ ) определяется формулой (2.21):

$$s_{n;i}^{(p)} = \frac{(1 + 0,15)^7 - 1}{4 \cdot [(1 + 0,15)^{1/4} - 1]} = 11,67118 .$$

Годовые выплаты при начислении процентов ежемесячно по (2.61) составят:

$$R = \frac{100\,000}{12,10876} = 8258,48 \text{ руб.}$$

Годовые выплаты при начислении процентов раз в году рассчитаем исходя из (2.20):

$$R = \frac{100\,000}{11,67118} = 8568,11 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

В практической деятельности актуальны задачи определения срока ренты (при прочих известных параметрах).

Рассмотрим общий случай – *постоянная рента с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году*

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p \left[ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m|p} - 1 \right]} \quad (2.63) \text{ – наращенная сумма}$$

Найдем срок  $n$ . Для этого:

1) Представим (2.63) в виде:

$$\frac{S}{R} p \left[ \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p} - 1 \right] + 1 = \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{mn}. \quad (2.64)$$

2) Прологарифмируем (2.64):

$$\ln \left\{ \frac{S}{R} p \left[ \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p} - 1 \right] + 1 \right\} = mn \ln \left( 1 + \frac{j}{m} \right). \quad (2.65)$$



3) Решим (2.65) относительно  $n$ :

$$n = \frac{\ln \left\{ \frac{S}{R} p \left[ \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p} - 1 \right] + 1 \right\}}{m \ln \left( 1 + \frac{j}{m} \right)}. \quad (2.66)$$

При расчете по (2.66) срок получается, как правило, дробным. Количество периодов  $nr$  округляют до целого числа  $n_0$ . Затем уточняют значение разового платежа:

$$\frac{R}{p} = S \frac{\left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p} - 1}{\left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{mn_0} - 1}. \quad (2.67) \text{ – уточненный разовый платеж}$$

► **Пример 2.22.** В фонд поступают средства, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в конце каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Величина фонда на конец срока составит 100 000 руб., годовая выплата — 10 000 руб.

Определить срок ренты.

**Решение.** Срок ренты находим по формуле (2.66):

$$n = \frac{\ln \left\{ \frac{10^5}{10^4} \cdot 4 \cdot \left[ \left( 1 + \frac{0,15}{12} \right)^{\frac{12}{4}} - 1 \right] + 1 \right\}}{12 \cdot \ln \left( 1 + \frac{0,15}{12} \right)} = \frac{\ln 2,518828}{12 \cdot \ln 1,0125} = 6,197 \text{ лет.}$$

Количество кварталов в полученном сроке составит  $np = 6,197 \cdot 4 = 24,788$ . Округляем полученное число до 25, т.е. количество лет ренты принимается равным  $n_0 = 6,25$  лет. Величину ежеквартальной выплаты получим, подставив это число в формулу (2.67):

$$\frac{R}{P} = 10^5 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1}{\left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12 \cdot 6,25} - 1} = 2467,56 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

Частный случай: начисление процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R} p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]\right)}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)} \quad (2.68) \text{ – срок ренты}$$

$$\frac{R}{p} = A \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn_0}} \quad \begin{array}{l} \text{уточненный} \\ \text{разовый платеж} \end{array}$$

*Для других типов ренты срок определяется аналогично*

► **Пример 2.23.** Долг в размере 50 000 руб. погашается равными частями в конце каждого квартала по 2500 руб. На взносы начисляются проценты раз в году по ставке 15% годовых.

Определить время погашения долга.

**Решение.** Для условий примера формула (2.68) принимает вид:

$$n = -\frac{\ln\left\{1 - \frac{A}{R} p \left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right\}}{\ln(1+i)} =$$

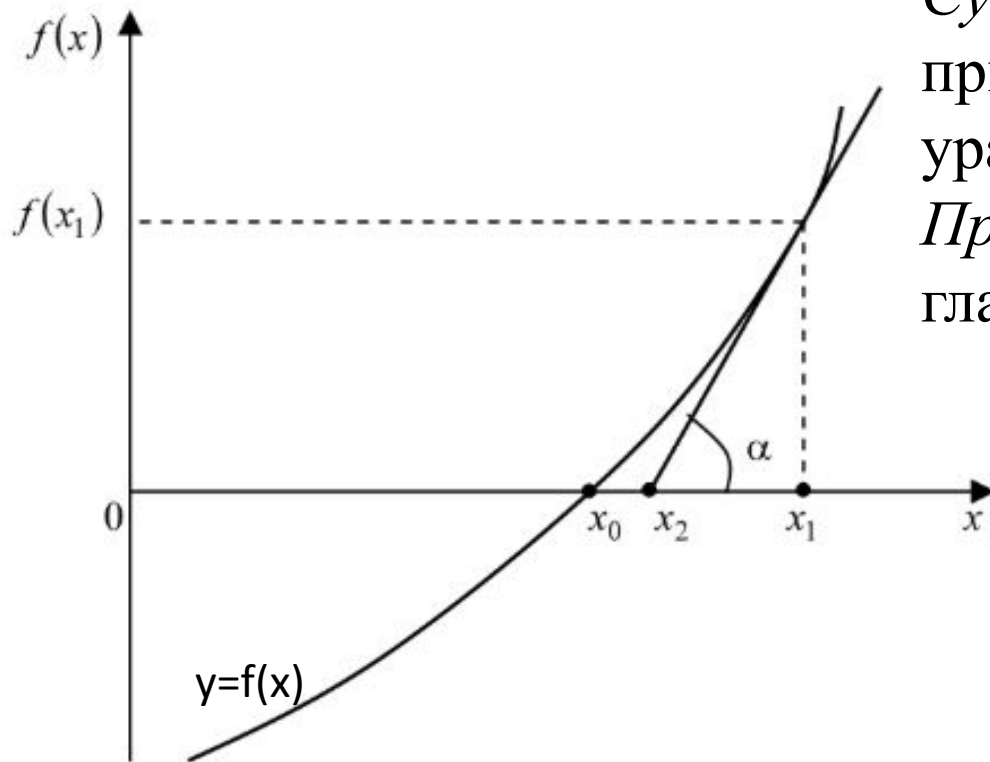
$$= -\frac{\ln\left\{1 - \frac{5 \cdot 10^4}{10^4} \cdot 4 \cdot \left[(1+0,15)^{1/4} - 1\right]\right\}}{\ln(1+0,15)} = -\frac{\ln 0,288838}{\ln 1,15} = 8,886 \text{ лет.}$$

Количество кварталов в полученном сроке составит  $np = 8,886 \cdot 4 = 35,5$ . Округляем полученное число до 35, т.е. количество лет ренты принимается равным 8,75. Уточненная величина ежеквартальной выплаты

$$\frac{R}{p} = A \frac{(1+i)^{1/p} - 1}{1 - (1+i)^{-n_0}} = 50\,000 \cdot \frac{1,15^{1/4} - 1}{1 - 1,15^{-8,75}} = 2519,6 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

Если известны все параметры ренты, кроме процентной ставки, то расчет *процентной ставки* можно трактовать как *определение доходности финансовой операции*)

Процентную ставку рассчитывают приближенно.  
Рассмотрим численный метод Ньютона-Рафсона



*Суть:* последовательное приближение к решению  $x_0$  уравнения  $f(x)=0$   
*Предположения:* функция  $f(x)$  – гладкая, непрерывная, монотонная

Рис. 2.5. График, поясняющий метод Ньютона—Рафсона

*Алгоритм:*

- 1) ввести  $x_1$  - начальное приближение,  $\varepsilon$  - требуемая точность (например: 0,01; 0,001);
- 2) через т.  $(x_1, f(x_1))$  проводится касательная к графику, пересекающая ось  $ox$  в точке  $x_2$ ;
- 3) если  $|x_2 - x_1| < \varepsilon$ , то  $x_2$  - искомый корень, иначе  $x_2$  - следующее приближение и переход к п.2



Из прямоугольного треугольника  $\Rightarrow$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \quad (2.69)$$

$$(2.69) \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \dots, x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}$$

t – номер шага (итерации)

Для годовой ренты: 
$$\frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (2.70) \text{ – современная стоимость}$$

Замена:  $x=1+i \Rightarrow$  тогда (2.70)  $\Rightarrow$  
$$x^n - \frac{S}{R}x + \frac{S}{R} - 1 = 0$$

Искомая функция: 
$$f(x) = x^n - \frac{S}{R}x + \frac{S}{R} - 1$$

Производная: 
$$f'(x) = nx^{n-1} - \frac{S}{R}$$

► **Пример 2.24.** В накопительный фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, причем на конец срока величина фонда составит 100 000 руб.

Определить доходность инвестиций.

Решение.  $S/R = 10$ . Положим  $x_1 = 1,15$ .

Первая итерация:

$$f(x_1) = x_1^n - \frac{S}{R} x_1 + \frac{S}{R} - 1 = 1,15^7 - 10 \cdot 1,15 + 10 - 1 = 0,16;$$

$$f'(x_1) = nx_1^{n-1} - \frac{S}{R} = 7 \cdot 1,15^6 - 10 = 6,19;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,15 - \frac{0,16}{6,19} = 1,1241519.$$

Вторая итерация:

$$f(x_2) = 0,0271701; f'(x_2) = 4,1269378;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,1241519 - \frac{0,0271701}{4,1269378} = 1,1175683.$$

Третья итерация:

$$f(x_3) = 0,00161825 ; f'(x_3) = 3,637743;$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1,1175683 - \frac{0,00161825}{3,637743} = 1,1171235 .$$

Поскольку результаты во второй и третьей итерациях слабо отличаются друг от друга, то вычисления можно прекратить и принять  $i = x - 1 = 0,1171235$ , или 11,71235%. Другим методом, подтверждающим окончание вычислений, является проверка. Для этого в правую часть исходного уравнения подставляют полученное значение ставки. Если результат совпадает с левой частью или слабо отличается от нее, то вычисления прекращают. Для рассматриваемого примера

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1,1171235^7 - 1}{0,1171235} = 10,00006 .$$

Поскольку результаты практически совпали, так как  $S/R = 10$ , то принимаем  $i = 11,71235\% \approx 11,71\%$ . ►

Аналогично проводятся расчеты для других типов рент.

Например, для р-срочной ренты:

$$\frac{A}{R} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{p \left[ (1+i)^{1/p} - 1 \right]} \quad - \text{ современная стоимость}$$

Искомая функция:  $f(x) = \frac{A}{R} px^{n+\frac{1}{p}} - \left(1 + \frac{A}{R} p\right) x^n + 1$

Производная:  $f'(x) = \left(n + \frac{1}{p}\right) \frac{A}{R} px^{n+\frac{1}{p}-1} - n \left(1 + \frac{A}{R} p\right) x^{n-1}$

► **Пример 2.25.** Единовременное вложение средств в предприятие составило 50 000 руб. В течение 7 лет по истечении каждого квартала инвестор получает 2500 руб.

Определить доходность инвестиций.

Р е ш е н и е.  $R = 2500 \cdot 4 = 10\,000$  руб.  $A/R = 5$ . Положим  $x_1 = 1,15$ .

Первая итерация:

$$f(x_1) = \frac{A}{R} p x_1^{n+\frac{1}{p}} - \left(1 + \frac{A}{R} p\right) x_1^n + 1 =$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 1,15^{7,25} - (1 + 5 \cdot 4) \cdot 1,15^7 + 1 = 0,231684;$$

$$f'(x_1) = \left(n + \frac{1}{p}\right) \frac{A}{R} p x_1^{n+\frac{1}{p}-1} - n \left(1 + \frac{A}{R} p\right) x_1^{n-1} =$$

$$= 7,25 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1,15^{6,25} - 7 \cdot (1 + 5 \cdot 4) \cdot 1,15^6 = 7,29984;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,15 - \frac{0,231684}{7,29984} = 1,1182618 .$$

Вторая итерация:

$$f(x_2) = \frac{A}{R} p x_2^{n+\frac{1}{p}} - \left(1 + \frac{A}{R} p\right) x_2^n + 1 = 0,052601;$$

$$f'(x_2) = \left(n + \frac{1}{p}\right) \frac{A}{R} p x_2^{n+\frac{1}{p}-1} - n \left(1 + \frac{A}{R} p\right) x_2^{n-1} = 4,12419;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,1182618 - \frac{0,052601}{4,12419} = 1,1055075.$$

Третья итерация:

$$f(x_3) = \frac{A}{R} p x_3^{n+\frac{1}{p}} - \left(1 + \frac{A}{R} p\right) x_3^n + 1 = 0,006844;$$

$$f'(x_3) = \left(n + \frac{1}{p}\right) \frac{A}{R} p x_3^{n+\frac{1}{p}-1} - n \left(1 + \frac{A}{R} p\right) x_3^{n-1} = 3,07043;$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1,1055075 - \frac{0,006844}{3,07043} = 1,103278 .$$

Принимаем  $i = x - 1 = 0,103278$ , или  $10,3278\%$ . Проведем проверку, используя формулу

$$\frac{1 - (1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = \frac{1 - 1,103278^{-7}}{4 \cdot (1,103278^{1/4} - 1)} = 4,999 .$$

Поскольку результаты практически совпали, так как  $S/R = 5$ , то принимаем  $i = 10,3278\% \approx 10,33\%$ . ►



## Контрольные вопросы и задания

2.1. Имеется следующий график платежей во времени:

- 1 января 2004 г. — 700 руб.;
- 1 июля 2004 г. — 1000 руб.;
- 1 января 2005 г. — 400 руб.;
- 1 января 2006 г. — 900 руб.

Определить сумму задолженности на 1 января 2006 г. и ее современную стоимость на момент выплаты первой суммы при ставке наращенния 16,5% годовых.

2.2. В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых.

Определить коэффициенты наращенния и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

2.3. В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых, причем выплаты производятся в конце каждого месяца, а проценты начисляются поквартально.

Определить коэффициенты наращенния и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

**2.4.** В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых, причем проценты начисляются и выплаты производятся в конце каждого квартала.

Определить коэффициенты наращивания и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

**2.5.** В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по номинальной ставке 12,5% годовых, причем проценты начисляются ежемесячно.

Определить коэффициенты наращивания и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

**2.6.** В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых, причем выплаты производятся в конце каждого месяца.

Определить коэффициенты наращивания и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

- 2.7. В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых, причем выплаты производятся в начале каждого месяца, а проценты начисляются поквартально.  
Определить наращенную сумму и современную стоимость фонда.
- 2.8. В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых, причем выплаты производятся в середине каждого месяца, а проценты начисляются поквартально.  
Определить наращенную сумму и современную стоимость фонда.
- 2.9. Спустя четыре года после образования фонда в него начинают поступать средства по 800 руб. в конце каждого года в течение последующих 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых.  
Определить современную стоимость и наращенную сумму фонда.
- 2.10. Пусть годовая рента постнумерандо со сроком 15 лет делится между двумя участниками, причем первый участник получает 35% капитализированной стоимости ренты. Процентная ставка принимается равной 12,5% годовых.  
Определить длительность периодов получения ренты первым и вторым участниками.
- 2.11. Определить цену  $p$ -срочной вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого месяца составляют 3000 руб. при номинальной процентной ставке 12,5% годовых и начислении процентов один раз в году.

- 2.12.** Определить цену годовой вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого года составляют 36 000 руб. при процентной ставке 12,5% годовых.
- 2.13.** В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 12,5% годовых, причем выплаты производятся в конце каждого квартала (в конце каждого года), а проценты начисляются непрерывно.  
Определить коэффициент наращивания ренты и величину фонда на конец срока.
- 2.14.** В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 12,5% годовых, причем выплаты производятся и проценты начисляются непрерывно.  
Определить коэффициент приведения ренты и ее современную стоимость.
- 2.15.** Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться каждый год на 500 руб. (уменьшаться на 500 руб.) в течение 12 лет при поступлениях денег в конце каждого года. Первая выплата равна 6000 руб. Начисление процентов производится по ставке 14,5% годовых.  
Определить современную стоимость и наращенную сумму переменного потока платежей.
- 2.16.** Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться каждый год на 7% (уменьшаться на 7%) в течение 8 лет при поступлениях денег в конце каждого года. Первая выплата равна 1000 руб. Начисление процентов производится по ставке 18% годовых.  
Определить современную стоимость и наращенную сумму переменного потока платежей.

- 2.17.** Линейно изменяющийся непрерывный поток платежей имеет следующие параметры: базовый уровень выпуска  $R = 7000$  руб./год, ежегодное увеличение потока платежей  $a = 500$  руб., сила роста  $\delta = 12\%$ . Срок потока платежей составляет 6 лет. Определить современную стоимость потока и его наращенную сумму.
- 2.18.** В фонд ежегодно поступают средства, на которые начисляются проценты по ставке  $12,5\%$  годовых, причем выплаты производятся в конце каждого месяца, а проценты начисляются поквартально. Величина фонда на конец срока составит  $10\,000$  руб., годовая выплата –  $1200$  руб. Определить срок ренты.
- 2.19.** Долг в размере  $20\,000$  руб. погашается равными частями в конце каждого месяца по  $400$  руб. На взносы начисляются проценты раз в году по ставке  $12,5\%$  годовых. Определить срок погашения долга.