# Потоки платежей

1. Типы потоков платежей
2. Финансовые ренты
3. Непрерывные потоки платежей, изменяющиеся во времени
4. Расчет параметров финансовой ренты

## 1. Типы потоков платежей

**Потоки платежей** – это платежи, последовательные во времени (выплаты, по купонам облигаций, пенсии и т.д.)

Основные характеристики потоков платежей:

1. Регулярный поток платежей
2. Нерегулярный поток платежей
3. Наращенная сумма потока платежей
4. Современная стоимость потока платежей

**Регулярный поток платежей (финансовая рента, аннуитет)** – это платежи, у которых все выплаты направлены в одну сторону (например, поступления), а интервалы (периоды) между платежами одинаковы

**Нерегулярный поток платежей –** это платежи, у которых часть выплат является положительной величиной (поступления), а другая часть – отрицательной (выплаты); Интервалы могут быть различными

**Наращенная сумма потока платежей** – это сумма всех выплат с начисленными на них к концу срока сложными процентами

**Современная стоимость потока платежей** – это сумма всех выплат, дисконтированных на начало срока этого потока по сложной процентной ставке

Рассмотрим общий случай потока платежей

Введем обозначения:

$R_k$ — ряд платежей, имеющих знак «плюс» или «минус»;

$t_k$ — время выплаты под номером $k = 1, 2, ..., K$;

$K$ — количество выплат;

$t_K$ — общий срок выплат;

$i$ — сложная процентная ставка наращения, начисляемая один раз в году, выплаты производятся в конце периода (рис. 2.1).

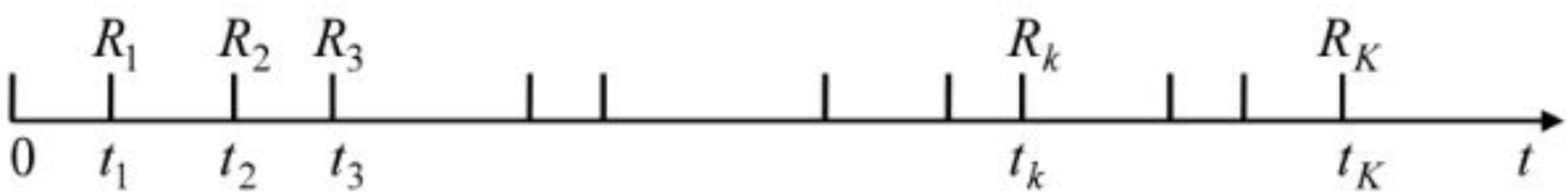


Рис. 2.1. **Схема выплат**

$$S = \sum_{k=1}^{K} R_k \left(1+i\right)^{t_K - t_k}$$ (2.1) – наращенная сумма

$$A = \sum_{k=1}^{K} \frac{R_k}{\left(1+i\right)^{t_k}}$$ (2.2) – современная стоимость потока платежей

Формулу (2.2) можно получить иначе (дисконтированием наращенной суммы (2.1))

$$\frac{S}{(1+i)^{t_K}} = \sum_{k=1}^{K} R_k (1+i)^{t_K - t_k} \cdot \frac{1}{(1+i)^{t_K}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} R_k (1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{K} \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}} = A$$

$$A = \frac{S}{(1+i)^{t_K}}$$

(2.3) – современная стоимость потока платежей

▸**Пример 2.1.** Имеется следующий график платежей во времени:

- 1 января 2005 г. — 20 000 руб.;
- 1 июля 2005 г. — 30 000 руб.;
- 1 января 2006 г. — 10 000 руб.;
- 1 января 2007 г. — 40 000 руб.

Определить сумму задолженности на 1 января 2007 г. и ее современную стоимость на момент выплаты первой суммы при ставке наращения 15% годовых.

Р е ш е н и е. График платежей представлен на схеме рис. 2.2.

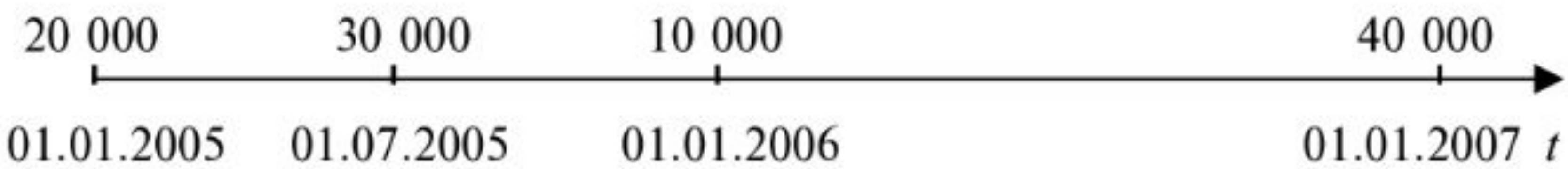


Рис. 2.2. **Схема выплат для примера 2.1**

Решение:

1. Наращенная сумма по (2.1):

$$S = \left(20 \cdot 1{,}15^2 + 30 \cdot 1{,}15^{1{,}5} + 10 \cdot 1{,}15 + 40\right) \cdot 1000 = 114\ 947{,}13 \text{ руб.}$$

2. Современная стоимость потока платежей по (2.2):

$$A = \left(20 + \frac{30}{1{,}15^{0{,}5}} + \frac{10}{1{,}15} + \frac{40}{1{,}15^2}\right) \cdot 1000 = 86\ 916{,}54 \text{ руб.}$$

3. Современная стоимость потока платежей по (2.3):

$$A = \frac{114\ 947{,}13}{1{,}15^2} = 86\ 916{,}54 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

## 2. Финансовые ренты

По моменту выплат в пределах между началом и концом периода ренты делятся на:

1) Постнумерандо (обыкновенные), выплаты в конце периода
2) Аннуитеты пренумерандо, выплаты в начале периода
3) Ренты с платежами в середине периода

Рассмотрим финансовые ренты постнумерандо

**Постоянной** называется рента, выплаты которой не изменяются во времени

**Годовая рента постнумерандо** предусматривает выплаты и начисление процентов 1 раз в конце года

Определим наращенную сумму годовой ренты.

*В течение n лет в фонд (банк) в конце каждого года вносится по R рублей, на них начисляются сложные проценты по ставке i% годовых (на первый взнос проценты начисляются на n-1 год, на второй – n-2 года и т.д.:*

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R(1+i) + R$$

*Справа – сумма геометрической прогрессии со знаменателем **q=1+i**, первым элементом **R**, количеством элементов **n**. Сумма вычисляется по формуле:*

$$S_n = \frac{R(q^n - 1)}{q-1}$$

$$\Rightarrow \qquad S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(2.4) – наращенная сумма годовой ренты

Формулу (2.4) можно переписать в виде:

$$S = R \cdot s_{n,i} \qquad (2.5)$$

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(2.6) – коэффициент наращения ренты (табулированная функция)

Для определения современной стоимости годовой ренты проведем дисконтирование каждого платежа на начало срока ренты и найдем общую сумму:

$$A=\frac{R}{1+i}+\frac{R}{(1+i)^2}+\frac{R}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{R}{(1+i)^n}=$$

$$=\frac{R}{1+i}\left(1+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right)=$$

*⇐ в скобках сумма геометрической прогрессии, q=1/(1+i)*

$$=\frac{R}{1+i}\cdot\frac{\dfrac{1}{(1+i)^n}-1}{\dfrac{1}{1+i}-1}=R\frac{(1+i)^{-n}-1}{1-1-i}=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A = R\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}$$

(2.7) – современная стоимость годовой ренты

Формулу (2.7) можно переписать в виде:

$$A = R \cdot a_{n,i} \qquad (2.8)$$

$$a_{n,i} = \frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}$$

(2.9) - коэффициент приведения ренты (табулированная функция)

▸**Пример 2.2.** В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

Р е ш е н и е. Коэффициент наращения ренты находим по формуле **(2.6)**:

$$s_{n;\,i} = \frac{1{,}15^7 - 1}{0{,}15} = 11{,}066799\,.$$

Наращенная сумма в соответствии с **(2.5)** составит:

$$S = 10\ 000 \cdot 11{,}066799 = 110\ 667{,}99 \text{ руб.}$$

Коэффициент приведения ренты рассчитаем по формуле **(2.9)**:

$$a_{n;i} = \frac{1 - 1{,}15^{-7}}{0{,}15} = 4{,}16042\,.$$

Современная стоимость определяется соотношением **(2.8)**:

$$A = 10\ 000 \cdot 4{,}16042 = 41\ 604{,}2 \text{ руб.}$$ ▸

Наиболее общий тип  ренты с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году (на рис. 2.3. - возможная схема выплат и начислений такой ренты)

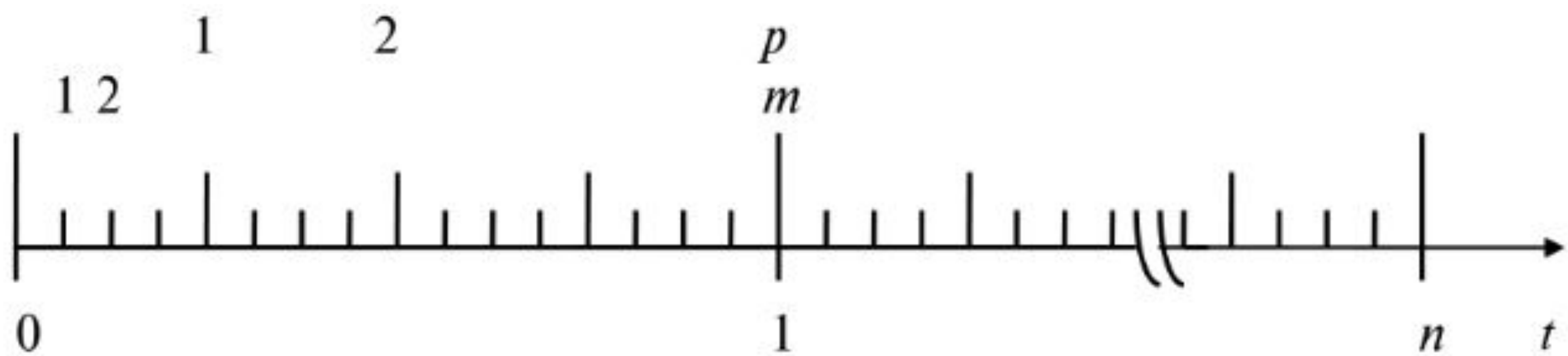


Рис. 2.3. **Схема выплат при ренте с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году**

Если выплаты производятся *p* раз в году, то такая рента называется ***p*-срочной**, или **рентой с неоднократными выплатами в году**

В любом году производится $p$ выплат по $R/p$ руб., где $R$ — годовая выплата. Количество начислений процентов в году по номинальной ставке $j$ равно $m$. Срок ренты — $n$ лет. Аналогично случаю годовой ренты находим соотношения для наращенной суммы и современной стоимости исследуемой ренты:

$$S = Rs^{(p)}_{mn;\ j/m}, \qquad \textbf{(2.10)}$$

$$s_{mn;j/m}^{(p)} = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]}$$

(2.11) - коэффициент наращения p-срочной ренты (табулированная функция)

$$A = R \cdot a_{mn;j/m}^{(p)}$$

(2.12) – современная стоимость p-срочной ренты

$$a_{mn;j/m}^{(p)} = \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]}$$

(2.13) – коэффициент приведения p-срочной ренты (табулированная функция)

►**Пример 2.3.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в конце квартала, а проценты начисляются ежемесячно.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

Р е ш е н и е. Коэффициент наращения ренты находим по формуле **(2.11)**:

$$s_{mn;\ j/m}^{(p)} = \frac{\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12\cdot 7} - 1}{4\cdot\left[\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12/4} - 1\right]} = 12{,}10876.$$

Наращенная сумма в соответствии с **(2.10)** составит:

$$S = 10\,000 \cdot 12{,}10876 = 121\,087{,}6 \text{ руб.}$$

Коэффициент приведения ренты находим по формуле **(2.13)**:

$$a_{mn;\,j/m}^{(p)} = \frac{1-\left(1+\dfrac{0{,}15}{12}\right)^{-12\cdot 7}}{4\cdot\left[\left(1+\dfrac{0{,}15}{12}\right)^{12/4}-1\right]} = 4{,}264981\,.$$

Современную стоимость фонда рассчитаем по формуле **(2.12)**:

$$A = 10\,000 \cdot 4{,}264981 = 42\,649{,}81 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

Частный случай: количество начислений процентов в году равно количеству выплат в году (m=p)

(2.10)-(2.13)$\Rightarrow$

$$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{j}$$

(2.14) - наращенная сумма

$$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}$$

(2.15) - современная стоимость

▸**Пример 2.4.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем проценты начисляются и выплаты производятся в конце каждого месяца.

Определить величину фонда на конец срока.

Р е ш е н и е. Наращенную сумму определим по формуле **(2.14)**:

$$S = 10\ 000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12 \cdot 7} - 1}{0{,}15} = 122\ 607{,}5\ \text{руб.}$$ ▸

▸**Пример 2.5.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся и проценты начисляются в конце каждого квартала.

Определить современную стоимость фонда.

Р е ш е н и е. Современная стоимость фонда находится по формуле **(2.15)**:

$$A = 10\,000 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}15}{4}\right)^{-4\cdot 7}}{0{,}15} = 42\,885{,}03 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

Рассмотрим случай *годовой ренты с начислением процентов по номинальной процентной ставке* (p=1).

(2.10)-(2.13)$\Rightarrow$

$$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1} = R\cdot s_{mn;\,j/m}$$

(2.16) - наращенная сумма

$$s_{mn;\,j/m} = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$$

(2.17) - коэффициент наращения ренты (табулированная функция)

$$A = R \cdot a_{mn;j/m}$$

(2.18) – современная стоимость ренты

$$a_{mn;j/m} = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1}$$

(2.19) – коэффициент приведения ренты (табулированная функция)

▸**Пример 2.6.** В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по номинальной ставке 15% годовых, причем проценты начисляются поквартально.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

Р е ш е н и е. Коэффициент наращения ренты находим по формуле **(2.17)**:

$$s_{mn;\ j/m} = \frac{\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{4\cdot 7} - 1}{\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{4} - 1} = 11,366394\,.$$

Наращенная сумма в соответствии с **(2.16)** составит:

$$S = 10\ 000 \cdot 11,366394 = 113\ 663,94 \text{ руб.}$$

Коэффициент приведения ренты определим по формуле **(2.19)**:

$$a_{mn;\ j/m} = \frac{1-\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{-4\cdot 7}}{\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{4} - 1} = 4,054672\,.$$

Современную стоимость ренты рассчитаем по формуле **(2.18)**:

$$A = 10\ 000 \cdot 4,054672 = 40\ 546,72 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

Рассмотрим p-срочную ренту (m=1)
(2.10)-(2.13)$\Rightarrow$

$$S = R \cdot s_{n;i}^{(p)}$$

(2.20) - наращенная сумма

$$s_{n;i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]}$$

(2.21) – коэффициент наращения ренты (табулированная функция)

$$A = R \cdot a_{n;i}^{(p)}$$

(2.22) – современная стоимость ренты

$$a_{n;i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}$$

(2.23) – коэффициент приведения ренты (табулированная функция)

▸**Пример 2.7.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в конце квартала.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

Р е ш е н и е. Коэффициент наращения ренты находим по формуле **(2.21)**:

$$s_{n;\,i}^{(p)} = \frac{1{,}15^{7} - 1}{4 \cdot \left(1{,}15^{1/4} - 1\right)} = 11{,}671187 .$$

Наращенную сумму рассчитаем по формуле **(2.20)**:

$$S = 10\ 000 \cdot 11{,}671187 = 116\ 711{,}87 \text{ руб.}$$

Коэффициент наращения ренты находим по формуле **(2.23)**:

$$a_{n;\,i}^{(p)} = \frac{1 - 1{,}15^{-7}}{4 \cdot \left(1{,}15^{1/4} - 1\right)} = 4{,}387632 .$$

Современная стоимость фонда согласно **(2.22)**:

$$A = 10\ 000 \cdot 4{,}387632 = 43\ 876{,}32 \text{ руб.} ▸$$

# Финансовые ренты пренумерандо и ренты с выплатами в середине периодов

*Расчеты характеристик аналогичны рентам постнумерандо*

$$S_1 = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p}$$

(2.24) - наращенная сумма ренты пренуменрандо

$S_1$, S - наращенная сумма ренты пренумерандо и постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году соответственно

$$A_1 = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}$$

(2.25) – современная стоимость ренты пренуменрандо

$A_1$, A - современная стоимость ренты пренумерандо и постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году соответственно

▸ **Пример 2.8.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в начале каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно.

Определить наращенную сумму и современную стоимость фонда.

Р е ш е н и е. Наращенную сумму находим по формуле

$$S_1 = R\frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}.$$

Наращенная сумма ренты постнумерандо с аналогичными характеристиками определена в примере 2.3:

$$S = 10\,000 \cdot 12{,}10876 = 121\,087{,}6 \text{ руб.}$$

Наращенная сумма исследуемой ренты в соответствии с **(2.24)** составит:

$$S_1 = 121\,087{,}6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}15}{12}\right)^{12/4} = 125\,685{,}38 \text{ руб.}$$

Современная стоимость ренты постнумерандо с аналогичными характеристиками определена в примере 2.3 по формуле **(2.12)**:

$$A = 10\,000 \cdot 4{,}264981 = 42\,649{,}81 \text{ руб.}$$

Современную стоимость исследуемой ренты рассчитаем по формуле **(2.25)**:

$$A_1 = 42\,649{,}81 \cdot \left(1 + \frac{0{,}15}{12}\right)^{12/4} = 44\,269{,}25 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

Рассмотрим ренту *с выплатами в середине периода:*

$$S_{1/2} = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{2p}}$$

(2.26) - наращенная сумма ренты с выплатами в середине периода

$S_{1/2}$ - наращенная сумма ренты с выплатами в середине периода;
S - наращенная сумма ренты постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году

$$A_{1/2} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{2p}}$$

(2.27) - современная стоимость ренты с выплатами в середине периода

$A_{1/2}$ - современная стоимость ренты с выплатами в середине периода;
А - современная стоимость ренты постнумерандо с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году

▸**Пример 2.9.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в середине каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно.

Определить наращенную сумму и современную стоимость фонда.

Р е ш е н и е. Наращенную сумму находим по формуле

$$S_{1/2} = R\frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{2p}}.$$

Наращенная сумма ренты постнумерандо с аналогичными характеристиками рассчитана в примере 2.3:

$$S = 10\ 000 \cdot 12{,}10876 = 121\ 087{,}6 \text{ руб.}$$

Наращенную сумму исследуемой ренты определим по формуле **(2.26)**:

$$S_{1/2} = 121\ 087{,}6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}15}{12}\right)^{12/8} = 123\ 365{,}07 \text{ руб.}$$

Современная стоимость ренты постнумерандо с аналогичными характеристиками определена в примере 2.3:

$$A = 10\ 000 \cdot 4{,}264981 = 42\ 649{,}81 \text{ руб.}$$

Современная стоимость исследуемой ренты в соответствии с **(2.27)**:

$$A_{1/2} = 42\ 649{,}81 \cdot \left(1 + \frac{0{,}15}{12}\right)^{12/8} = 43\ 451{,}99 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

## Финансовые отложенные и вечные ренты

**Отложенными** называются ренты, у которых начало выплат отложено вперед

Порядок вычислений:

1. Находят современную стоимость исходной ренты
2. Дисконтируют полученный результат к началу отложенной ренты

$$_{t}A = \frac{A}{(1+i)^t} = \frac{R \cdot a_{n;i}}{(1+i)^t}$$

(2.28) - современная стоимость годовой отложенной ренты

A - современная стоимость исходной ренты, у которой моментом приведения считается начало выплат;

t – время задержки в выплате ренты;

$a_{n;i}$ – коэффициент приведения ренты к началу выплат

▸**Пример 2.10.** Спустя три года после образования фонда в него начинают поступать средства по 10 000 руб. в конце каждого года в течение последующих 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых.

Определить современную стоимость и наращенную сумму фонда.

Р е ш е н и е. Современная стоимость фонда определяется по формуле **(2.28)**, которую перепишем в виде:

$$ {}_tA = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-t}. $$

Подставив в нее исходные данные примера, получим

$$ {}_3A = 10\,000 \cdot \frac{1-(1+0{,}15)^{-7}}{0{,}15} \cdot (1+0{,}15)^{-3} = 27\,355{,}44 \text{ руб.} $$

Наращенную сумму фонда определяем по формуле **(2.4)** для годовой ренты:

$$ S = 10\,000 \cdot \frac{1{,}15^{7}-1}{0{,}15} = 110\,667{,}99 \text{ руб.} $$ ▸

**Задача деления ренты постнумерандо между двумя участниками**

Годовая выплата *R*, срок *n*. Вначале выплаты получает первый участник, его доля от капитализированной ренты равна *x*. Второй участник получает оставшиеся платежи. Его доля 1- *x*. Необходимо определить время получения первым ($n_1$) и вторым участниками ($n_2$).

*Решение:*

Если известно время $n_1$, то

$$n_2 = n - n_1$$

Из условия $\Rightarrow$ $$\frac{A_1}{x} = \frac{{}_t A_2}{1-x}$$

$$\Rightarrow \quad (1-x)R\frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i} = xR\frac{1-(1+i)^{-n_2}}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^t}. \qquad \mathbf{(2.29)}$$

С учетом $n_2=n-n_1$, $n_1=t$ $\Rightarrow$

$$1-(1+i)^{-n_1} - x + x(1+i)^{-n_1} = x(1+i)^{-n_1} - x(1+i)^{-n},$$

$$(1+i)^{-n_1} = 1-x+x(1+i)^{-n}. \qquad \mathbf{(2.30)}$$

Прологарифмируем (2.30)$\Rightarrow$

$$-n_1 \cdot \ln(1+i) = \ln\left[1 - x + x(1+i)^{-n}\right]$$

$\Rightarrow$ $$n_1 = -\frac{\ln\left[1 - x + x(1+i)^{-n}\right]}{\ln(1+i)}$$

(2.31) - время получения доли первым участником

Если срок ренты очень большой или конкретно не оговаривается ($n \to \infty$), то такая рента называется **вечной.**

Из формул $A = R\cdot a^{(p)}_{mn;j/m}$ (2.12) $a^{(p)}_{mn;j/m} = \dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$ (2.13)

$$\Rightarrow A^{(p)}_{\infty;m} = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]} = \frac{R}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$$

(2.31) – современная стоимость p-срочной ренты с начислением процентов несколько раз в году

R – годовая выплата

j - номинальная процентная ставка

p – количество выплат в году

m – количество начислений процентов в году

▸**Пример 2.11.** Пусть годовая рента постнумерандо со сроком 20 лет делится между двумя участниками, причем первый участник получает 25% капитализированной стоимости ренты. Процентная ставка принимается равной 15% годовых.

Определить длительность периодов получения ренты первым и вторым участниками.

Р е ш е н и е. Срок получения ренты первым участником определяется формулой **(2.31)**:

$$n_1 = -\frac{\ln\left(1-0{,}25+0{,}25\cdot 1{,}15^{-20}\right)}{\ln 1{,}15} = 1{,}91 \approx 2 \text{ года}.$$

Второй участник будет получать выплаты следующие 18 лет.▸

▸**Пример 2.12.** Определить цену $p$-срочной вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого месяца составляют 2000 руб. при процентной ставке 12% годовых и начислении процентов один раз в году.

Р е ш е н и е. Из условия задачи следует $p = 12$, $m = 1$, $j = i = 0{,}12$.

Цену $p$-срочной вечной ренты рассчитаем по формуле **(2.23)**:

$$A_{\infty}^{(12)} = \frac{2000 \cdot 12}{12 \cdot \left(1{,}12^{1/12} - 1\right)} = 210\ 774{,}97 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

Формула для вычисления современной стоимости годовой ренты следует из условий $p = 1$, $m = 1$, $j = i$:

$$A_\infty = \frac{R}{i}. \qquad \textbf{(2.33)}$$

▸**Пример 2.13.** Определить цену годовой вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого года составляют 24 000 руб. при процентной ставке 12% годовых.

Р е ш е н и е. Цена годовой вечной ренты согласно **(2.33)** составит:

$$A_\infty = \frac{24\,000}{0{,}12} = 200\,000 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

# Финансовые ренты с непрерывным начислением процентов

$$S = \sum_{k=1}^{K} R_k (1+i)^{t_K - t_k} \quad (2.1) \qquad A = \sum_{k=1}^{K} \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}} \quad (2.2)$$

m→∝
⇒

$$\lim_{m\to\infty} s^{(p)}_{mn;\ j/m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]} = \frac{\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}\right)^{n} - 1}{p\left[\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}\right)^{1/p} - 1\right]}.$$

j↔δ при m→∝
⇒

$$S = R \cdot s^{(p)}_{n;\delta}$$

(2.34) – наращенная сумма

$$s^{(p)}_{n;\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{p\left(e^{\delta / p} - 1\right)}$$

(2.35) – коэффициент наращения ренты

Частный случай: годовая рента (p=1)

$$S = R \cdot s_{n;\delta}$$ (2.36) – наращенная сумма

$$s_{n;\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}$$ (2.37) – коэффициент наращения ренты

▸**Пример 2.14.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально (раз в году), а проценты начисляются непрерывно.

Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока.

Р е ш е н и е. Коэффициент наращения **(2.35)** для поквартальных выплат

$$s_{n;\,\delta}^{(p)} = \frac{e^{0,15\cdot 7}-1}{4\cdot\left(e^{0,15/4}-1\right)} = 12{,}153586.$$

Наращенная сумма в соответствии с **(2.34)**

$$S = 10\ 000 \cdot 12{,}153586 = 121\ 535{,}86\ \text{руб.}$$

Для выплат один раз в году коэффициент наращения согласно **(2.37)** равен

$$s_{n;\,\delta} = \frac{e^{0,15\cdot 7}-1}{e^{0,15}-1} = 11{,}478727.$$

Наращенную сумму определяем по формуле **(2.36)**:

$$S = 10\ 000 \cdot 11{,}478727 = 114\ 787{,}27\ \text{руб.}$$ ▸

(2.12), (2.13), m→∝:

$$a_{n;\delta}^{(p)} = \lim_{m\to\infty} a_{mn;j/m}^{(p)} = \frac{1-\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m}\right)^{n}}{p\left[\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}\right)^{1/p}-1\right]} = \frac{1-e^{-\delta n}}{p\left(e^{\delta/p}-1\right)}, \quad (2.38)$$

$$A = R\cdot a_{n;\delta}^{(p)}$$

(2.39) - современная стоимость p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов

# Частный случай: годовая рента (p=1)

$$A = R \cdot a_{n;\delta}$$ (2.40) – современная стоимость

$$a_{n;\delta} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta} - 1}$$ (2.41) – коэффициент приведения ренты

Связь между силой роста δ и номинальной ставкой *j* имеет вид (1.9):

$$\delta = m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right), \quad j = m\left(e^{\delta / m} - 1\right).$$

▶**Пример 2.15.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально (раз в году), а проценты начисляются непрерывно.

Определить коэффициент приведения ренты и ее современную стоимость.

Решение. Коэффициент приведения ренты и ее современную стоимость для поквартальных выплат находим по формулам **(2.39)**, **(2.38)**:

$$a_{n;\,\delta} = \frac{1-e^{-0,15\cdot 7}}{4\cdot\left(e^{0,15/4}-1\right)} = 4{,}252998;$$

$$A = 10\ 000\cdot 4{,}252998 = 42\ 529{,}98 \text{ руб.}$$

Для выплат один раз в году коэффициент приведения ренты и ее современная стоимость определяются по формулам **(2.41)**, **(2.40)**:

$$a_{n;\,\delta} = \frac{1-e^{-0,15\cdot 7}}{e^{0,15}-1} = 4{,}0168399;$$

$$A = 10\ 000\cdot 4{,}0168399 = 40\ 168{,}399 \text{ руб.}$$ ▶

## Ренты с непрерывной выплатой платежей ($p \to \infty$)

$$s_{n;\delta}^{(p\to\infty)} = s_{(n;\delta)} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}$$ (2.42) - коэффициент наращения ренты

$$a_{n;\delta}^{(p\to\infty)} = a_{(n;\delta)} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}$$ (2.43) - коэффициент приведения ренты

$$S = R \cdot s_{n;\delta}^{(p\to\infty)}$$

(2.34) – наращенная сумма

$$A = R \cdot a_{n;\delta}^{(p\to\infty)}$$

(2.45) – современная стоимость

▸**Пример 2.16.** В фонд ежегодно поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся и проценты начисляются непрерывно.

Определить коэффициент приведения ренты и ее современную стоимость.

Р е ш е н и е. Коэффициент приведения ренты находим по формуле **(2.43)**:

$$a_{n;\,\delta}^{(p\to\infty)} = \frac{1-e^{-0{,}15\cdot 7}}{0{,}15} = 4{,}333748\,.$$

Современная стоимость ренты согласно **(2.45)**

$$A = 10\ 000\cdot 4{,}333748 = 43\ 337{,}48\ \text{ руб.}$$ ▸

## 2.5. Финансовые ренты с ежегодными изменениями выплат на постоянную величину

**Переменной рентой** называется поток платежей, у которого выплаты изменяются во времени по заданному закону, а интервалы между выплатами постоянны

Пусть выплаты в течение n лет представлены в виде ряда (по закону арифметической прогрессии)

$$R,\ R+a,\ R+2a,\ \ldots,\ R+(n-1)a$$

R – выплата в конце первого года

a – постоянное годовое приращение

Современная стоимость такой ренты определяется суммой

$$A = R\frac{1}{1+i} + (R+a)\frac{1}{(1+i)^2} + (R+2a)\frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + [R+(n-1)a]\frac{1}{(1+i)^n};$$

$$A = \frac{1}{1+i}\sum_{t=0}^{n-1}(R+ta)\left(\frac{1}{1+i}\right)^t.$$

Окончательно получим:

$$A = \left( R + \frac{a}{i} \right) a_{n;i} - \frac{na}{i(1+i)^n}$$

(2.46) – современная стоимость ренты

$$S = A(1+i)^n$$

(2.47) – связь современной стоимости ренты с наращенной суммой

Подставим (2.47) в (2.46):

$$S = \left( R + \frac{a}{i} \right) s_{n;i} - \frac{na}{i} \qquad (2.48)$$

▸**Пример 2.17.** По плану ежегодный прирост платежей будет увеличиваться на 2500 руб. (уменьшаться на 2500 руб.) в течение 10 лет при поступлениях денег в конце каждого года. Первая выплата равна 50 000 руб. Начисление процентов производится по ставке 12% годовых.

Определить современную стоимость и наращенную сумму переменного потока платежей.

Р е ш е н и е. Предварительно по формуле **(2.9)** рассчитаем коэффициент приведения постоянной ренты:

$$a_{n;\,i} = \frac{1-1{,}12^{-10}}{0{,}12} = 5{,}650223.$$

Современная стоимость потока платежей согласно **(2.46)** составит:

- для $a$ = 2500 руб. —

$$A = \left(50\ 000 + \frac{2500}{0{,}12}\right)\cdot 5{,}650223 - \frac{10\cdot 2500}{0{,}12\cdot 1{,}12^{10}} = 333\ 146{,}37 \text{ руб.};$$

- для $a$ = −2500 руб. —

$$A = \left(50\ 000 - \frac{2500}{0{,}12}\right)\cdot 5{,}650223 + \frac{10\cdot 2500}{0{,}12\cdot 1{,}12^{10}} = 231\ 875{,}93 \text{ руб.}$$

При определении наращенной суммы предварительно найдем коэффициент наращения постоянной ренты $s_{n;\,i}$ по формуле **(2.6)**:

$$s_{n;\,i} = \frac{(1+0{,}12)^{10}-1}{0{,}12} = 17{,}548735\ .$$

Наращенная сумма потока платежей согласно **(2.47)** составит:

- для $a$ = 2500 руб. —

$$S = \left(50\ 000 + \frac{2500}{0{,}12}\right) \cdot 17{,}548735 - \frac{10 \cdot 2500}{0{,}12} = 1\ 034\ 702{,}06 \text{ руб.};$$

- для $a$ = −2500 руб. —

$$S = \left(50\ 000 - \frac{2500}{0{,}12}\right) \cdot 17{,}548735 + \frac{10 \cdot 2500}{0{,}12} = 720\ 171{,}44 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

## 2.6. Финансовые ренты с изменением выплат по закону геометрической прогрессии

Пусть выплаты в течение n лет представлены в виде ряда (по закону геометрической прогрессии)

$$R,\ Rq,\ Rq^2,\ \ldots,\ Rq^{n-1}$$

R – выплата в конце первого года

q – знаменатель прогрессии

n – срок ренты

Современная стоимость такой ренты определяется суммой:

$$A = \frac{R}{1+i} + \frac{Rq}{(1+i)^2} + \frac{Rq^2}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{Rq^{n-1}}{(1+i)^n} =$$

$$= \frac{R}{1+i}\left(1 + \frac{q}{1+i} + \frac{q^2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{q^{n-1}}{(1+i)^n}\right) = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{\dfrac{q^n}{(1+i)^n} - 1}{\dfrac{q}{1+i} - 1} = R\frac{\dfrac{q^n}{(1+i)^n} - 1}{q - 1 - i}.$$

Если q=1+Δ, где Δ - темп прироста ренты, то

$$A = R\frac{\left(\frac{1+\Delta}{1+i}\right)^n - 1}{1+\Delta-1-i} = R\frac{1-\left(\frac{1+\Delta}{1+i}\right)^n}{i-\Delta}.$$

(2.49) – современная стоимость

$$S = A(1+i)^n$$

(2.50) – наращенная сумма

Подставим (2.50) в (2.49):

$$S = R\frac{1-\left(\frac{1+\Delta}{1+i}\right)^n}{i-\Delta}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n-(1+\Delta)^n}{i-\Delta}$$

(2.51) – наращенная сумма

▸**Пример 2.18.** По плану темп прироста ренты будет увеличиваться каждый год на 5% (уменьшаться на 5%) в течение 10 лет при поступлениях денег в конце каждого года. Первая выплата равна 50 000 руб. Начисление процентов производится по ставке 12% годовых.

Определить современную стоимость и наращенную сумму переменного потока платежей.

Р е ш е н и е. Современная стоимость потока платежей согласно **(2.49)** составит:

- для $\Delta = 0{,}05$ —

$$A = 50\ 000 \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{1+0{,}05}{1+0{,}12}\right)^{10}}{0{,}12 - 0{,}05} = 339\ 671{,}09 \text{ руб.;}$$

- для $\Delta = -0{,}05$ —

$$A = 50\ 000 \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{1-0{,}05}{1+0{,}12}\right)^{10}}{0{,}12 + 0{,}05} = 237\ 418{,}45 \text{ руб.}$$

Наращенную сумму потока платежей рассчитаем по формуле **(2.51)**:

- для $\Delta = 0{,}05$ —

$$S = 50\ 000 \cdot \frac{1{,}12^{10} - 1{,}05^{10}}{0{,}12 - 0{,}05} = 1\ 054\ 966{,}84 \text{ руб.;}$$

- для $\Delta = -0{,}05$ —

$$S = 50\ 000 \cdot \frac{1{,}12^{10} - 0{,}95^{10}}{0{,}12 + 0{,}05} = 737\ 385{,}67 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

# 3. Непрерывные потоки платежей, изменяющиеся во времени

На практике часто бывает удобным представить переменный поток в виде непрерывного. В этом случае поток является функцией времени

$$R_t = R(t),$$

где $t$ — время (см. рис. 2.4).

Срок инвестиций равен $n$.

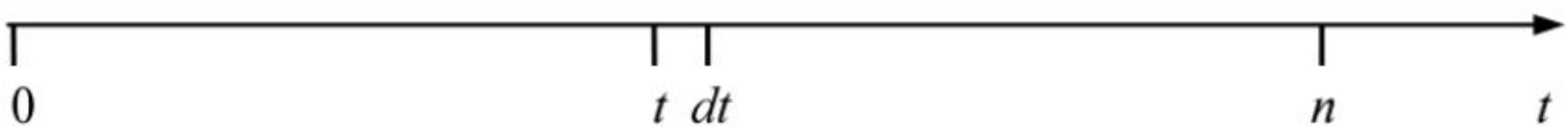


Рис. 2.4. **Ось времени для непрерывного переменного потока**

Определим наращенную сумму для момента **n** при выплате в момент **t**:

$$dS = R(t)e^{\delta(n-t)}dt \qquad (2.52)$$

δ - сила роста

R(t)dt – величина выплаты в момент t

dt – бесконечно малый отрезок времени

(2.52)⇒ $$S = \int_0^n R(t)e^{\delta(n-t)}dt$$ (2.53) - наращенная сумма непрерывного переменного потока платежей

$$A = \int_0^n R(t)e^{-\delta t}dt$$

(2.54) – современная стоимость непрерывного переменного потока платежей

(2.53), (2.54)$\Rightarrow$

$$S = e^{\delta n}\int_0^n R(t)e^{-\delta t}dt$$

(2.55)

$$S = Ae^{\delta n}$$

(2.56) – связь между S и A

## 3.1. Непрерывные потоки платежей, изменяющиеся по параболическому закону

Поток платежей, изменяющийся по параболическому закону, представим в виде:

$$R_t = R(t) = R + at + bt^2$$

$$A = \left( R + \frac{a}{\delta} + \frac{2b}{\delta^2} \right) \cdot a_{(n;\delta)} - \frac{ane^{-\delta n}}{\delta} - \frac{bne^{-\delta n}}{\delta} \left( n + \frac{2}{\delta} \right)$$

(2.57) – современная стоимость

здесь $\quad a_{(n;\delta)} = \dfrac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}$

$$S = A \cdot e^{\delta n} = \left( R + \frac{a}{\delta} + \frac{2b}{\delta^2} \right) \cdot s_{(n;\delta)} - \frac{an}{\delta} - \frac{bn}{\delta} \left( n + \frac{2}{\delta} \right)$$

(2.58) – наращенная сумма

здесь $$a_{(n;\delta)} \cdot e^{\delta n} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} \cdot e^{\delta n} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta} = s_{(n;\delta)}$$

►**Пример 2.19.** Параболический непрерывный поток платежей имеет следующие параметры: базовый уровень выпуска $R = 20\,000$ руб., ежегодное увеличение потока платежей $a$ = 1000 руб./год, ускорение увеличения потока платежей $b$ = 100 руб./год$^2$, сила роста $\delta = 10\%$. Срок потока платежей составляет 5 лет.

Определить современную стоимость потока и его наращенную сумму.

Р е ш е н и е. Современная стоимость потока платежей определяется по формуле **(2.57)**:

$$A = \left(20\,000 + \frac{1000}{0{,}1} + \frac{2 \cdot 100}{0{,}1^2}\right) \cdot \frac{1 - e^{-0{,}1 \cdot 5}}{0{,}1} - \frac{1000 \cdot 5 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 5}}{0{,}1} -$$

$$- \frac{100 \cdot 5 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 5}}{0{,}1} \cdot \left(5 + \frac{2}{0{,}1}\right) = 90\,591{,}8 \text{ руб.}$$

Наращенную сумму потока платежей можно рассчитать по формуле **(2.58)**:

$$S=\left(20\,000+\frac{1000}{0{,}1}+\frac{2\cdot 100}{0{,}1^2}\right)\cdot\frac{e^{0{,}1\cdot 5}-1}{0{,}1}-\frac{1000\cdot 5}{0{,}1}-$$

$$-\frac{100\cdot 5}{0{,}1}\left(5+\frac{2}{0{,}1}\right)=149\,360{,}63 \text{ руб.}$$

Проверим результат по формуле

$$S=Ae^{\delta n}=90\,591{,}8\cdot e^{0{,}1\cdot 5}=149\,360{,}63 \text{ руб.}$$ ►

## 3.2. Непрерывные потоки платежей, изменяющиеся по линейному закону

Поток представим в виде: $R_t = R(t) = R + at$

Подставим b=0 в (2.57) и (2.58):

$$A = \left( R + \frac{a}{\delta} \right) \cdot a_{(n;\delta)} - \frac{ane^{-\delta n}}{\delta}$$

(2.59) – современная стоимость

$$S = A \cdot e^{\delta n} = \left( R + \frac{a}{\delta} \right) \cdot s_{(n;\delta)} - \frac{an}{\delta}$$

(2.60) – наращенная сумма

▸ **Пример 2.20.** Линейно изменяющийся непрерывный поток платежей имеет следующие параметры: базовый уровень выпуска $R = 20\ 000$ руб./год, ежегодное увеличение потока платежей $a = 1000$ руб., сила роста $\delta = 10\%$. Срок данного потока платежей составляет 5 лет.

Определить современную стоимость потока и его наращенную сумму.

Р е ш е н и е. Современную стоимость потока определяем по формуле **(2.59)**:

$$A = \left(20\ 000 + \frac{1000}{0{,}1}\right)\cdot\frac{1 - e^{-0{,}1\cdot 5}}{0{,}1} -$$

$$-\frac{1000\cdot 5\cdot e^{-0{,}1\cdot 5}}{0{,}1} = 87\ 714{,}27 \text{ руб.}$$

Наращенную сумму потока определяем по формуле **(2.60)**:

$$S = \left(20\ 000 + \frac{1000}{0{,}1}\right)\cdot\frac{e^{0{,}1\cdot 5} - 1}{0{,}1} - \frac{1000\cdot 5}{0{,}1} = 144\ 616{,}4 \text{ руб.}$$

Проверить результат можно по формуле

$$S = Ae^{\delta n} = 87\ 714{,}27\cdot e^{0{,}1\cdot 5} = 144\ 616{,}4 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

# 4. Расчет параметров финансовой ренты

Для p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году величина годовой выплаты определяется из формул (2.10) и (2.12):

$$A = R \cdot a^{(p)}_{mn;j/m}, \qquad S = R \cdot s^{(p)}_{mn;j/m}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{S}{s^{(p)}_{mn;j/m}} \qquad\qquad R = \frac{A}{a^{(p)}_{mn;j/m}}$$

где $S$ — наращенная сумма ренты;
$A$ — современная стоимость ренты;
$s^{(p)}_{mn;j/m}$ — коэффициенты наращения ренты;
$a^{(p)}_{mn;j/m}$ — коэффициенты приведения ренты;
$p$ — количество выплат в году;
$m$ — количество начислений процентов в году;
$j$ — номинальная процентная ставка;
$n$ — срок ренты в годах.

▸**Пример 2.21.** В фонд ежегодно в конце периода поступают средства в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются ежемесячно (раз в году). Наращенная сумма к концу срока составит 100 000 руб.

Определить коэффициент наращения ренты и размер годовой выплаты.

Р е ш е н и е. Коэффициент наращения ренты при поквартальных выплатах и начислении процентов ежемесячно находим по формуле **(2.11)**:

$$s_{mn;\ j/m}^{(p)} = \frac{\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12\cdot 7}-1}{4\cdot\left[\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12/4}-1\right]} = 12{,}10876\ .$$

Коэффициент наращения ренты при поквартальных выплатах и начислении процентов раз в году ($m = 1$) определяется формулой **(2.21)**:

$$s_{n;\,i}^{(p)} = \frac{(1+0{,}15)^7 - 1}{4 \cdot \left[(1+0{,}15)^{1/4} - 1\right]} = 11{,}67118\,.$$

Годовые выплаты при начислении процентов ежемесячно по **(2.61)** составят:

$$R = \frac{100\,000}{12{,}10876} = 8258{,}48 \text{ руб.}$$

Годовые выплаты при начислении процентов раз в году рассчитаем исходя из **(2.20)**:

$$R = \frac{100\,000}{11{,}67118} = 8568{,}11 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

В практической деятельности актуальны задачи определения срока ренты (при прочих известных параметрах).

Рассмотрим общий случай – *постоянная рента с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году*

$$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m|p}-1\right]}$$

(2.63) – наращенная сумма

Найдем срок n. Для этого:
1) Представим (2.63) в виде:

$$\frac{S}{R}p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]+1=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}. \qquad (2.64)$$

2) Прологарифмируем (2.64):

$$\ln\left\{\frac{S}{R}p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]+1\right\}=mn\ln\left(1+\frac{j}{m}\right). \qquad (2.65)$$

3) Решим (2.65) относительно n:

$$n = \frac{\ln\left\{\frac{S}{R} p \left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right] + 1\right\}}{m \ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}. \qquad (2.66)$$

При расчете по (2.66) срок получается, как правило, дробным. Количество периодов *np* округляют до целого числа $n_0$. Затем уточняют значение разового платежа:

$$\frac{R}{p} = S \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn_0} - 1}.$$

(2.67) – уточненный разовый платеж

▸**Пример 2.22.** В фонд поступают средства, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся в конце каждого квартала, а проценты начисляются ежемесячно. Величина фонда на конец срока составит 100 000 руб., годовая выплата — 10 000 руб.

Определить срок ренты.

Р е ш е н и е. Срок ренты находим по формуле **(2.66)**:

$$n = \frac{\ln\left\{\frac{10^5}{10^4}\cdot 4\cdot\left[\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1\right]+1\right\}}{12\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)} = \frac{\ln 2{,}518828}{12\cdot\ln 1{,}0125} = 6{,}197 \text{ лет.}$$

Количество кварталов в полученном сроке составит $np = 6{,}197 \cdot 4 = 24{,}788$. Округляем полученное число до 25, т.е. количество лет ренты принимается равным $n_0 = 6{,}25$ лет. Величину ежеквартальной выплаты получим, подставив это число в формулу **(2.67)**:

$$\frac{R}{p} = 10^5 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1}{\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{12 \cdot 6{,}25} - 1} = 2467{,}56 \text{ руб.} \blacktriangleright$$

Частный случай: начисление процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R} p\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]\right)}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}$$

(2.68) – срок ренты

$$\frac{R}{p} = A \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn_0}}$$

уточненный разовый платеж

*Для других типов ренты срок определяется аналогично*

▸**Пример 2.23.** Долг в размере 50 000 руб. погашается равными частями в конце каждого квартала по 2500 руб. На взносы начисляются проценты раз в году по ставке 15% годовых.

Определить время погашения долга.

Р е ш е н и е. Для условий примера формула **(2.68)** принимает вид:

$$n = -\frac{\ln\left\{1 - \frac{A}{R} p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right\}}{\ln(1+i)} =$$

$$= -\frac{\ln\left\{1 - \frac{5 \cdot 10^4}{10^4} \cdot 4 \cdot \left[(1+0{,}15)^{1/4} - 1\right]\right\}}{\ln(1+0{,}15)} = -\frac{\ln 0{,}288838}{\ln 1{,}15} = 8{,}886 \text{ лет.}$$

Количество кварталов в полученном сроке составит $np = 8{,}886 \cdot 4 = 35{,}5$. Округляем полученное число до 35, т.е. количество лет ренты принимается равным 8,75. Уточненная величина ежеквартальной выплаты

$$\frac{R}{p} = A\frac{(1+i)^{1/p} - 1}{1 - (1+i)^{-n_0}} = 50\,000 \cdot \frac{1{,}15^{1/4} - 1}{1 - 1{,}15^{-8{,}75}} = 2519{,}6 \text{ руб.}$$ ▸

Если известны все параметры ренты, кроме процентной ставки, то расчет *процентной ставки* можно трактовать как *определение доходности финансовой операции*)
Процентную ставку рассчитывают приближенно.
Рассмотрим численный метод Ньютона-Рафсона

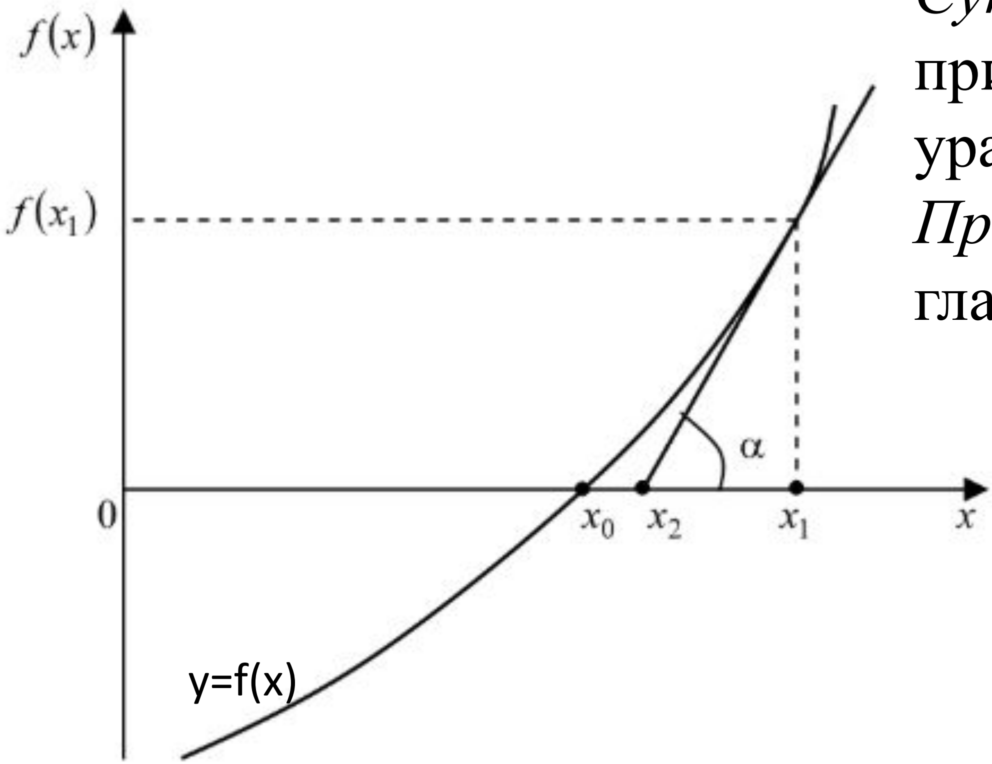


Рис. 2.5. **График, поясняющий метод Ньютона—Рафсона**

*Суть*: последовательное приближение к решению $x_0$ уравнения f(x)=0

*Предположения*: функция f(x) – гладкая, непрерывная, монотонная

*Алгоритм*:

1) ввести $x_1$- начальное приближение, ε - требуемая точность (например: 0,01; 0,001);

2) через т. $(x_1, f(x_1))$ проводится касательная к графику, пересекающая ось ох в точке $x_2$;

3) если $|x_2 - x_1| < \varepsilon$, то $x_2$ – искомый корень, иначе $x_2$- следующее приближение и переход к п.2

Из прямоугольного треугольника$\Rightarrow$

$$tg\alpha = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \qquad (2.69)$$

(2.69)$\Rightarrow$ $$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \ldots, \quad x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}$$

t – номер шага (итерации)

Для годовой ренты: $$\frac{S}{R}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$ (2.70) – современная стоимость

Замена: x=1+i ⇒ тогда (2.70) ⇒ $$x^n-\frac{S}{R}x+\frac{S}{R}-1=0$$

Искомая функция: $$f(x)=x^n-\frac{S}{R}x+\frac{S}{R}-1$$

Производная: $$f'(x)=nx^{n-1}-\frac{S}{R}$$

►**Пример 2.24.** В накопительный фонд ежегодно в конце года поступают средства по 10 000 руб. в течение 7 лет, причем на конец срока величина фонда составит 100 000 руб.

Определить доходность инвестиций.

Р е ш е н и е. $S/R = 10$. Положим $x_1 = 1,15$.

Первая итерация:

$$f(x_1) = x_1^n - \frac{S}{R}x_1 + \frac{S}{R} - 1 = 1,15^7 - 10 \cdot 1,15 + 10 - 1 = 0,16;$$

$$f'(x_1) = nx_1^{n-1} - \frac{S}{R} = 7 \cdot 1,15^6 - 10 = 6,19;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,15 - \frac{0,16}{6,19} = 1,1241519.$$

Вторая итерация:

$$f(x_2) = 0,0271701; \; f'(x_2) = 4,1269378;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,1241519 - \frac{0,0271701}{4,1269378} = 1,1175683.$$

Третья итерация:

$$f(x_3) = 0{,}00161825\ ;\ f'(x_3) = 3{,}637743;$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1{,}1175683 - \frac{0{,}00161825}{3{,}637743} = 1{,}1171235\ .$$

Поскольку результаты во второй и третьей итерациях слабо отличаются друг от друга, то вычисления можно прекратить и принять $i = x - 1 = 0{,}1171235$ , или 11,71235%. Другим методом, подтверждающим окончание вычислений, является проверка. Для этого в правую часть исходного уравнения подставляют полученное значение ставки. Если результат совпадает с левой частью или слабо отличается от нее, то вычисления прекращают. Для рассматриваемого примера

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1{,}1171235^7 - 1}{0{,}1171235} = 10{,}00006\ .$$

Поскольку результаты практически совпали, так как $S/R = 10$ , то принимаем $i = 11{,}71235\% \approx 11{,}71\%$. ▶

Аналогично проводятся расчеты для других типов рент. Например, для p-срочной ренты:

$$\frac{A}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}$$ - современная стоимость

Искомая функция: $$f(x) = \frac{A}{R}px^{n+\frac{1}{p}} - \left(1+\frac{A}{R}p\right)x^n + 1$$

Производная: $$f'(x) = \left(n+\frac{1}{p}\right)\frac{A}{R}px^{n+\frac{1}{p}-1} - n\left(1+\frac{A}{R}p\right)x^{n-1}$$

▸**Пример 2.25.** Единовременное вложение средств в предприятие составило 50 000 руб. В течение 7 лет по истечении каждого квартала инвестор получает 2500 руб.

Определить доходность инвестиций.

Р е ш е н и е. $R = 2500 \cdot 4 = 10\,000$ руб. $A/R = 5$. Положим $x_1 = 1{,}15$.

Первая итерация:

$$f(x_1) = \frac{A}{R} p x_1^{n+\frac{1}{p}} - \left(1 + \frac{A}{R} p\right) x_1^n + 1 =$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 1{,}15^{7{,}25} - (1 + 5 \cdot 4) \cdot 1{,}15^7 + 1 = 0{,}231684;$$

$$f'(x_1) = \left(n + \frac{1}{p}\right) \frac{A}{R} p x_1^{n+\frac{1}{p}-1} - n\left(1 + \frac{A}{R} p\right) x_1^{n-1} =$$

$$= 7{,}25 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1{,}15^{6{,}25} - 7 \cdot (1 + 5 \cdot 4) \cdot 1{,}15^6 = 7{,}29984;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}15 - \frac{0{,}231684}{7{,}29984} = 1{,}1182618\ .$$

Вторая итерация:

$$f(x_2) = \frac{A}{R} p x_2^{\,n+\frac{1}{p}} - \left(1 + \frac{A}{R} p\right) x_2^n + 1 = 0{,}052601;$$

$$f'(x_2) = \left(n + \frac{1}{p}\right) \frac{A}{R} p x_2^{\,n+\frac{1}{p}-1} - n\left(1 + \frac{A}{R} p\right) x_2^{n-1} = 4{,}12419;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}1182618 - \frac{0{,}052601}{4{,}12419} = 1{,}1055075.$$

Третья итерация:

$$f(x_3)=\frac{A}{R}px_3^{n+\frac{1}{p}}-\left(1+\frac{A}{R}p\right)x_3^n+1=0{,}006844;$$

$$f'(x_3)=\left(n+\frac{1}{p}\right)\frac{A}{R}px_3^{n+\frac{1}{p}-1}-n\left(1+\frac{A}{R}p\right)x_3^{n-1}=3{,}07043;$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=1{,}1055075-\frac{0{,}006844}{3{,}07043}=1{,}103278\ .$$

Принимаем $i=x-1=0{,}103278$, или $10{,}3278\%$. Проведем проверку, используя формулу

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}=\frac{1-1{,}103278^{-7}}{4\cdot\left(1{,}103278^{1/4}-1\right)}=4{,}999\ .$$

Поскольку результаты практически совпали, так как $S/R=5$, то принимаем $i=10{,}3278\%\approx10{,}33\%$. ▶

## Контрольные вопросы и задания

**2.1.** Имеется следующий график платежей во времени:

- 1 января 2004 г. — 700 руб.;
- 1 июля 2004 г. — 1000 руб.;
- 1 января 2005 г. — 400 руб.;
- 1 января 2006 г. — 900 руб.

Определить сумму задолженности на 1 января 2006 г. и ее современную стоимость на момент выплаты первой суммы при ставке наращения 16,5% годовых.

**2.2.** В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12.5% годовых.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

**2.3.** В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых, причем выплаты производятся в конце каждого месяца, а проценты начисляются поквартально.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

**2.4.** В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых, причем проценты начисляются и выплаты производятся в конце каждого квартала.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

**2.5.** В фонд ежегодно в конце года поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по номинальной ставке 12,5% годовых, причем проценты начисляются ежемесячно.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

**2.6.** В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых, причем выплаты производятся в конце каждого месяца.

Определить коэффициенты наращения и приведения ренты, а также величину фонда на конец срока и его современную стоимость.

**2.7.** В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых, причем выплаты производятся в начале каждого месяца, а проценты начисляются поквартально.

Определить наращенную сумму и современную стоимость фонда.

**2.8.** В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых, причем выплаты производятся в середине каждого месяца, а проценты начисляются поквартально.

Определить наращенную сумму и современную стоимость фонда.

**2.9.** Спустя четыре года после образования фонда в него начинают поступать средства по 800 руб. в конце каждого года в течение последующих 9 лет, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых.

Определить современную стоимость и наращенную сумму фонда.

**2.10.** Пусть годовая рента постнумерандо со сроком 15 лет делится между двумя участниками, причем первый участник получает 35% капитализированной стоимости ренты. Процентная ставка принимается равной 12,5% годовых.

Определить длительность периодов получения ренты первым и вторым участниками.

**2.11.** Определить цену *p*-срочной вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого месяца составляют 3000 руб. при номинальной процентной ставке 12,5% годовых и начислении процентов один раз в году.

**2.12.** Определить цену годовой вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого года составляют 36 000 руб. при процентной ставке 12,5% годовых.

**2.13.** В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 12,5% годовых, причем выплаты производятся в конце каждого квартала (в конце каждого года), а проценты начисляются непрерывно.

Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока.

**2.14.** В фонд ежегодно поступают средства по 800 руб. в течение 9 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 12,5% годовых, причем выплаты производятся и проценты начисляются непрерывно.

Определить коэффициент приведения ренты и ее современную стоимость.

**2.15.** Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться каждый год на 500 руб. (уменьшаться на 500 руб.) в течение 12 лет при поступлениях денег в конце каждого года. Первая выплата равна 6000 руб. Начисление процентов производится по ставке 14,5% годовых.

Определить современную стоимость и наращенную сумму переменного потока платежей.

**2.16.** Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться каждый год на 7% (уменьшаться на 7%) в течение 8 лет при поступлениях денег в конце каждого года. Первая выплата равна 1000 руб. Начисление процентов производится по ставке 18% годовых.

Определить современную стоимость и наращенную сумму переменного потока платежей.

**2.17.** Линейно изменяющийся непрерывный поток платежей имеет следующие параметры: базовый уровень выпуска $R$ = 7000 руб./год, ежегодное увеличение потока платежей $a$ = 500 руб., сила роста $\delta = 12\%$ . Срок потока платежей составляет 6 лет.

Определить современную стоимость потока и его наращенную сумму.

**2.18.** В фонд ежегодно поступают средства, на которые начисляются проценты по ставке 12,5% годовых, причем выплаты производятся в конце каждого месяца, а проценты начисляются поквартально. Величина фонда на конец срока составит 10 000 руб., годовая выплата — 1200 руб.

Определить срок ренты.

**2.19.** Долг в размере 20 000 руб. погашается равными частями в конце каждого месяца по 400 руб. На взносы начисляются проценты раз в году по ставке 12,5% годовых.

Определить срок погашения долга.