Применение векторного и смешанного произведений векторов в решении геометрических задач

Выполнил: Гайдай Дмитрий
ученик 11 «Б» класса
МБОУ лицея №1
Научный руководитель:
Бугаева Вера Михайловна

Комсомольск-на-Амуре
2019

Актуальность

– Уменьшение времени на решение задач ЕГЭ, а так же других геометрических задач.
– Более широкое применение координатно-векторного метода.
– Уменьшается количество формул, которые необходимо выучить при подготовке к ЕГЭ.

Цели

– Познакомиться с историей метода координат, изучить понятия векторного и смешанного произведения векторов, а так же области их применения

Задачи

– Поиск, изучение и систематизация материалов по теме. Составление краткого наглядного учебного пособия для старшеклассников, посвященного методу координат в стереометрии.

Предмет исследования

– Применение векторного и смешанного произведения векторов при решении геометрических задач методом координат.

– Увеличение количества типов задач, решаемых методом координат с помощью использования векторного и смешанного произведений векторов.

Объект исследования

– Векторное и смешанное произведения векторов. Метод координат

Гипотеза

– Применяя такие понятия как векторное и смешанное произведения векторов, мы значительно экономим время и усилия на решение многих типов задач. Так же я предполагаю, что изучение метода координат выпускниками может стать очень полезным подспорьем при решении задачи 14 (С2) ЕГЭ.

Историческая справка

- Александр Милетский – описывал широту и долготу места используя прямоугольные проекции
- Гиппарх – идея опоясать карту земного шара параллелями и меридианами
- Рене Декарт – теория метода координат, взаимопроникновение алгебры и геометрии

Вычисление определителей

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

Применение определителей

– Формулы Крамера

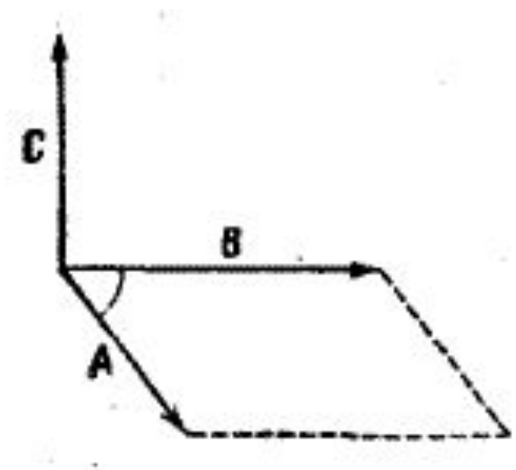
– Нахождение векторного и смешанного произведений векторов

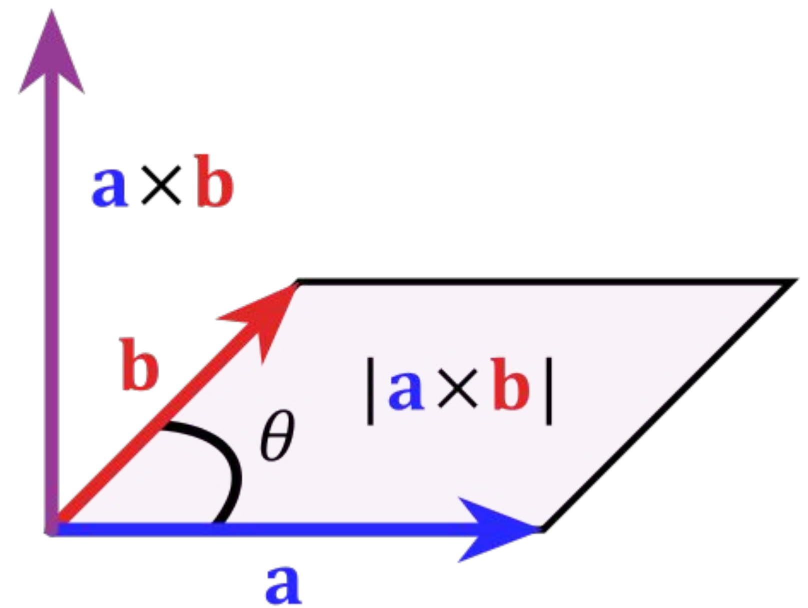
Векторное произведение

Векторным произведением ненулевых и неколлениарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что:

– Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен обоим векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

– $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a};\ \vec{b})$





Свойства

– При смене векторов местами меняется знак произведения:

$$\vec{a} * \vec{b} = -\vec{b} * \vec{a}$$

$$\vec{a} * \vec{b} = \vec{c}$$

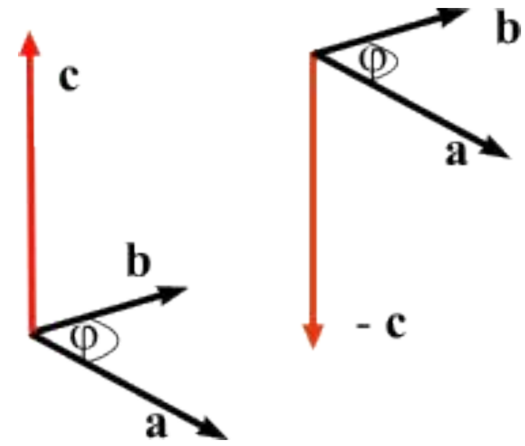
$$\vec{b} * \vec{a} = -\vec{c}$$

– Кроме того:

– $(k\overline{a})\times\overline{b} = k(\overline{a}\times\overline{b}) = \overline{a}\times(k\overline{b})$

– $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c} = \overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$

– $\overline{a}\times\overline{a} = \overline{0}$



Нахождение векторного произведения

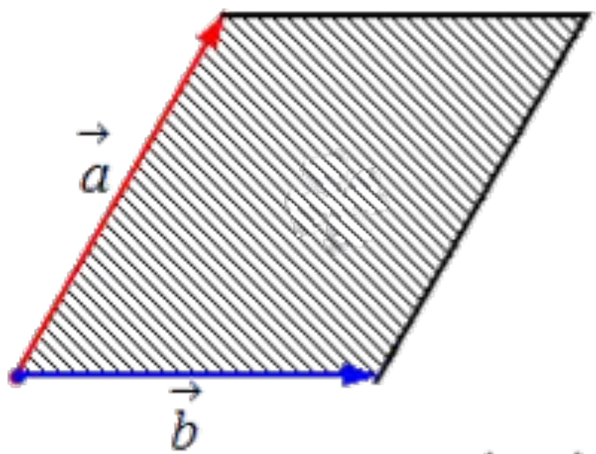
- Пусть даны векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, тогда их векторное произведение может быть найдено как определитель

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

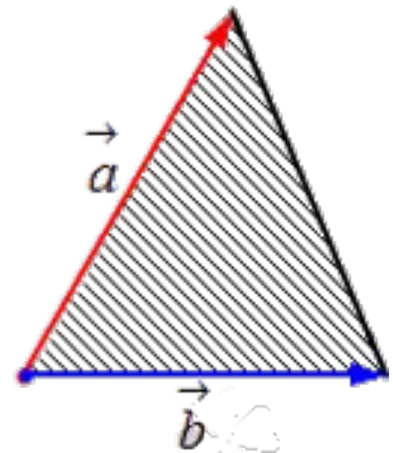
  - Где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - координатные векторы (орты)
  - Коэффициенты при векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - координаты вектора $\vec{c}$, $\vec{c} = \vec{a} * \vec{b}$

Геометрический смысл

– Длина векторного произведения – это площадь параллелограмма или удвоенная площадь треугольника.



$$S = \left|\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left|\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\right|$$

– $\vec{n} = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}$, $\vec{n}$ - вектор нормали к плоскости ABC.

Смешанное произведение

– Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{a}(\overline{b} \times \overline{c})$$

– Если заданы координаты векторов, то их смешанное произведение равно определителю третьего порядка, каждая строка которого состоит из координат соответствующего вектора, т.е.

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Свойства

1) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a}$

2) $\overline{a}(\overline{b}\times\overline{c}) = (\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}$

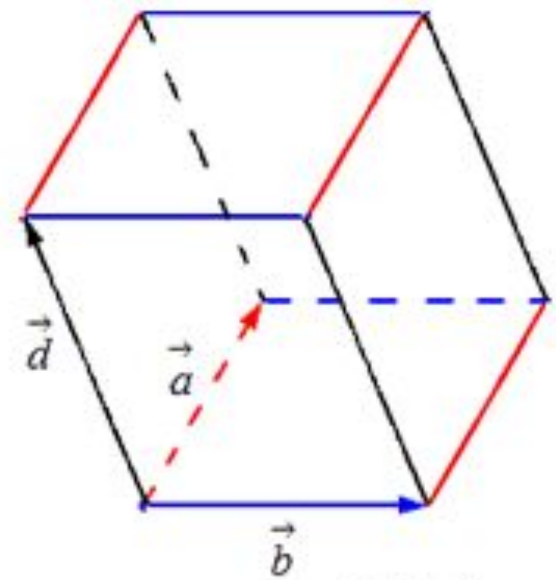
3) три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю

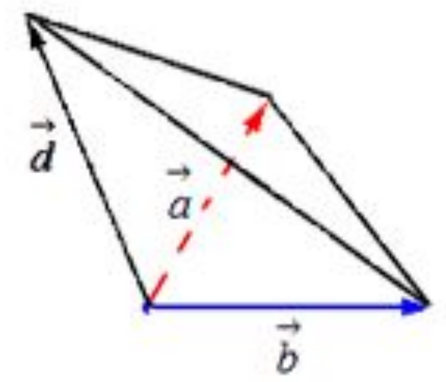
Геометрический смысл

– Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах равен модулю их смешанного произведения

– Объем тетраэдра, построенного на трех некомпланарных векторах равен $^1/_6$ модуля их смешанного произведения

$$V_{тетраэдра} = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} \right|$$





$$V_{параллелепипеда} = \left| \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} \right|$$

Решение задачи C2

- В основании четырехугольной пирамиды SABC лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB=4 и BC=3. Длины боковых ребер пирамиды SA = $\sqrt{11}$, SB = 3$\sqrt{3}$, SD = 2$\sqrt{5}$.
  а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
  б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB
- а) Заметим, что $SA^2 + AD^2 = SD^2$, и $SA^2 + AB^2 = SB^2$, из чего следует что SA перпендикулярно плоскости ABC.
- б) Введем систему координат с началом отсчета в точке A:
  A(0;0;0); S(0;0;$\sqrt{11}$); B(0;4;0); C(3;4;0); D(3;0;0)
  $\overrightarrow{AS}\{0;\,0;\,\sqrt{11}\}$; $\overrightarrow{AB}\{0;\,4;\,0\}$
- Найдем координаты вектора $\vec{n}$ нормали к плоскости ASB

- $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \sqrt{11} \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\sqrt{11}\vec{i} - 0\vec{j} - 0\vec{k}$;
- $\vec{n}\{-4\sqrt{11}; 0; 0\}$ <=> $\vec{n}\{1; 0; 0\}$
- $\overrightarrow{SC}\{3; 4; -\sqrt{11}\}$;
- $\sin(SC\ \widehat{(ABC)}) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{SC}; \vec{n}}\right) = \left|\frac{3}{\sqrt{9+6+11}*\sqrt{1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{1}{2}$
- $SC\ \widehat{(ABC)}$ = arcsin$\frac{1}{2}$ = 30°
- Ответ: 30°

Список литературы

– http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_4_12.php
– http://mathprofi.ru/vektornoe_proizvedenie_vektorov_smeshannoe_proizvedenie.html
– https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5
– https://ru.onlinemschool.com/math/library/vector/multiply1/