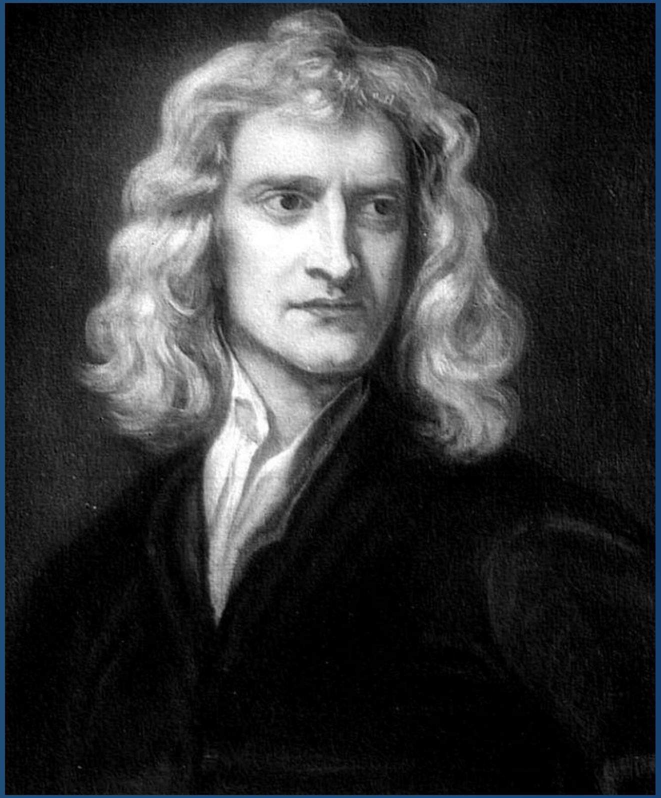
# Закон Всемирного тяготения



$$F = \frac{GM_1M_2}{r^2},$$

где $M_1$ и $M_2$ – массы тел;

$r$ – расстояние между их центрами;

$G$ – гравитационная постоянная.

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$$

# Масса Земли

$$F = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow a = G\frac{M}{r^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{R_\oplus^2}$$

$$F = ma$$

$$\Rightarrow 9.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{M}{6371^2\text{км}^2}$$

# Масса Земли

$$\Rightarrow 9.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{M}{6371^2\text{км}^2}$$

$$\Rightarrow M = \frac{9.8 \cdot 40\,589\,641\,000\,000}{6.67 \cdot 0.00000000001}$$

$$\Rightarrow M = 5.97 \cdot 10^{24}\ \text{кг}$$

# Плотность Земли

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{5.97 \cdot 10^{24}\text{кг}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6371^3\text{км}^3}$$

$$= \frac{5.97 \cdot 10^{24}\text{кг}}{1\,082\,657\,777\,102\ \text{км}^3}$$

$$= 5\,514.21\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

# Определение массы небесных тел на основе исследования связных систем (уточненный III закон Кеплера)

$$\frac{M_1 + m_1}{M_2 + m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2},$$

где $M_1$ и $m_1$ – массы тел первой системы;
$M_2$ и $m_2$ – массы тел второй системы;
$a_1$ – большая полуось тел первой системы;
$a_2$ – большая полуось тел второй системы;
$T_1$ – период обращения тела из первой системы;
$T_2$ – период обращения тела из второй системы.

# Задача №1

Определите массу Сатурна (в массах Земли) путем сравнения систем Сатурн-Титан и Земля-Луна, если известно, что спутник Сатурна Титан удален от него на 1221.87 тыс. км. и обращается вокруг него за 15.945 земного дня.

# Задача №1

$M_2 = 1$
$m_1 = 0.022$
$m_2 = 0.012$
$a_1 = 1221.87 \cdot 10^3$
$a_2 = 384.399 \cdot 10^3$
$T_1 = 15.94$
$T_2 = 27.32$
$M_1 = ?$

$$\frac{M_1 + m_1}{M_2 + m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2}$$

$$M_1 = \left(\frac{a_1^3}{a_2^3} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2} \cdot (M_2 + m_2)\right) - m_1$$

# Задача №1

$$M_1 = \left( \frac{a_1^3}{a_2^3} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2} \cdot (M_2 + m_2) \right) - m_1$$

$$M_1 = \left( \left( \frac{1221.87}{384.399} \right)^3 \cdot \left( \frac{27.32}{15.94} \right)^2 \cdot (1 + 0.012) \right) - 0.022$$

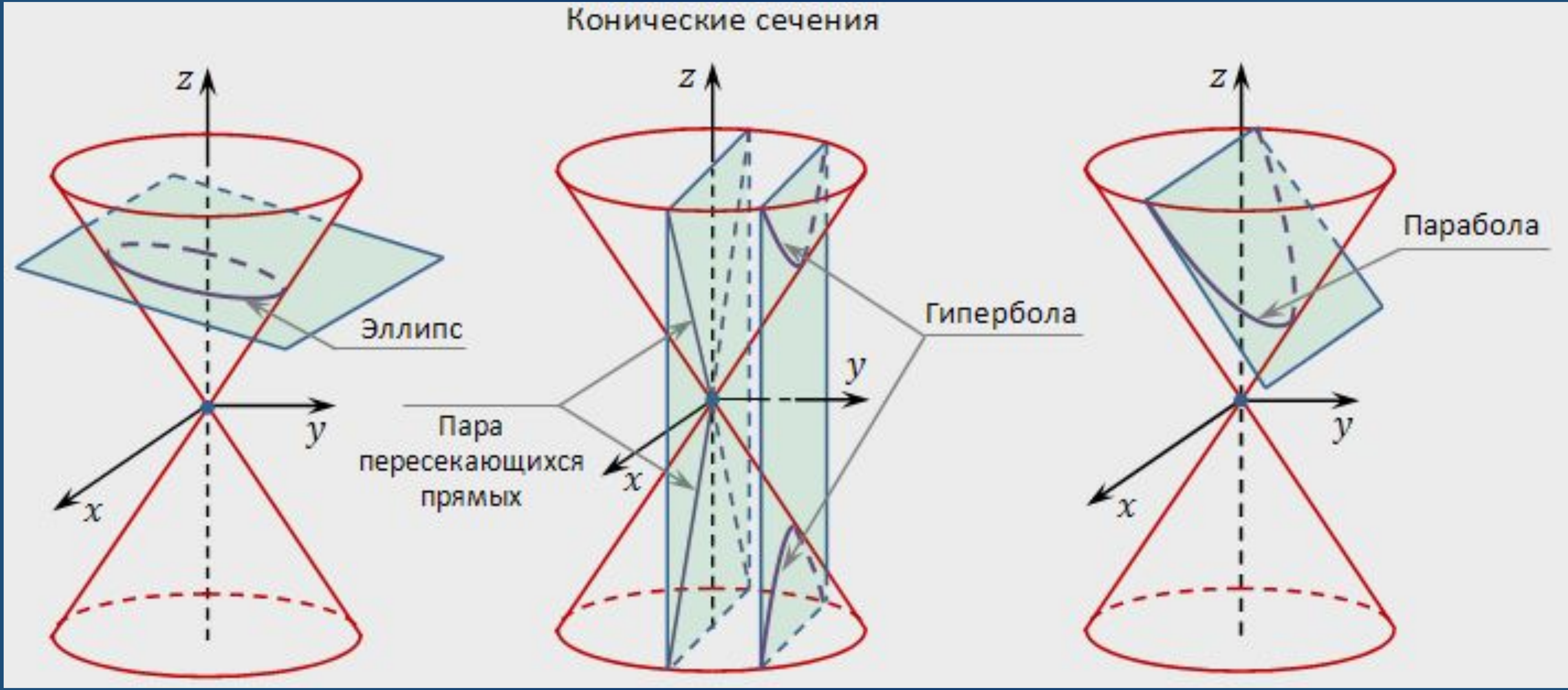
$$M_1 = (32.116 \cdot 2.937 \cdot 1.012) - 0.022$$

$$M_1 = 95.4 \approx 95 \text{ земных масс}$$

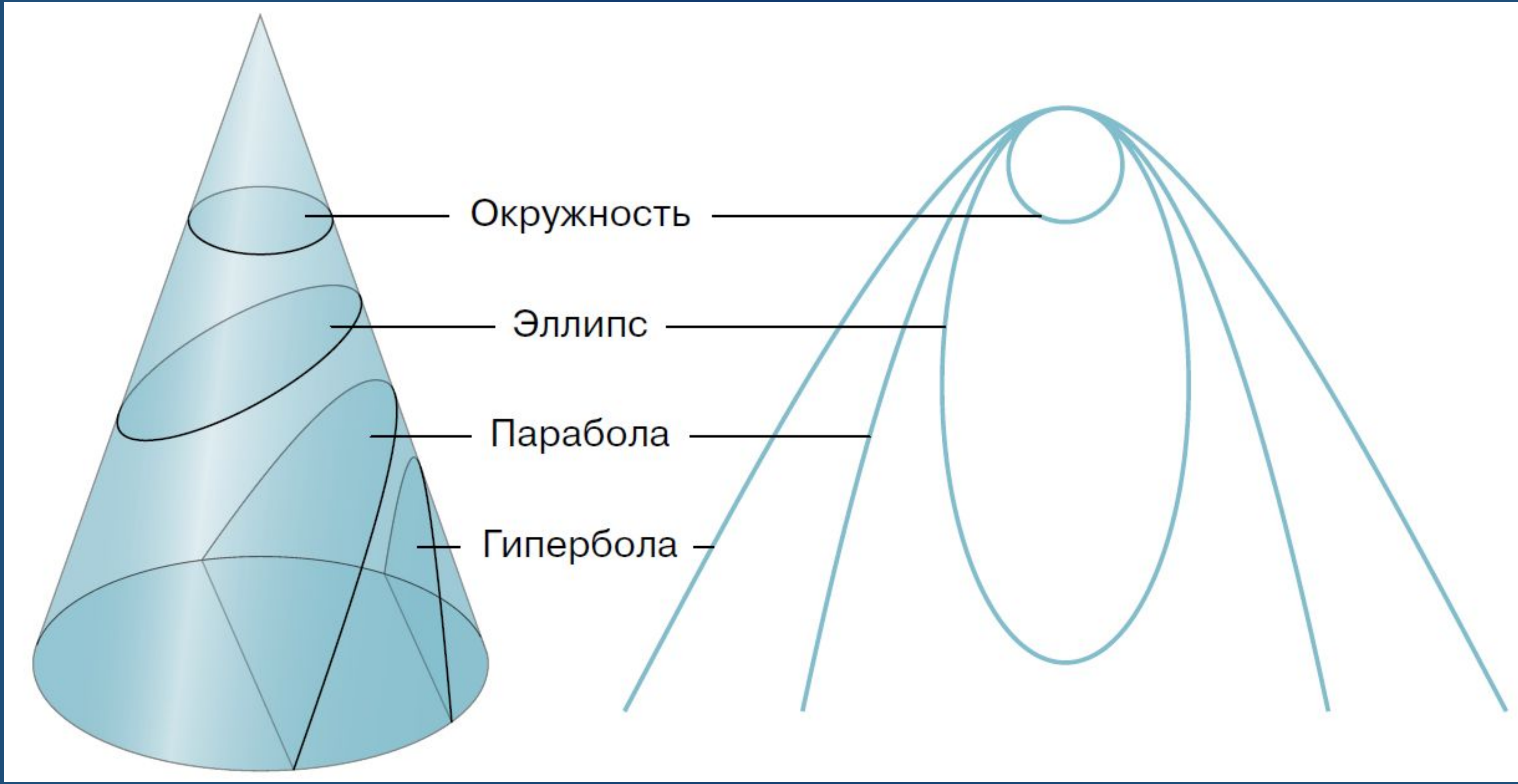
# Орбиты небесных тел

**Ньютон математически доказал, что под действием тяготения тело m может двигаться относительно тела M по кривым трёх типов: эллипс, парабола или гипербола.**

# Орбиты небесных тел



# Орбиты небесных тел



# Орбиты небесных тел

**Форма орбиты зависит от ее эксцентриситета**

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

**где b – малая полуось; a – большая полуось.**

$$\varepsilon = 0 \ \text{– окружность}$$

$$0 < \varepsilon < 1 \ \text{– эллипс}$$

$$\varepsilon = 1 \ \text{– парабола}$$

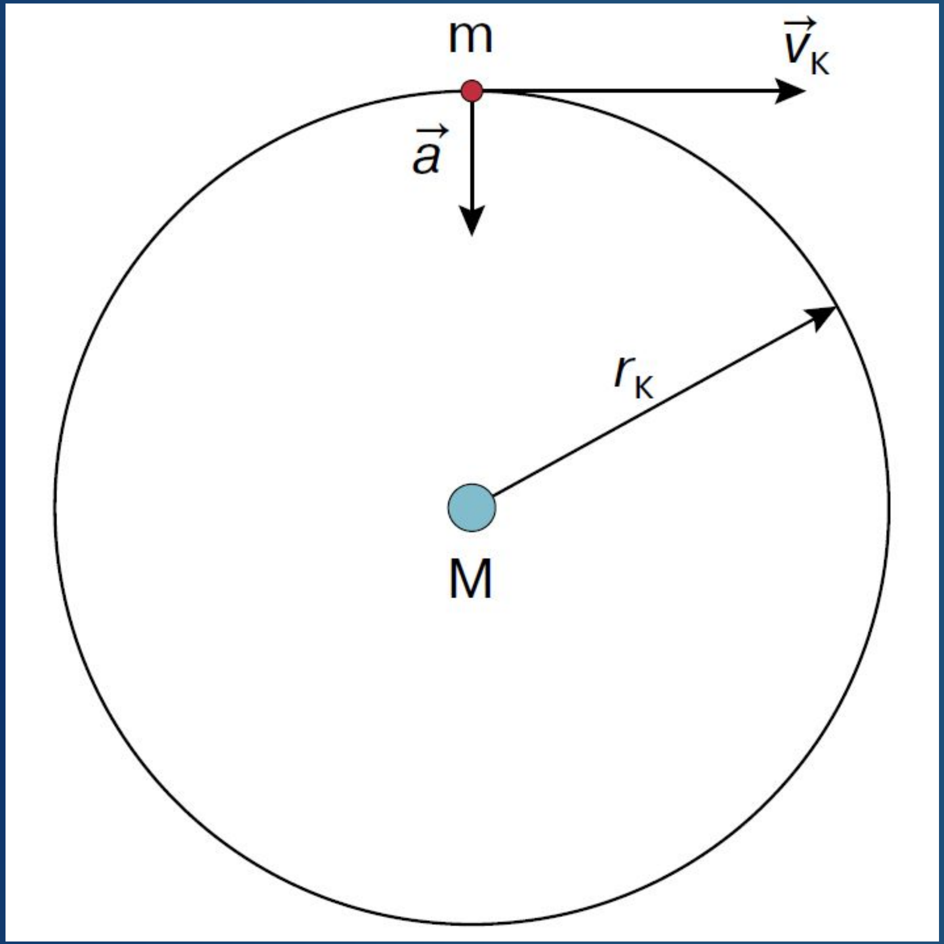
$$1 < \varepsilon < \infty \ \text{– гипербола}$$

$$\varepsilon = \infty \ \text{– прямая}$$

# Движение тела по орбите

**Пусть тело массы *m* ≤ *M* движется с линейной скоростью $v_к$ вокруг тела М по окружности радиуса $r_к$**

**Это возможно только в том случае, если вектор скорости тела m в каждой точке орбиты перпендикулярен направлению на тело М и если движение происходит под действием силы, создающей центростремительное ускорение.**



# Движение тела по орбите

Центростремительное ускорение: $\mathbf{a} = \frac{v_k^2}{r_k}$

Сила Всемирного тяготения + II закон Ньютона:

$$\mathbf{ma} = \frac{GMm}{r_k^2}$$

Скорость, необходимая для движения по круговой орбите:

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r_k}}$$

# Первая космическая скорость

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r_k}}$$

Скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы он смог стать искусственным спутником и начал двигаться по круговой орбите

# Задача №2

**Определите первую космическую скорость для Земли, если ее радиус составляет 6371 км, а масса $5.97 \cdot 10^{24}$ кг.**

# Задача №2

$r_k = 6371$ км
$M = 5.97 \cdot 10^{24}$кг
$v_1 = ?$

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r_k}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\text{кг}}{6371 \cdot 10^3\text{м}}}$$

$$= 7907.991\ \text{м/с} \ = 7.9\ \text{км/с}$$

# Первая космическая скорость

**Если запустить тело со скоростью, меньшей первой космической, то оно будет двигаться по эллиптической орбите внутри круговой и в дальнейшем упадет на массивное тело.**

**Если запустить с большей, то тело будет двигаться по эллиптической орбите за пределами круговой**

# Предел эллиптической орбиты

Если тело преодолеет особый предел, называемый параболической скоростью $\upsilon_\text{п}$, то оно выйдет на параболическую орбиту и улетит от массивного тела на бесконечно большую дистанцию

$$\upsilon_\text{п} = \sqrt{\frac{2GM}{r_k}} = \sqrt{2}\upsilon_1$$

# Вторая космическая скорость

Наименьшая скорость, которую надо придать объекту, для преодоления гравитационного притяжения более массивного тела.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r_k}}$$

# Задача №3

**Определите вторую космическую скорость для Земли, если ее радиус составляет 6371 км, а масса $5.97 \cdot 10^{24}$ кг.**

# Задача №3

$r_k = 6371$ км
$M = 5.97 \cdot 10^{24}$кг
$\upsilon_2 = ?$

$$\upsilon_k = \sqrt{\frac{2GM}{r_k}}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\text{кг}}{6371 \cdot 10^3\text{м}}}$$

$$= 11\,183.85\ \text{м/с} \quad = 11.2\ \text{км/с}$$

# Третья космическая скорость

**Наименьшая скорость, которую надо придать объекту, для преодоления гравитационного притяжения своей звездной системы**

$$v_3 = \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 v_1^2 + v_2^2}$$