

# Закон Всемирного тяготения

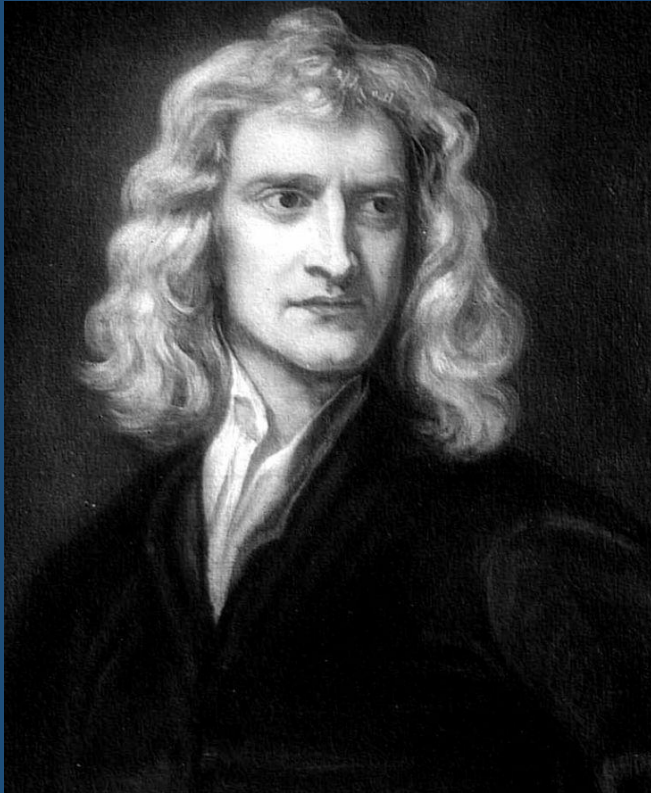
$$F = \frac{GM_1M_2}{r^2},$$

где  $M_1$  и  $M_2$  – массы тел;

$r$  – расстояние между их центрами;

$G$  – гравитационная постоянная.

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$$



Масса  
Земли

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\Rightarrow a = G \frac{M}{r^2} \Rightarrow g = G \frac{M}{R_{\oplus}^2}$$

$$F = ma$$

$$\Rightarrow 9.8 \frac{M}{c^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{M}{6371^2 \text{ км}^2}$$

Масса

Земли

$$\Rightarrow 9.8 \frac{M}{c^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{M}{6371^2 \text{ км}^2}$$

$$\Rightarrow M = \frac{9.8 \cdot 40\,589\,641\,000\,000}{6.67 \cdot 0.000000000001}$$

$$\Rightarrow M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

# Плотность

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{M}{V} = \frac{5.97 \cdot 10^{24} \text{ кг}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6371^3 \text{ км}^3} \\ &= \frac{5.97 \cdot 10^{24} \text{ кг}}{1\,082\,657\,777\,102 \text{ км}^3} \\ &= 5\,514.21 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\end{aligned}$$

# Определение массы небесных тел на основе исследования связанных систем (уточненный III закон Кеплера)

$$\frac{M_1 + m_1}{M_2 + m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2},$$

где  $M_1$  и  $m_1$  – массы тел первой системы;

$M_2$  и  $m_2$  – массы тел второй системы;

$a_1$  – большая полуось тел первой системы;

$a_2$  – большая полуось тел второй системы;

$T_1$  – период обращения тела из первой системы;

$T_2$  – период обращения тела из второй системы.

# Задача №1

Определите массу Сатурна (в массах Земли) путем сравнения систем Сатурн-Титан и Земля-Луна, если известно, что спутник Сатурна Титан удален от него на 1221.87 тыс. км. и обращается вокруг него за 15.945 земного дня.

# Задача №1

$$M_2 = 1$$

$$m_1 = 0.022$$

$$m_2 = 0.012$$

$$a_1 = 1221.87 \cdot 10^3$$

$$a_2 = 384.399 \cdot 10^3$$

$$T_1 = 15.94$$

$$T_2 = 27.32$$

$$M_1 = ?$$

$$\frac{M_1 + m_1}{M_2 + m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2}$$

$$M_1 = \left( \frac{a_1^3}{a_2^3} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2} \cdot (M_2 + m_2) \right) - m_1$$

# Задача №1

$$M_1 = \left( \frac{a_1^3}{a_2^3} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2} \cdot (M_2 + m_2) \right) - m_1$$

$$M_1 = \left( \left( \frac{1221.87}{384.399} \right)^3 \cdot \left( \frac{27.32}{15.94} \right)^2 \cdot (1 + 0.012) \right) - 0.022$$

$$M_1 = (32.116 \cdot 2.937 \cdot 1.012) - 0.022$$

$$M_1 = 95.4 \approx 95 \text{ земных масс}$$

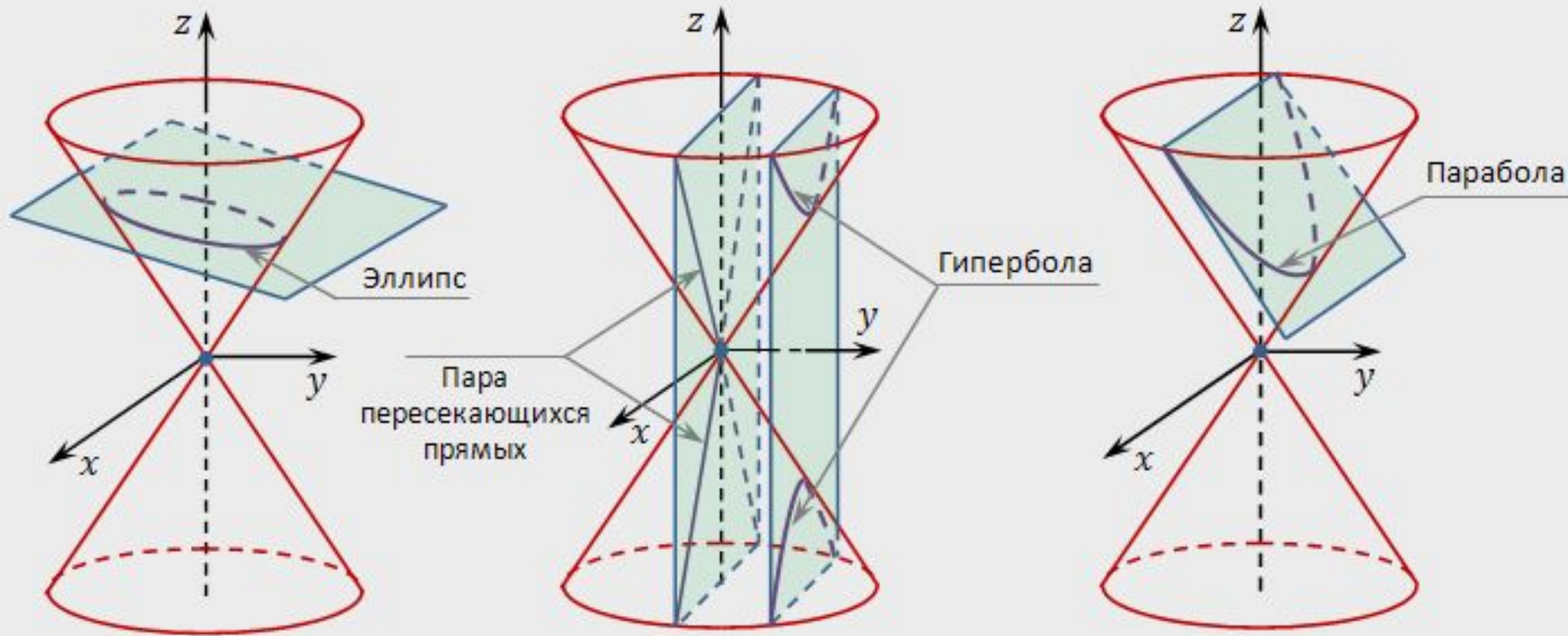


# Орбиты небесных тел

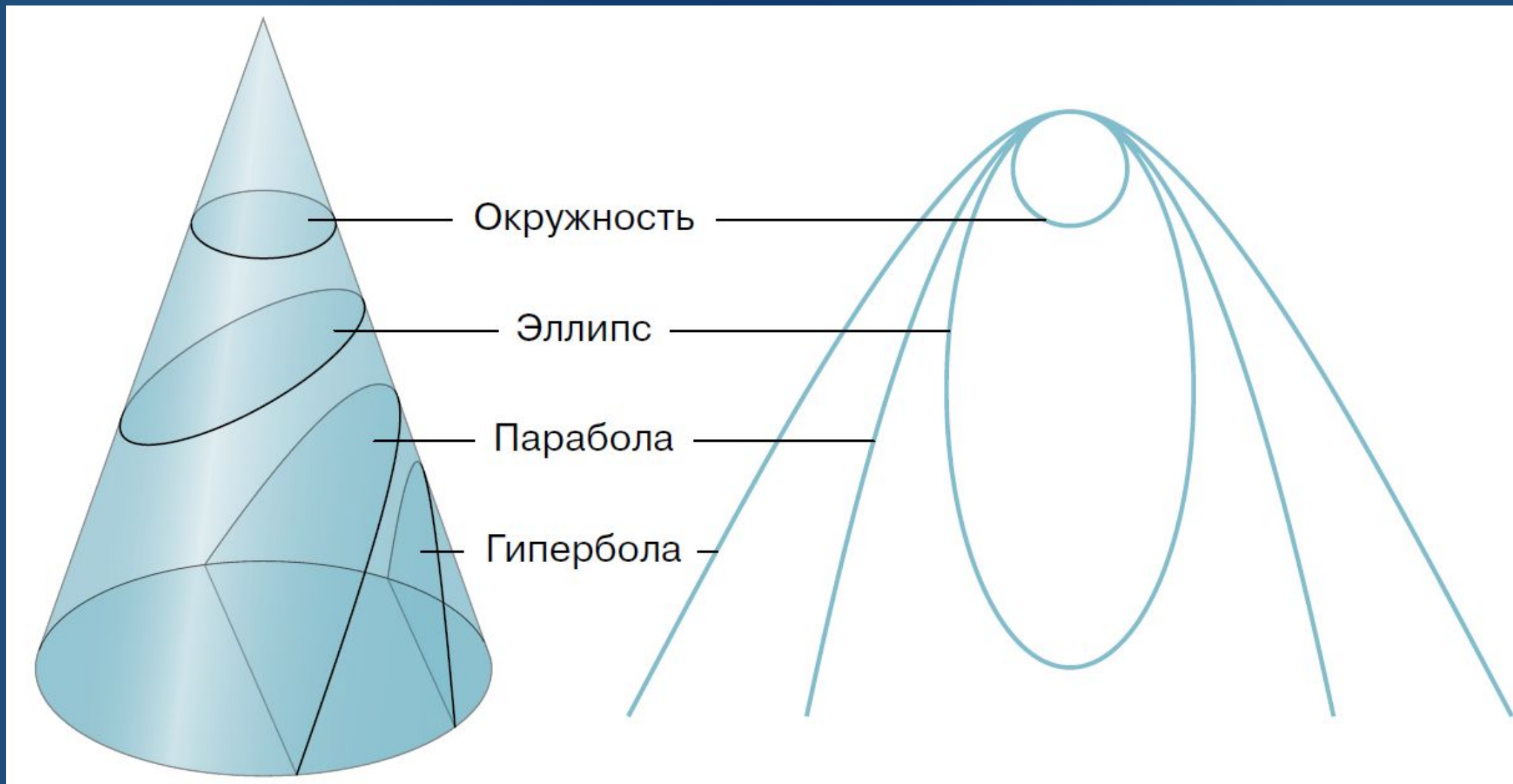
Ньютон математически доказал, что под действием тяготения тело  $m$  может двигаться относительно тела  $M$  по кривым трёх типов: эллипс, парабола или гипербола.

# Орбиты небесных тел

Конические сечения



# Орбиты небесных тел



# Орбиты небесных тел

Форма орбиты зависит от ее эксцентриситета

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

где  $b$  – малая полуось;  $a$  – большая полуось.

$\varepsilon = 0$  – окружность

$0 < \varepsilon < 1$  – эллипс

$\varepsilon = 1$  – парабола

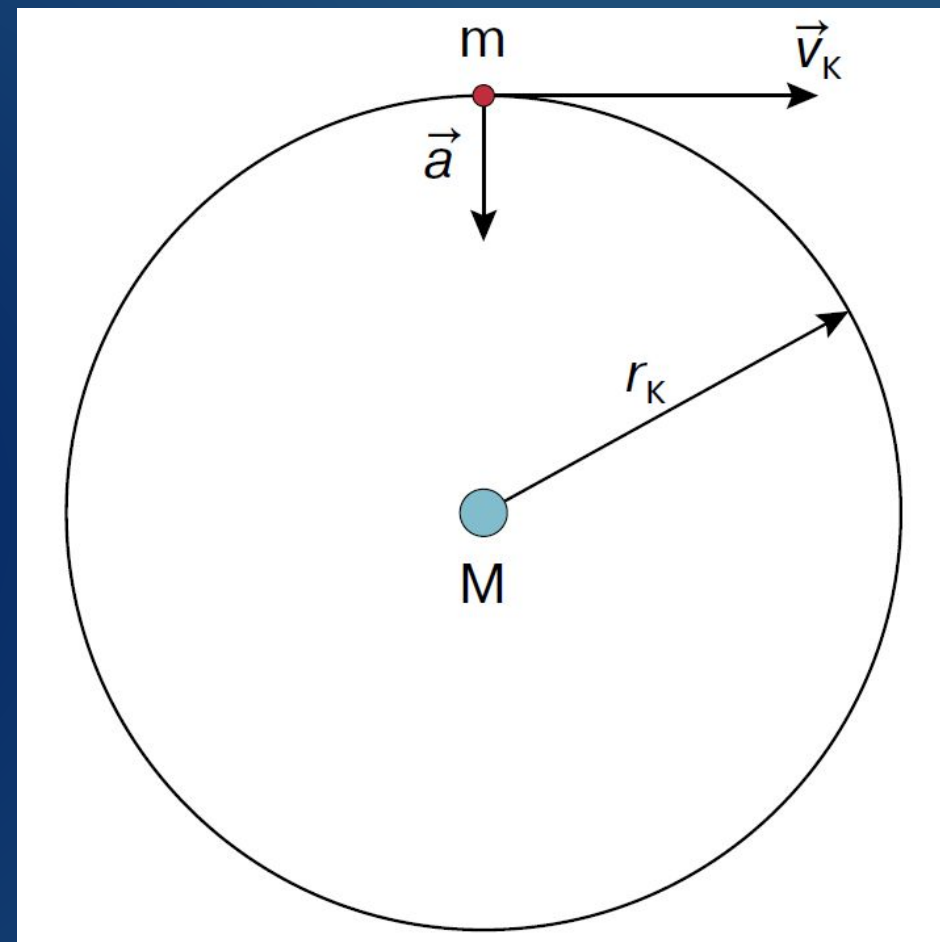
$1 < \varepsilon < \infty$  – гипербола

$\varepsilon = \infty$  – прямая

# Движение тела по орбите

Пусть тело массы  $m \leq M$  движется с линейной скоростью  $v_k$  вокруг тела  $M$  по окружности радиуса  $r_k$

Это возможно только в том случае, если вектор скорости тела  $m$  в каждой точке орбиты перпендикулярен направлению на тело  $M$  и если движение происходит под действием силы, создающей центростремительное ускорение.



# Движение тела по орбите

Центростремительное ускорение:  $a = \frac{v_k^2}{r_k}$

Сила Всемирного тяготения + II закон Ньютона:

$$ma = \frac{GMm}{r_k^2}$$

Скорость, необходимая для движения по круговой орбите:

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r_k}}$$

# Первая космическая скорость

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r_k}}$$

Скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы он смог стать искусственным спутником и начал двигаться по круговой орбите

# Задача №2

Определите первую космическую скорость для Земли, если ее радиус составляет 6371 км, а масса  $5.97 \cdot 10^{24}$  кг.



# Задача №2

$$r_k = 6371 \text{ км}$$

$$M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

$$v_1 = ?$$

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r_k}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} \text{ кг}}{6371 \cdot 10^3 \text{ м}}}$$

$$= 7907.991 \text{ м/с} = 7.9 \text{ км/с}$$

# Первая космическая скорость

Если запустить тело со скоростью, меньшей первой космической, то оно будет двигаться по эллиптической орбите внутри круговой и в дальнейшем упадет на массивное тело.

Если запустить с большей, то тело будет двигаться по эллиптической орбите за пределами круговой

# Предел эллиптической орбиты

Если тело преодолет особый предел, называемый параболической скоростью  $v_{\Pi}$ , то оно выйдет на параболическую орбиту и улетит от массивного тела на бесконечно большую дистанцию

$$v_{\Pi} = \sqrt{\frac{2GM}{r_k}} = \sqrt{2}v_1$$

# Вторая космическая скорость

Наименьшая скорость, которую надо придать объекту, для преодоления гравитационного притяжения более массивного тела.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r_k}}$$

# Задача №3

Определите вторую космическую скорость для Земли, если ее радиус составляет 6371 км, а масса  $5.97 \cdot 10^{24}$  кг.

# Задача №3

$$r_k = 6371 \text{ км}$$

$$M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

$$v_2 = ?$$

$$v_k = \sqrt{\frac{2GM}{r_k}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} \text{ кг}}{6371 \cdot 10^3 \text{ м}}}$$

$$= 11\,183.85 \text{ м/с} = 11.2 \text{ км/с}$$

# Третья космическая скорость

Наименьшая скорость, которую надо придать объекту, для преодоления гравитационного притяжения своей звездной системы

$$v_3 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 v_1^2 + v_2^2}$$