3.1. Основные понятия и допущения теории изгиба пластин

Пластиной называется тело призматической или цилиндрической формы, у которого высота мала, по сравнению с его размерами в плане (рис. 3.1). Высота такого тела называется *толщиной пластины* и обозначается буквой h.

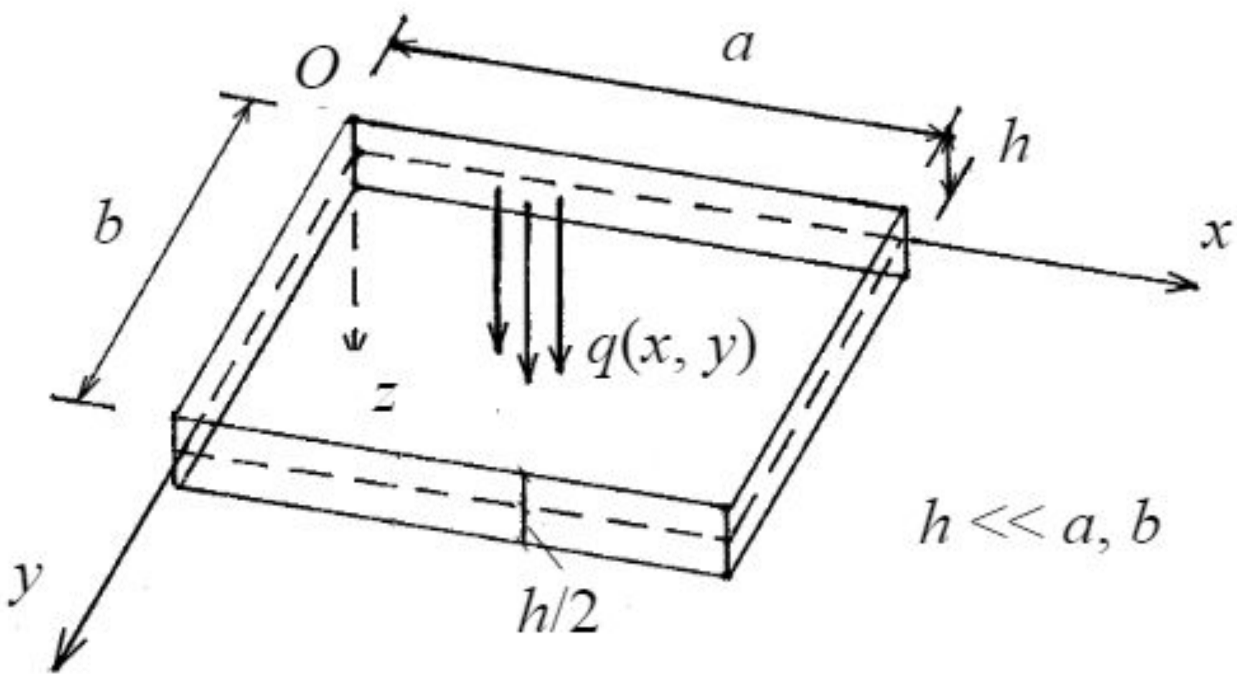


Рис. 3.1. Расчётная схема пластины

Плоскость, делящая пластину пополам по толщине, называется *срединной плоскостью пластины*. В теории пластин срединная плоскость играет такую же важную роль, как в сопротивлении материалов нейтральный слой при изгибе балок.

Оси x и y прямоугольной системы координат располагаются в срединной плоскости, а ось z направлена вниз по направлению внешней поперечной нагрузки интенсивностью $q(x, y)$, которая перпендикулярна срединной плоскости пластины. Таким образом, для точек срединной плоскости координата $z = 0$. Перемещения, которые под действием нагрузки получают точки срединной плоскости в направлении оси z, называют *прогибами*. Пластина изгибается, и срединная плоскость превращается в слегка искривлённую срединную поверхность изогнутой пластины.

Следует отметить, что прогиб w представляет собой основную компоненту вектора перемещения точек пластины. Так как рассматривается только упругая работа материала, величина прогибов мала по сравнению с толщиной пластины, т. е. $w << h$.

Линия пересечения боковой поверхности пластины со срединной плоскостью называется *контуром пластины*.

Расчётной схемой плит, применяемых в строительных конструкциях, является тонкая жёсткая пластина, которая работает на изгиб. *Тонкими* называются пластины, для которых имеет ме-

струкциях, является тонкая жесткая пластина, которая работает на изгиб. *Тонкими* называются пластины, для которых имеет место следующее отношение толщины к наименьшему характерному размеру в плане:

$$\frac{1}{5} \geq \frac{h}{b} \geq \frac{1}{80}.$$

Пластина считается *жёсткой*, если при её деформации под действием поперечной нагрузки можно пренебречь напряжениями растяжения или сжатия в срединной плоскости. Для жёсткой пластины величина отношения максимального прогиба к её толщине удовлетворяет условию:

$$\frac{w_{\max}}{h} \leq \frac{1}{5} \div \frac{1}{2}.$$

Тонкие жёсткие пластины можно рассчитывать по приближённой теории – *технической теории изгиба пластин*, основанной на допущениях, предложенных Кирхгофом:

1. *Допущение прямых нормалей* – любой линейный элемент mn, нормальный к срединной плоскости до деформации:

а) остаётся прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформации;

б) длина его не изменяется (рис. 3.2).

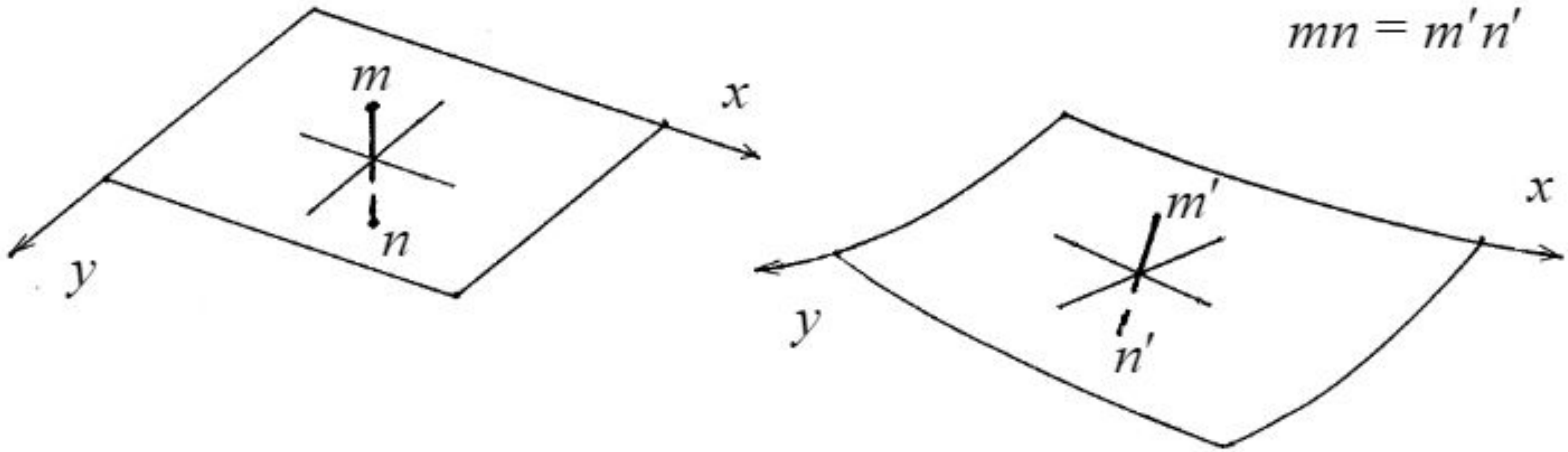


Рис. 3.2. К гипотезе прямых нормалей

Это допущение аналогично допущению плоских сечений Я. Бернулли при изгибе балок.

Я. Бернулли при изгибе балок.

Из допущения прямых нормалей следуют такие выводы:

а) так как прямые углы между элементом $m'n'$ и осями x и y остаются прямыми, то угловые деформации в указанных плоскостях отсутствуют, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{zx} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

б) так как длина элемента не меняется, то деформация вдоль оси z

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, прогибы w пластины не зависят от координаты z, т. е.

$$w = w(x, y).$$

Это означает, что все точки пластины, лежащие на одной вертикали, получают одинаковые прогибы. Следовательно, достаточно определить прогибы срединной плоскости, чтобы знать прогибы во всех точках пластины.

2. *Допущение о нерастяжимости срединной плоскости*: в срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия и сдвига. Поэтому срединная плоскость является нейтральной. Следовательно, в срединной плоскости перемещения

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 0. \tag{3.2}$$

3. *Допущение об отсутствии давления между слоями пластины*. Ввиду малости прогибов, давление между слоями пластины, параллельными срединной плоскости, мало, и напряжением σ_z, по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y, действующими в плоскости слоёв, можно пренебречь, т. е.

$$\sigma_z = 0.$$

Решение задачи определения напряжённо-деформирован-

Решение задачи определения напряжённо-деформированного состояния пластины удобнее проводить в перемещениях. Поэтому за основную неизвестную функцию примем функцию прогибов $w = w(x, y)$ срединной плоскости, а все остальные неизвестные величины выразим через прогиб w.

3.2. Перемещения, деформации и напряжения в пластине

Исследуем деформированное состояние пластины, точки которой под действием поперечной нагрузки получают перемещения. С помощью формул Коши (1.17) для угловых деформаций γ_{yz}, γ_{zx} и положений первого и второго допущения Кирхгофа можно получить выражения для перемещений пластины u и v вдоль осей x и y, соответственно.

Согласно первому допущению Кирхгофа,

$$\gamma_{yz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\gamma_{zx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Интегрируя полученные соотношения по z, получаем:

$$u = -\int \frac{\partial w}{\partial x} dz + f_1(x, y) \quad \Rightarrow \quad u = -z\frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y);$$

$$v = -\int \frac{\partial w}{\partial y} dz + f_2(x, y) \quad \Rightarrow \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y).$$

Определим функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, появившиеся при интегрировании уравнений в частных производных. Согласно второму допущению (3.2), перемещения u_0 и v_0 точек срединной плоскости, которой соответствует значение координаты $z = 0$, равны нулю. Подставляя это условие в последние формулы, получаем:

$$u_0 = f_1(x, y) = 0; \quad v_0 = f_2(x, y) = 0.$$

Окончательно можно записать:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \qquad (3.3)$$

Таким образом, компоненты вектора перемещения точек пластины в направлениях осей x и y определяются через функцию прогибов срединной плоскости пластины. Для срединной поверхности, согласно второму допущению, получаем $u = v = 0$

Окончательно можно записать:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3.3}$$

Таким образом, компоненты вектора перемещения точек пластины в направлениях осей x и y определяются через функцию прогибов срединной плоскости пластины. Для срединной поверхности, согласно второму допущению, получаем $u = v = 0$.

Далее, по формулам Коши (1.16), можно определить деформации в плоскости слоя:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \qquad (3.4)$$

Полученные компоненты тензора деформаций выражены через функцию прогибов точек срединной плоскости пластины. Получим выражения для компонент тензора напряжений, которые появляются в пластине при её деформировании.

Запишем, с учётом третьего допущения Кирхгофа, соотношения обобщённого закона Гука (1.22) для компонент тензора деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$

обращая которые, приходим к выражениям соответствующих напряжений:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}.$$

Далее, используя полученные соотношения для деформаций (3.4), записываем формулы для компонент тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в пластине через функцию прогиба w срединной плоскости:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \qquad (3.5)$$

Из полученных выражений для компонент перемещений, деформаций и напряжений (3.3) − (3.5) произвольного горизонтального слоя пластины следует, что перечисленные параметры НДС меняются по толщине пластины по *линейному закону*. Эти величины, согласно второму допущению Кирхгофа (3.2), равны нулю в точках срединной плоскости и достигают максимальных, одинаковых по абсолютной величине, но противоположных по знаку значений на нижней и верхней поверхностях пластины $z = \pm h/2$.

Касательные напряжения τ_{yz} и τ_{zx}, действующие в двух других координатных плоскостях yOz и zOx пластины, после подстановки угловых деформаций из формул (3.1) в соотношения закона Гука (1.23) обращаются в нуль:

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx} = 0.$$

Если теперь полученные напряжения подставить в первые два уравнения равновесия (1.2), записанные без учёта объёмных сил,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \qquad (3.6)$$

то они не будут удовлетворяться, т. е. не будут равняться нулю. Такой результат является следствием принятых допущений. В действительности касательные напряжения τ_{yz}, τ_{zx} не равны нулю. Чтобы уравнения (3.6) выполнились, необходимо напряжения τ_{yz}, τ_{zx} определить из этих уравнений равновесия путём их интегрирования. Перепишем первое уравнение следующим образом:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{Ez}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Интегрируя уравнение по координате z, получим:

$$\tau_{xz} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)\int z\,dz + f(x, y) =$$

$$= \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f(x, y).$$

Функция $f(x, y)$ определяется в соответствии с граничными условиями для касательных напряжений. Внешних касательных нагрузок, приводящих к появлению на поверхностях пластины касательных компонент тензора напряжений τ_{zx}, нет, что матенагрузок, приводящих к появлению на поверхностях пластины касательных компонент тензора напряжений τ_{zx}, нет, что математически можно представить так:

$$\tau_{zx}\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}}=0. \qquad (3.7)$$

Тогда условие (3.7) можно записать так:

$$\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+f(x,y)=0,$$

и получить для функции $f(x, y)$ следующее соотношение:

$$f(x,y)=-\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

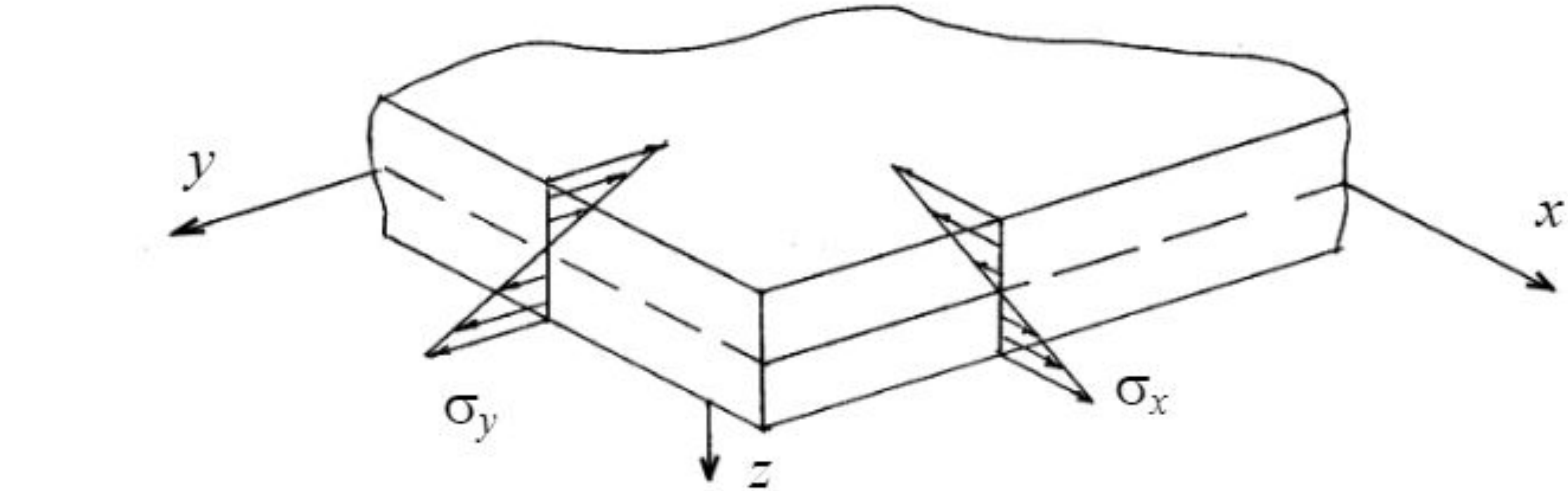
Окончательные выражения для напряжений τ_{yz}, τ_{zx} запишутся следующим образом (напряжение τ_{yz} определяется из второго уравнения равновесия (3.6) аналогичным способом):

$$\tau_{zx} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);$$

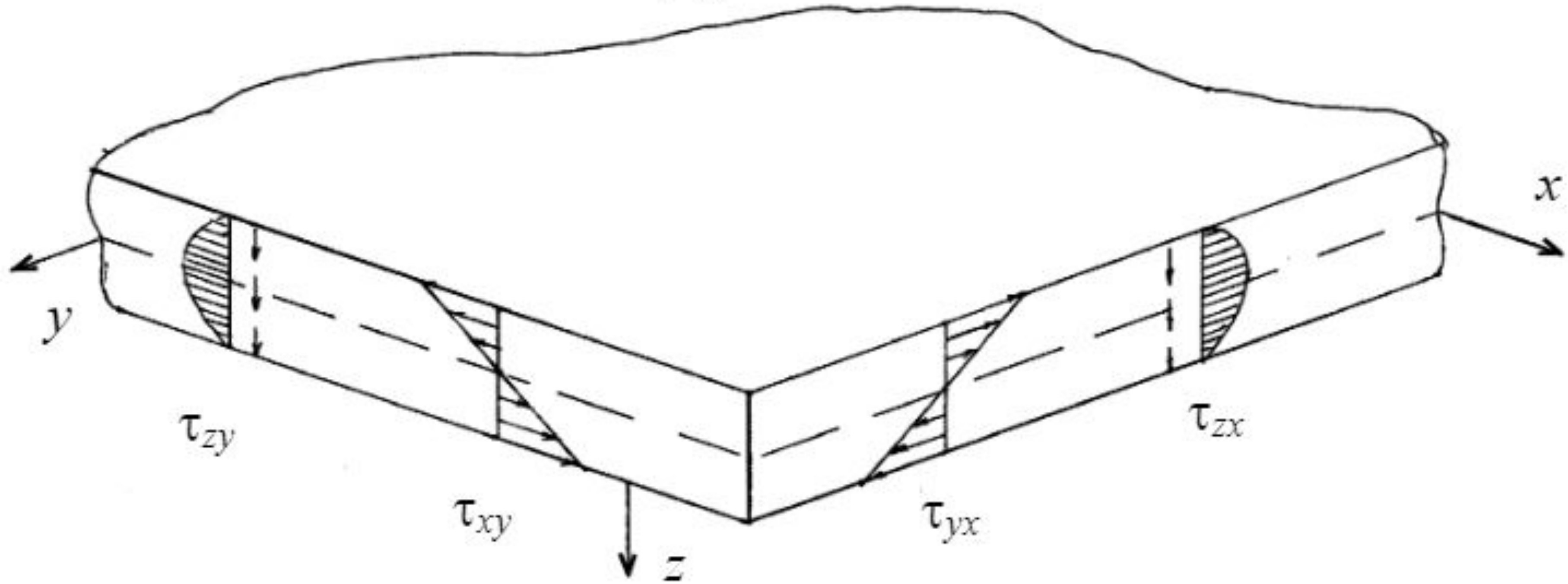
$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \qquad (3.8)$$

Из соотношений (3.8) следует, что зависимость напряжений τ_{yz}, τ_{zx} от координаты z имеет квадратичный, параболический характер. В точках срединной плоскости ($z = 0$) напряжения принимают максимальные значения. На поверхностях пластины $z = \pm h/2$, согласно граничным условиям (3.7), касательные напряжения равны нулю.

Распределение компонент тензора напряжений по толщине пластины показано на рис. 3.3.



y
x
σy
σx
z



x
y
τzy
τzx
τxy
τyx
z

3.3. Внутренние усилия в изгибаемой пластине

Полученные выражения для напряжений (3.5) и (3.8) неудобны для дальнейших выкладок, ибо они явно зависят от координаты z, а искомая функция прогибов w, через которую необходимо выразить другие параметры НДС, зависит от координат x и y. Избавиться от координаты z можно путём интегрирования напряжений по толщине пластины.

Отметим, что вторые производные в формулах (3.5) для нормальных напряжений σ_x и σ_y

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

приближённо выражают кривизны кривых, получаемых при сечении срединной поверхности пластины плоскостями $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, проведёнными через данную точку.

Эти кривизны характеризуют явление изгиба пластины и показывают, что напряжения σ_x и σ_y возникают вследствие изгиба. При изгибе пластины в каждой точке существуют два изгибающих момента в сечениях, нормальных к осям x и y. Для их определения выделим из пластины четырьмя вертикальными плоскостями элемент размерами dx, dy, h (рис. 3.4).

По элементарным полоскам шириной dz на гранях элемента приложены силы $\sigma_x dy\, dz$ и $\sigma_y dx\, dz$.

Изгибающие моменты M_x и M_y, действующие в точках на гранях элемента в сечениях с нормалью x и y, соответственно, подсчитаем как моменты этих сил относительно осей y и x, суммируя моменты по толщине пластины:

$$M_x\, dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x\, z\, dy\, dz = dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x\, z\, dz; \quad M_y\, dx = dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y\, z\, dz.$$