

Простейшие дифференциальные уравнения 2 порядка

1. Какое уравнение называется линейным ДУ первого порядка?

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

2. При каких условиях линейное ДУ первого порядка называется однородным?

$$Q(x) = 0$$

3. К какому ДУ приводится линейное однородное уравнение ?

ДУ с разделяющимися переменными

4. Каким методом решается линейное неоднородное ДУ ?

Метод Бернулли

5. В чем заключается метод Бернулли?

В замене $y = UV$

Проверка ДЗ:

$$yy' + 2 = 0 \quad y(0) = 2$$

$$y \frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$y \frac{dy}{dx} = -2 \quad | \times dx$$

$$y dy = -2 dx$$

$$\int y dy = \int -2 dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -2x + C \quad | \times 2$$

$$y^2 = -4x + C$$

$$y = \sqrt{-4x + C}$$

$$2 = \sqrt{-4 \cdot 0 + C}$$

$$C = 4$$

$$y = \sqrt{-4x + 4}$$

$$y = \sqrt{4 - 4x}$$

$$y = 2\sqrt{1 - x}$$

$$xy' - y = x^2 \cos x$$

$$y = U \cdot V \quad y' = U'V + V'U$$

$$x \cdot \underbrace{(U'V + V'U)}_{y'} - \underbrace{U \cdot V}_y = x^2 \cos x$$

$$xU'V + xV'U - U \cdot V = x^2 \cos x$$

$$xU'V + U(xV' - V) = x^2 \cos x \quad (***)$$

$$(xV' - V) = 0$$

$$x \frac{dV}{dx} - V = 0$$

$$x \frac{dV}{dx} = V \quad | \quad \times \frac{dx}{xV}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dV}{V} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\ln V = \ln x$$

$$V = x$$

$$(***) \quad xU' \cdot x = x^2 \cos x$$

$$x^2U' = x^2 \cos x$$

$$\frac{dU}{dx} = \cos x \quad \times dx$$

$$dU = \cos x dx$$

$$\int dU = \int \cos x dx$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$U = \sin x + C$$

$$y = U \cdot V$$

$$y = (\sin x + C)x$$

Простейшие ДУ второго порядка

Общий

$$y'' = f(x)$$

Алгоритм решения:

$$y'' = f(x) dx$$

$$y' = F(x) + C_1$$

$$y = \Phi(F(x)) + C_1x + C_2 \text{ – общее решение}$$

Пример 1: Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' = \sin 2x$

$$y'' = \sin 2x$$

$$y' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + C_1 \right) dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C_1x + C_2 = -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1x + C_2$$

$$y = -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1x + C_2$$

$$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$$

$$\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$$

Простейшие ДУ второго порядка

Пример 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения

если $y=3$ при $x=0$ и $y=9$ при $x=1$.

$$y'' = 18x + 2$$

$$y'' = 18x + 2$$

$$y' = \int (18x + 2) dx = 9x^2 + 2x + C_1$$

$$y = \int (9x^2 + 2x + C_1) dx = 3x^3 + x^2 + C_1x + C_2$$

$$y = 3x^3 + x^2 + C_1x + C_2 - \text{общее решение}$$

$$x = 0 \text{ и } y = 3 \Rightarrow 3 = 3 \cdot 0 + 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 3$$

$$x = 1 \text{ и } y = 9 \Rightarrow 9 = 3 + 1 + C_1 + 3 \Rightarrow C_1 = 2$$

$$y = 3x^3 + x^2 + 2x + 3 - \text{частное решение}$$

Простейшие ДУ второго порядка

Пример 3. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = 4e^{2x}$$

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C_1 = 2e^{2x} + C_1$$

$$y = 2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \cdot x + C_2 = e^{2x} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$y'' = 4e^{2x}$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$$

Пример 4. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = 2 \cos \frac{x}{4}$$

$$y' = 2 \cdot 4 \sin \frac{x}{4} + C_1 = 8 \sin \frac{x}{4} + C_1$$

$$y = -8 \cdot 4 \cos \frac{x}{4} + C_1 \cdot x + C_2 = -32 \cos \frac{x}{4} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$y'' = 2 \cos \frac{x}{4}$$

$$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$$
$$\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$$

Домашнее задание

Решите

уравнения:

1. $y'' = 36x + 12$

Ответ: $y = 6x^3 + 6x^2 + C_1x + C_2$

2. $y'' = \cos x$

Ответ: $y = -\cos x + C_1x + C_2$

3. $y' - y = e^x$

Ответ: $y = (x + C) \cdot e^x$

В процессе решения используйте переход: если $V = x$, $W = e^x$