Простейшие дифференциальные уравнения 2 порядка

1. Какое уравнение называется линейным ДУ первого порядка?

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$$

2. При каких условиях линейное ДУ первого порядка называется однородным?

$$\boxed{Q(x) = 0}$$

3. К какому ДУ приводится линейное однородное уравнение ?

ДУ с разделяющимися переменными

4. Каким методом решается линейное неоднородное ДУ ?

Метод Бернулли

5. В чем заключается метод Бернулли?

В замене $\boxed{y = UV}$

Проверка ДЗ:

$$yy' + 2 = 0 \qquad y(0) = 2$$

$$y\frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} = -2 \quad \Big| \times dx$$

$$ydy = -2dx$$

$$\int ydy = \int -2dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -2x + C \quad \Big| \times 2$$

$$y^2 = -4x + C$$

$$\boxed{y = \sqrt{-4x + C}}$$

$$2 = \sqrt{-4 \cdot 0 + C}$$

$$C = 4$$

$$y = \sqrt{-4x + 4}$$

$$\boxed{y = \sqrt{4 - 4x}}$$

$$\boxed{y = 2\sqrt{1 - x}.}$$

$$xy' - y = x^2 \cos x$$

$$y = U \cdot V \qquad y' = U'V + V'U$$

$$\underbrace{x \cdot (U'V + V'U)}_{y'} - \underbrace{U \cdot V}_{y} = x^2 \cos x$$

$$xU'V + xV'U - U \cdot V = x^2 \cos x$$

$$xU'V + U(xV' - V) = x^2 \cos x \quad (***)$$

$$(xV' - V) = 0$$

$$x\frac{dV}{dx} - V = 0$$

$$x\frac{dV}{dx} = V \quad \Big| \times \frac{dx}{xV}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dV}{V} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln x + C}$$

$$\ln V = \ln x$$

$$\boxed{V = x}$$

$$(***) \quad xU' \cdot x = x^2 \cos x$$

$$x^2 U' = x^2 \cos x$$

$$\frac{dU}{dx} = \cos x \quad \times dx$$

$$dU = \cos x dx$$

$$\int dU = \int \cos x dx$$

$$\boxed{\int \cos x \, dx = \sin x + c}$$

$$\boxed{U = \sin x + C}$$

$$y = U \cdot V \qquad \boxed{y = (\sin x + C)x}$$

Простейшие ДУ второго порядка

Общий вид: $\boxed{y'' = f(x)}$

Алгоритм решения:

$$y'' = f(x)dx$$
$$y' = F(x) + C_1$$
$$y = \Phi(F(x)) + C_1 x + C_2 \ \text{– общее решение}$$

Пример 1: Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' = \sin 2x$

$$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$$
$$\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$$

$$y'' = \sin 2x$$
$$y' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$$
$$y = \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C_1 x + C_2 = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2}$$

Простейшие ДУ второго порядка

Пример 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' = 18x + 2$ если y=3 при x=0 и y=9 при x=1.

$$y'' = 18x + 2$$

$$y' = \int (18x + 2)dx = 9x^2 + 2x + C_1$$

$$y = \int (9x^2 + 2x + C_1)dx = 3x^3 + x^2 + C_1x + C_2$$

$$\boxed{y = 3x^3 + x^2 + C_1x + C_2 - \textit{общее решение}}$$

$$x = 0\ и\ y = 3 \Rightarrow 3 = 3 \cdot 0 + 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 3$$

$$x = 1\ и\ y = 9 \Rightarrow 9 = 3 + 1 + C_1 + 3 \Rightarrow C_1 = 2$$

$$\boxed{y = 3x^3 + x^2 + 2x + 3 - \textit{частное решение}}$$

Простейшие ДУ второго порядка

Пример 3. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = 4e^{2x}$$

$$y'' = 4e^{2x}$$

$$\boxed{\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C}$$

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 = 2e^{2x} + C_1$$

$$y = 2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \cdot x + C_2 = e^{2x} + C_1 \cdot x + C_2$$

Пример 4. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = 2\cos\frac{x}{4}$$

$$y'' = 2\cos\frac{x}{4}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C\\&\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C\end{aligned}}$$

$$y' = 2 \cdot 4\sin\frac{x}{4} + C_1 = 8\sin\frac{x}{4} + C_1$$

$$y = -8 \cdot 4\cos\frac{x}{4} + C_1 \cdot x + C_2 = -32\cos\frac{x}{4} + C_1 \cdot x + C_2$$

Домашнее задание

Решите уравнения:

1. $y'' = 36x + 12$ Ответ: $y = 6x^3 + 6x^2 + C_1 x + C_2$

2. $y'' = \cos x$ Ответ: $y = -\cos x + C_1 x + C_2$

3. $y' - y = e^x$ Ответ: $y = (x + C) \cdot e^x$

В процессе решения используйте переход: если $\ln V = x$, то $V = e^x$