

ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ СЕВАСТОПОЛЕ

# Вычисление цепно-рекуррентных множеств периодических систем дифференциальных уравнений

Выполнил: студент учебной группы ПМ-401  
Панченко Владислав Андреевич

Научный руководитель: профессор кафедры  
прикладной математики и информатики  
Осипенко Георгий Сергеевич

# Постановка задачи

Разработать компьютерную программу для  
вычисления окрестности цепно-рекуррентного  
множества отображения Пуанкаре системы  
дифференциальных уравнений

# Актуальность

Моделирование большого числа математических моделей процессов с использованием динамических систем может дать толчок в их исследовании.

Если не ограничиваться линейными моделями, а захватить в рассмотрение еще дифференциальные уравнения спектр возможностей по исследованию реальных процессов значительно вырастет.

# Инструмент исследования

Для исследования будем пользоваться следующими инструментами:

- численными методами класса Рунге-Кутты для приведения исходной системы дифференциальных уравнений к дискретному виду
- символическим образом, который есть ориентированный граф дискретного фазового пространства

# Отображение Пуанкаре

Будем находить численное решение системы уравнений методом Рунге-Кутты. Будем использовать четырехчленную схему, которая имеет четвертый порядок точности.

Построим на его основе отображение Пуанкаре — проекцию площадки в фазовом пространстве на себя вдоль траекторий (фазовых кривых) системы.

# Отображение Пуанкаре

Цепно-рекуррентное множество, полученного отображения Пуанкаре, находится по средствам построения символического образа и вычисления окрестности.

$$P(d) = \left\{ \bigcup M(i), \text{ где } i \text{ — возвратная вершина} \right\}$$

Выбором диаметра ячейки строим малую окрестность цепно-рекуррентного множества.

# Программная реализация

По описанному алгоритму была реализована программа вычисляющая и выводящая на экран окрестность цепно-рекуррентного множества заданного отображения, с представленным ниже пользовательским интерфейсом.

File Type Here

Периодическое дифференциальное уравнение

$x' =$	$y$
$y' =$	$\alpha * x - \beta * x * x * x - \delta * y + 0.5 * \cos(2 / M\_PI * t)$

$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$x_0$	$y_0$	$t_0$	$\Delta t$	Run
-0.5	0.5	0.25	0	0	0	0.1	

# Программная реализация

В результате работы программы помимо численных результатов была получена визуализация цепно-рекуррентного множества дифференциального уравнения. Работа программы протекает итеративно, с уточнением изображения символического образа на каждой итерации. Количество итераций определяется временем работы программы с возможностью вывода изображения в файл на каждой итерации.



# Эксперимент

Рассмотрим уравнение Дуффинга - обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos \omega t$$

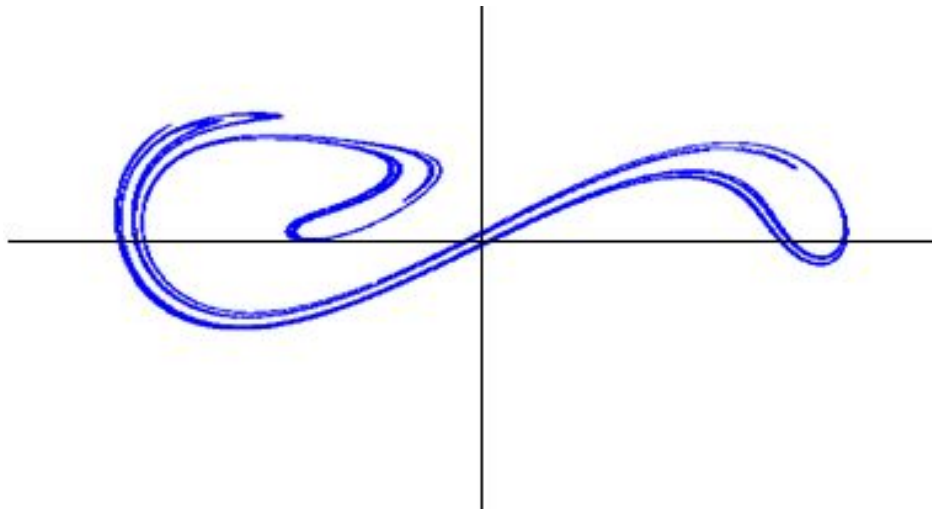
Перейдем к двумерной системе.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta = 0,25 \\ \omega = 1,0 \\ \gamma = 0,1 \end{cases}$$

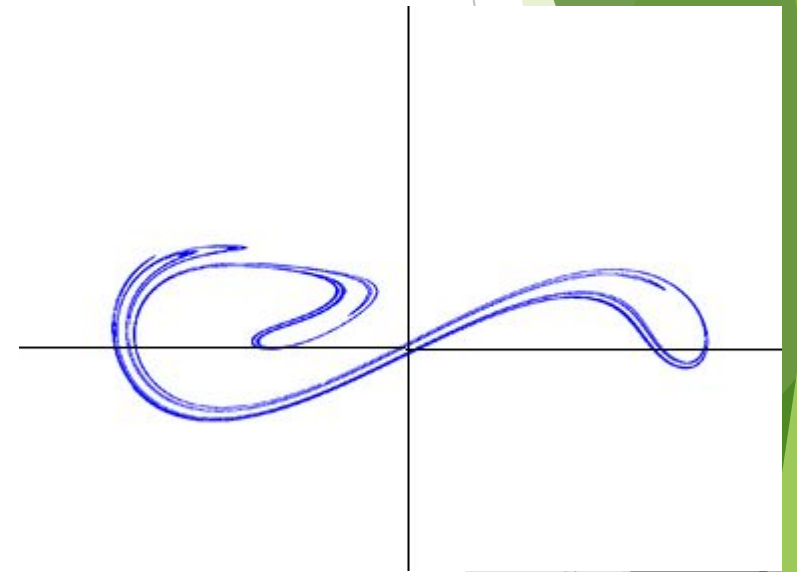
Отображение Пуанкаре  $f(x, y)$  – сдвиг вдоль траектории системы  
на период  $T = 2\pi$

# Визуализация



Диаметр ячейки = 0,0000038

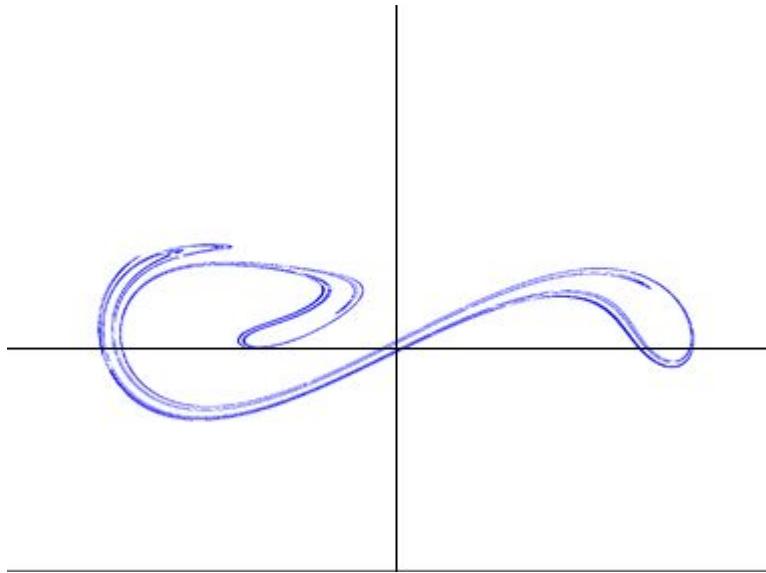
Число ячеек покрытия = 10575



Диаметр ячейки = 0,00000095

Число ячеек покрытия = 20300

# Визуализация



Диаметр ячейки = 0,00000023  
Число ячеек покрытия = 57201

# Результаты

Была реализована компьютерная программа для вычисления и визуализации окрестности цепно-рекуррентного множества отображения Пуанкаре системы дифференциальных уравнений