ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ СЕВАСТОПОЛЕ

Вычисление цепно-рекуррентных множеств периодических систем дифференциальных уравнений

Выполнил: студент учебной группы ПМ-401
Панченко Владислав Андреевич

Научный руководитель: профессор кафедры прикладной математики и информатики
Осипенко Георгий Сергеевич

Постановка задачи

Разработать компьютерную программу для вычисления окрестности цепно-рекуррентного множества отображения Пуанкаре системы дифференциальных уравнений

Актуальность

Моделирование большого числа математических моделей процессов с использованием динамических систем может дать толчок в их исследовании.

Если не ограничиваться линейными моделями, а захватить в рассмотрение еще дифференциальные уравнения спектр возможностей по исследованию реальных процессов значительно вырастет.

Инструмент исследования

Для исследования будем пользоваться следующими инструментами:

- численными методами класса Рунге-Кутты для приведения исходной системы дифференциальных уравнений к дискретному виду

- символическим образом, который есть ориентированный граф дискретного фазового пространства

Отображение Пуанкаре

Будем находить численное решение системы уравнений методом Рунге-Кутты. Будем использовать четырехчленную схему, которая имеет четвертый порядок точности.

Построим на его основе отображение Пуанкаре — проекцию площадки в фазовом пространстве на себя вдоль траекторий (фазовых кривых) системы.

Отображение Пуанкаре

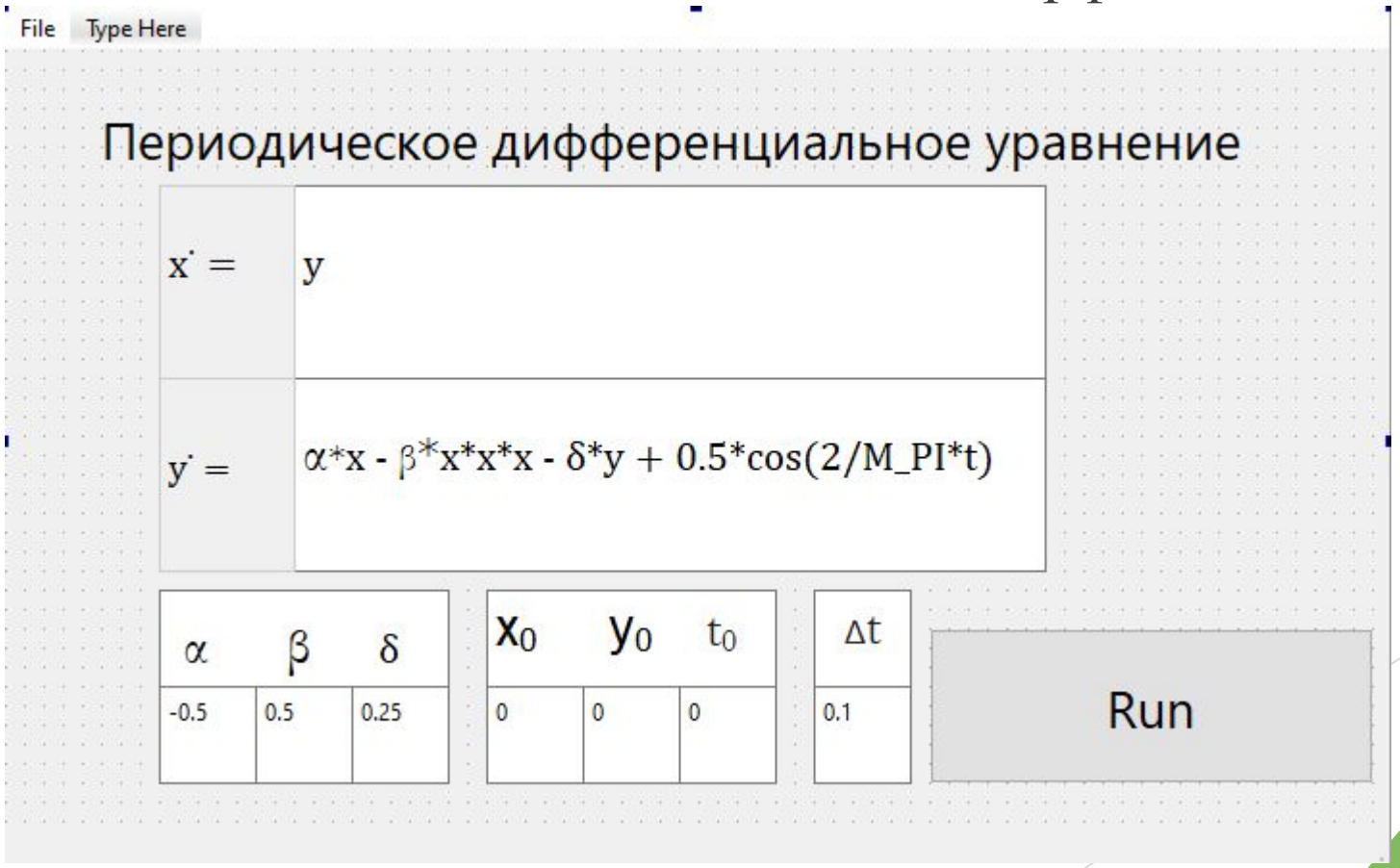
Цепно-рекуррентное множество, полученного отображения Пуанкаре, находится по средствам построения символического образа и вычисления окрестности.

$$P(d) = \left\{ \bigcup M(i) \text{, где } i \text{ – возвратная вершина} \right\}$$

Выбором диаметра ячейки строим малую окрестность цепно-рекуррентного множества.

Программная реализация

По описанному алгоритму была реализована программа вычисляющая и выводящая на экран окрестность цепно-рекуррентного множества заданного отображения, с представленным ниже пользовательским интерфейсом.



Программная реализация

В результате работы программы помимо численных результатов была получена визуализация цепно-рекуррентного множества дифференциального уравнения. Работа программы протекает итеративно, с уточнением изображения символического образа на каждой итерации. Количество итераций определяется временем работы программы с возможностью вывода изображения в файл на каждой итерации.

Эксперимент

Рассмотрим уравнение Дуффинга - обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos \omega t$$

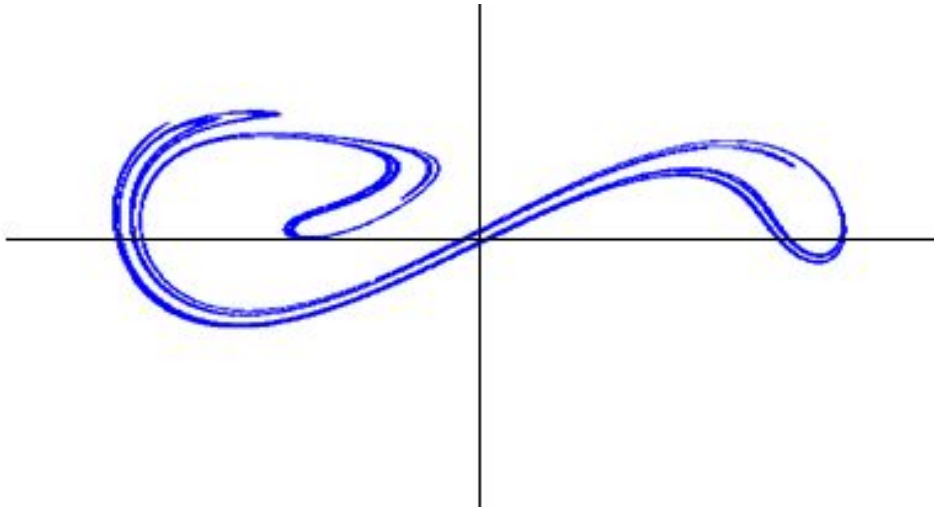
Перейдем к двумерной системе.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

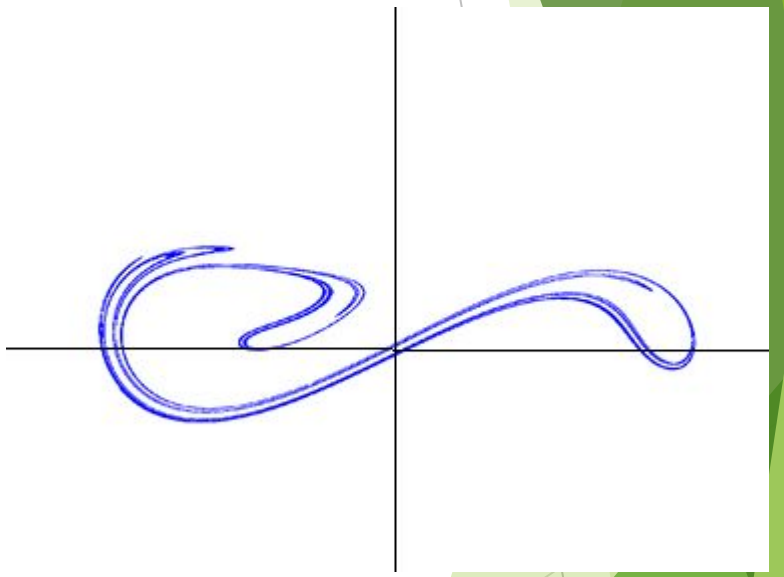
$$\begin{cases} \delta = 0{,}25 \\ \omega = 1{,}0 \\ \gamma = 0{,}1 \end{cases}$$

Отображение Пуанкаре $f(x, y)$ – сдвиг вдоль траектории системы на период $T = 2\pi$

Визуализация

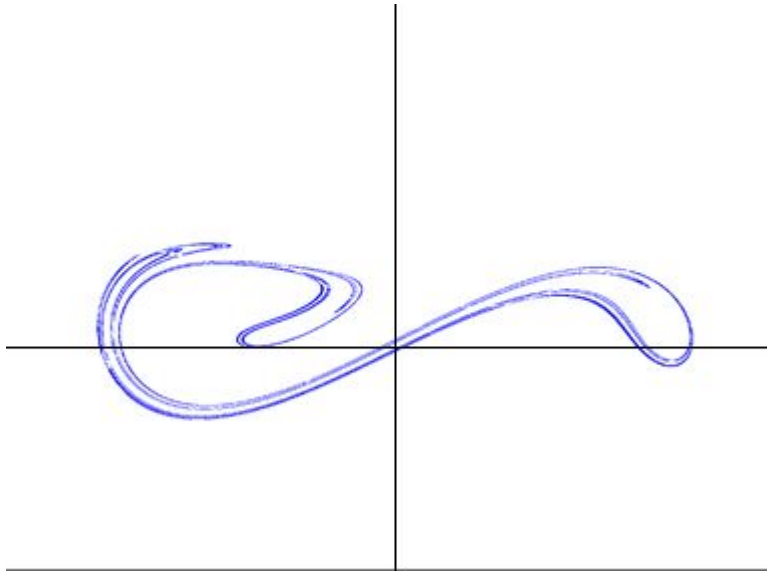


Диаметр ячейки = 0,0000038
Число ячеек покрытия = 10575



Диаметр ячейки = 0,00000095
Число ячеек покрытия = 20300

Визуализация



Диаметр ячейки = 0,00000023
Число ячеек покрытия = 57201

Результаты

Была реализована компьютерная программа для вычисления и визуализации окрестности цепно-рекуррентного множества отображения Пуанкаре системы дифференциальных уравнений