

6.7.

**Примеры  
решения задач.**

**Водородоподобные  
атомы.**

**Оптические спектры  
излучения.**

**А1.** Найти радиусы  $r_k$  трёх первых боровских электронных орбит в атоме водорода и скорости  $v_k$  электрона на них.

**Дано:**

$$k_1 = 1$$

$$k_3 = 3$$

$$r_k - ?$$

$$v_k - ?$$

**Решение.**

Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода может находиться на орбитах с радиусами

$$R_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{mZe^2} n^2.$$

Здесь  $n$  – целое число,  $Z = 1$ .

Радиус орбиты произвольного состояния с любым номером  $n$  удобно выразить через радиус первой боровской орбиты:

$$R_n = R_1 \cdot n^2.$$

Для атома водорода ( $Z = 1$ )

$$R_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

$$R_2 = R_1 \cdot 2^2 = 4 \cdot 0,529 \cdot 10^{-10} \approx 2,12 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

$$R_3 = R_1 \cdot 3^2 = 9 \cdot 0,529 \cdot 10^{-10} \approx 4,76 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

**А1.** Найти радиусы  $r_k$  трёх первых боровских электронных орбит в атоме водорода и скорости  $v_k$  электрона на них.

**Решение (продолжение).**

Скорость электрона в атоме водорода определим из второго закона Ньютона.

$$ma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{R^2}, \quad a = \frac{V^2}{R}.$$

где  $V$  - скорость электрона,  $R$  - радиус орбиты,  $Z = 1$ .

$$m \frac{V^2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2},$$

$$V_n = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mR_n}}.$$

$$R_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

$$R_2 = 2^2 \cdot R_1 \approx 2,12 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}. \quad R_3 = R_1 \cdot 3^2 \approx 4,76 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

**А1.** Найти радиусы  $r_k$  трёх первых боровских электронных орбит в атоме водорода и скорости  $v_k$  электрона на них.

**Решение (продолжение).**

$$V_n = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mR_n}}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{2,56 \cdot 10^{-38}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,29 \cdot 10^{-11}}} \approx 2,2 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}.$$

$$V_n = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mR_1 n^2}} = \frac{V_1}{n}.$$

$$V_2 = \frac{V_1}{2} \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}.$$

$$V_3 = \frac{V_1}{3} \approx 0,73 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}.$$

**Ответ:**  $r_1 = 53$  пм;  $r_2 = 212$  пм;  $r_3 = 477$  пм;  $v_1 = 2,19 \cdot 10^6$  м/с;  $v_2 = 1,1 \cdot 10^6$  м/с;  
 $v_3 = 7,3 \cdot 10^5$  м/с.

**A2.** Найти период  $T$  обращения электрона на первой боровской орбите атома водорода и его угловую скорость  $\omega$ .

**Решение.**

**Дано:**

$$n = 1$$

$$Z = 1$$

$$T - ?$$

$$\omega - ?$$

Угловую скорость электрона в атоме водорода определим из второго закона Ньютона.

$$ma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{R^2}, \quad a = \omega^2 R.$$

где  $\omega$  - скорость электрона,  $R$  - радиус орбиты,  $Z = 1$ .

$$m\omega^2 R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mR^3}}.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{2,56 \cdot 10^{-38}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,29^3 \cdot 10^{-33}}} \approx 4,4 \cdot 10^{16} \text{ (rad/c)}.$$

**42.** Найти период  $T$  обращения электрона на первой боровской орбите атома водорода и его угловую скорость

**Решение (продолжение).**

Период обращения по орбите связан с угловой скоростью простым соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{4,4 \cdot 10^{16}} \approx 1,43 \cdot 10^{-16} (\text{с}).$$

**Ответ:**  $T = 1,43 \cdot 10^{-16}$  с;  $\omega = 4,4 \cdot 10^{16}$  рад/с.

**V2.** Определить ток, соответствующий движению электрона по  $n$ -й орбите атома водорода.

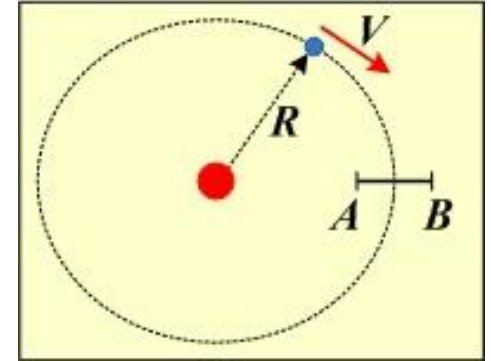
**Решение.**

Ток, связанный с движением электрона в атоме водорода

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

$\Delta q$  – заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время  $\Delta t$ .

В качестве сечения проводника рассмотрим плоскость  $AB$  на рисунке. Её пересекает один электрон за время, равное периоду обращения электрона вокруг ядра.



$$\Delta q = e, \quad \Delta t = T.$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e}{T} = \frac{1}{2\pi} e\omega.$$

Угловую скорость электрона  $\omega$  в атоме водорода определим из второго закона Ньютона.

$$ma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{R^2}, \quad a = \omega^2 R.$$

где  $\omega$  - скорость электрона,  $R$  - радиус орбиты,  $Z = 1$ .

**B2.** Определить ток, соответствующий движению электрона по  $n$ -й орбите атома водорода.

**Решение (продолжение).**

$$ma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{R^2}, \quad a = \omega^2 R.$$

$$m\omega^2 R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mR^3}}.$$

$$I = \frac{1}{2\pi} e\omega = \frac{1}{2\pi} e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mR^3}},$$

Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода может находиться на орбитах с радиусами

$$R_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2, \quad n - \text{целое число.}$$

$$I = \frac{1}{2\pi} e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mR^3}} = \frac{1}{2\pi} e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m} \cdot \frac{m^3 e^6}{(4\pi\epsilon_0)^3 \hbar^6 n^6}},$$



**B2.** Определить ток, соответствующий движению электрона по  $n$ -й орбите атома водорода.

**Решение (продолжение).**

$$I = \frac{1}{2\pi} e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m} \cdot \frac{m^3 e^6}{(4\pi\epsilon_0)^3 \hbar^6 n^6}} = \frac{1}{2\pi} e \sqrt{\frac{m^2 e^8}{(4\pi\epsilon_0)^4 \hbar^6 n^6}},$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \frac{m e^5}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 n^3}.$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \frac{m e^5}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 n^3} = \frac{81 \cdot 10^{18}}{6,28} \cdot \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10,49 \cdot 10^{-95}}{1,16 \cdot 10^{-102}} = \\ &= \frac{7,73 \cdot 10^4}{7,27} \cdot \frac{10^{-108}}{10^{-102}} = 1,06 \cdot 10^{-2} (A). \end{aligned}$$

**Ответ:**  $I_1 = 1,06 \cdot 10^{-2} \text{ A}$ .

**В1.** Фотон с энергией  $E = 16,5$  эВ выбивает электрон из невозбуждённого атома водорода. Какую скорость будет иметь электрон вдали от ядра?

**Дано:**

$$E = 16,5 \text{ эВ}$$

$$n = 1$$

$V - ?$

**Решение.**

Энергия электрона в основном состоянии в атоме водорода

$$E_{el} = E_1 = -13,6 \text{ (эВ)}.$$

После поглощения атомом фотона энергия электрона станет

$$E'_{el} = E_1 + E_{ph} = -13,6 + 16,5 = 2,9 \text{ (эВ)}.$$

Энергия электрона больше нуля, следовательно, он удалится от ядра атома на сколь угодно большое расстояние. При этом его потенциальная энергия станет равной нулю, а кинетическая

$$T = \frac{mV^2}{2} = E'_{el}.$$

Скорость электрона на большом удалении от ядра

$$V = \sqrt{\frac{2E'_{el}}{m}}.$$

$$V = \sqrt{\frac{2E'_{el}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 1,0 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}.$$

**Ответ:**  $v = 1 \cdot 10^6$  м/с.

**43.** Найти наименьшую  $\lambda_{min}$  и наибольшую  $\lambda_{max}$  длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.

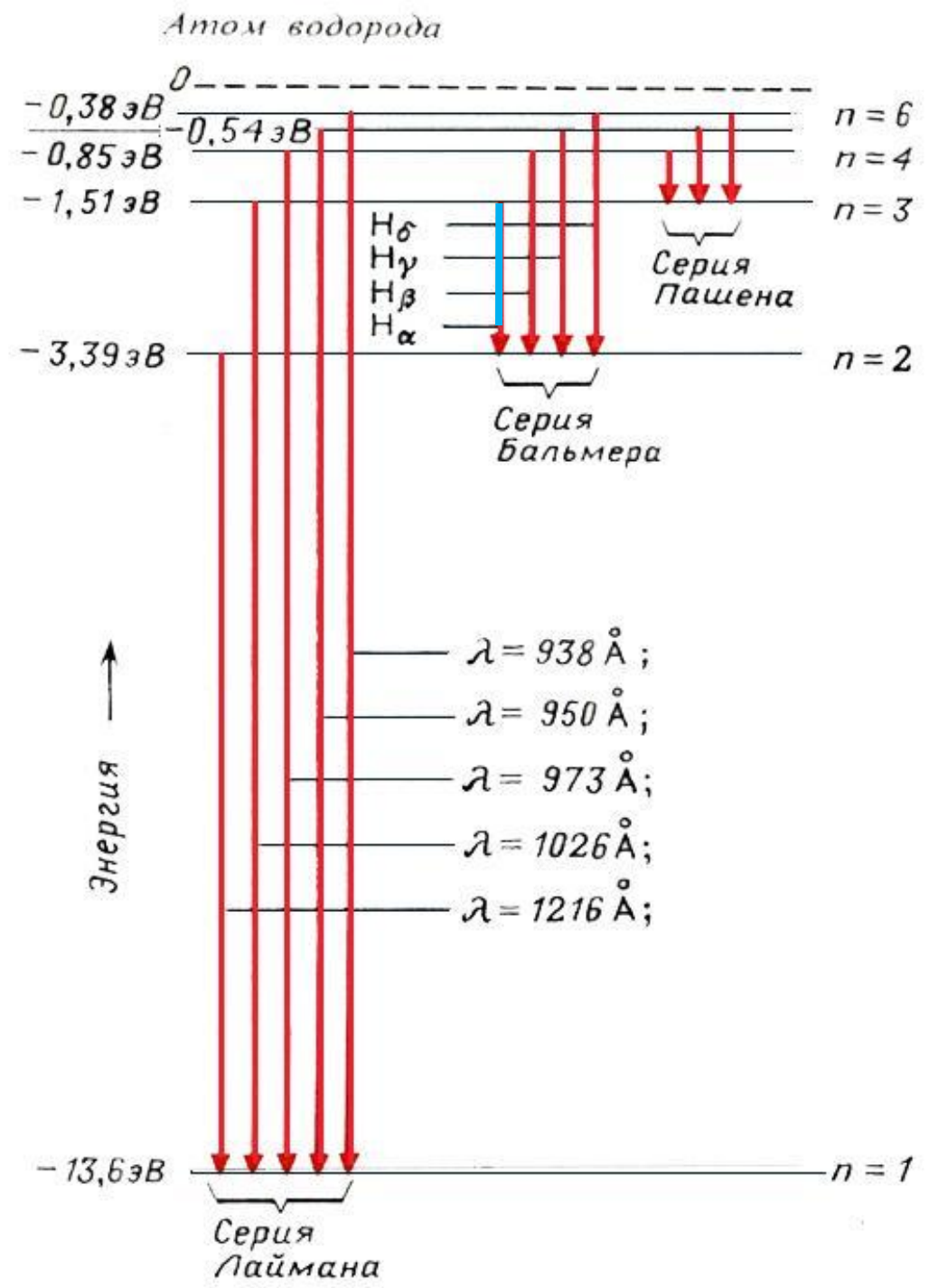
**Решение.**

К видимой области спектра относятся спектральные линии, связанные с переходами на второй энергетический уровень в атоме водорода (серия Бальмера).

Наибольшую длину волны (минимальную энергию) будет иметь линия, связанная с переходом электрона с уровня с номером  $m = 3$  на уровень с номером  $n = 2$ .

$$\frac{hc}{\lambda_{max}} = E_3 - E_2.$$

$$E_3 = \frac{E_1}{m^2}. \quad E_2 = \frac{E_1}{n^2}.$$



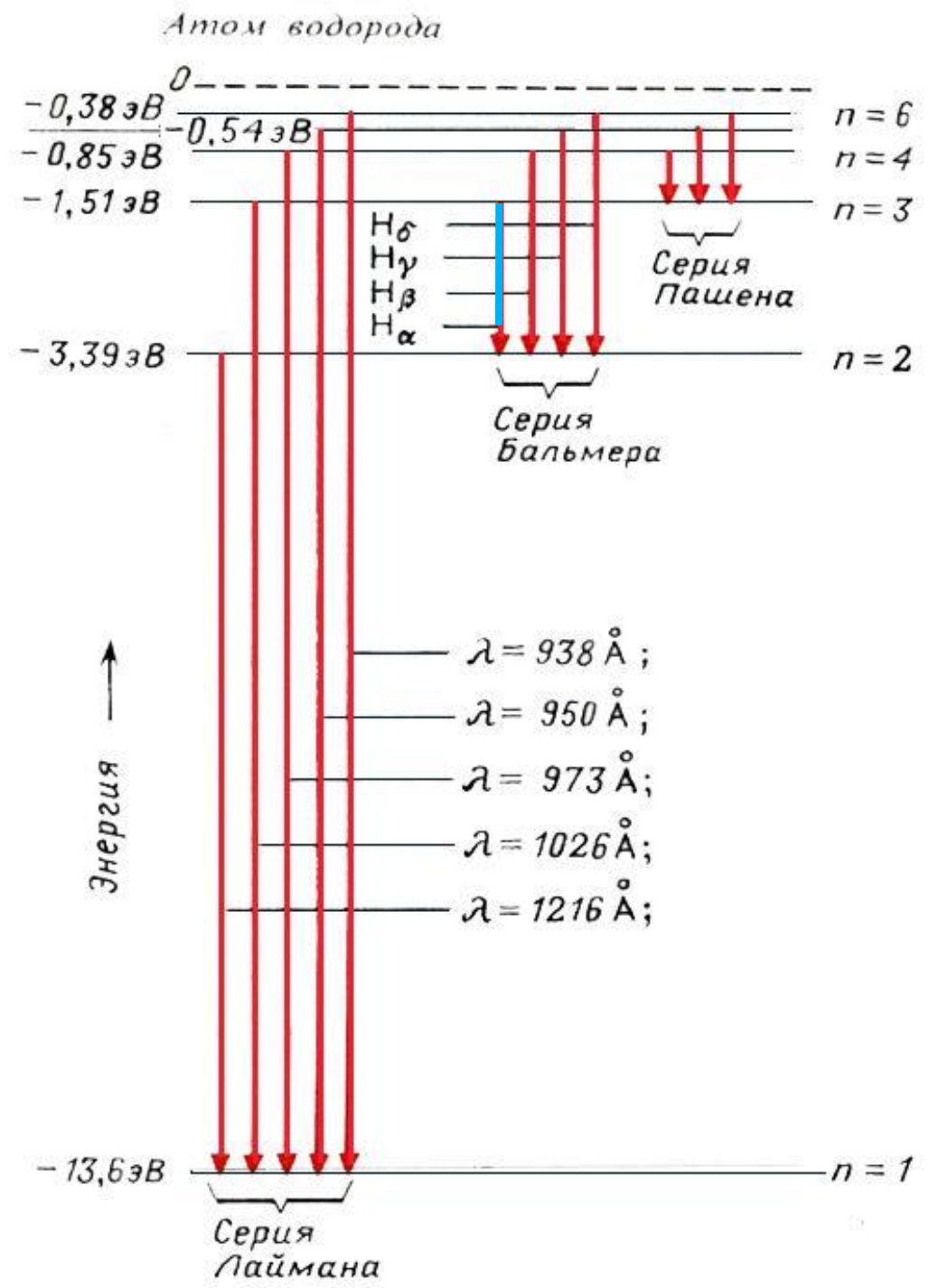
**43.** Найти наименьшую  $\lambda_{min}$  и наибольшую  $\lambda_{max}$  длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.

**Решение (продолжение).**

$$\frac{hc}{\lambda_{max}} = E_3 - E_2. \quad E_3 = \frac{E_1}{m^2}. \quad E_2 = \frac{E_1}{n^2}.$$

$$\frac{hc}{\lambda_{max}} = E_1 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{E_1 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right)} \approx 6,56 \cdot 10^{-7}$$



**43.** Найти наименьшую  $\lambda_{\min}$  и наибольшую  $\lambda_{\max}$  длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.

**Решение (продолжение).**

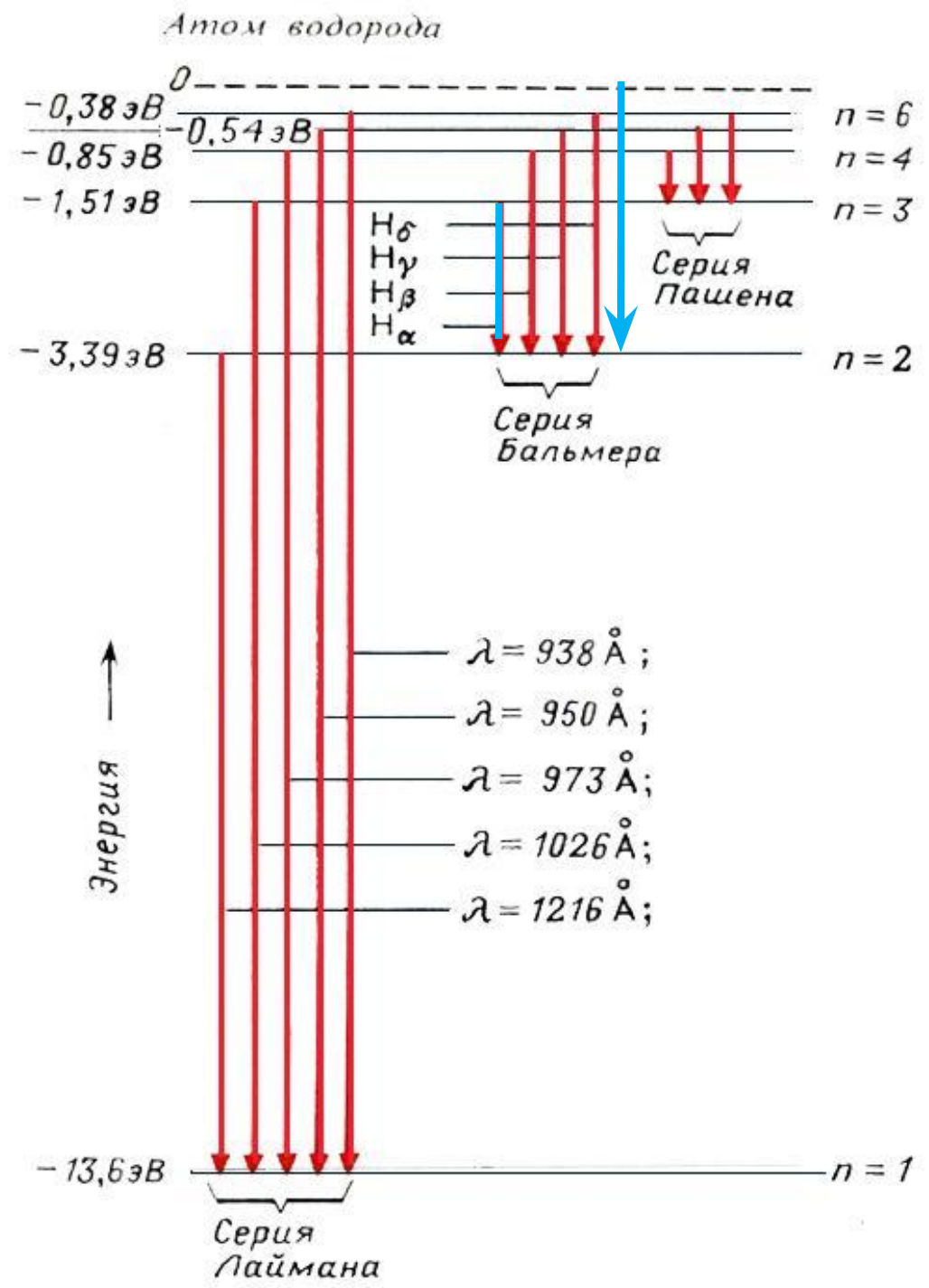
Наименьшую длину волны (максимальную энергию) будет иметь линия, связанная с переходом электрона с уровня с номером  $m = \infty$  на уровень с номером  $n = 2$ .

$$\frac{hc}{\lambda_{\min}} = E_{\infty} - E_2.$$

$$E_{\infty} = 0. \quad E_2 = \frac{E_1}{n^2}.$$

$$\frac{hc}{\lambda_{\min}} = 0 - E_2 = -\frac{E_1}{n^2}.$$

$$\lambda_{\min} = -\frac{hcn^2}{E_1}.$$



**43.** Найти наименьшую  $\lambda_{min}$  и наибольшую  $\lambda_{max}$  длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.

**Решение (продолжение).**

$$\lambda_{min} = -\frac{hcn^2}{E_1}.$$

$$\lambda_{min} = -\frac{hcn^2}{E_1} = \frac{-6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 4}{-13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 3,65 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

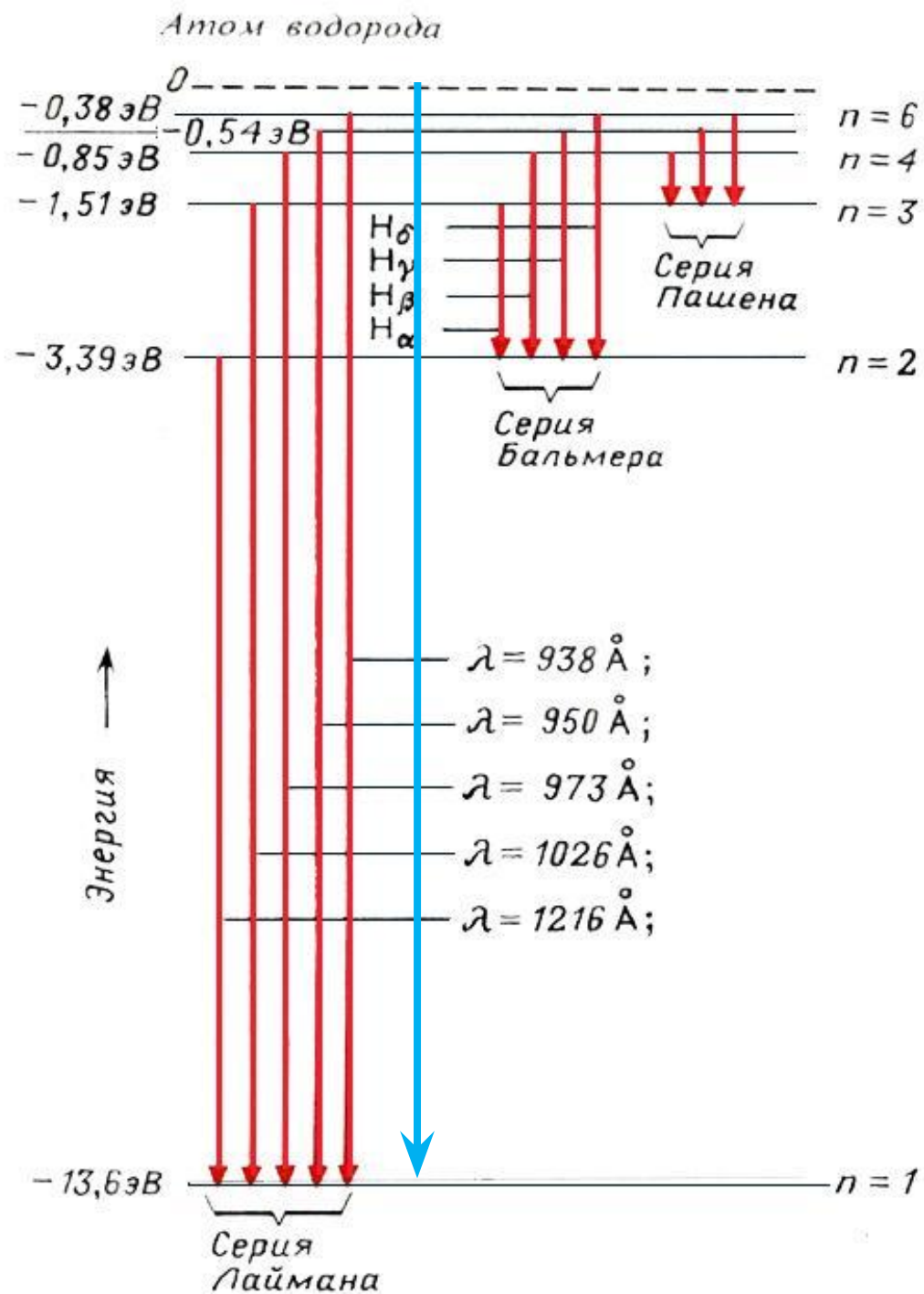
**Ответ:**  $\lambda_{min} = 365 \text{ нм}$ ;  $\lambda_{max} = 656 \text{ нм}$ .

**44.** Найти наименьшую длину волны в ультрафиолетовой области спектра водорода. Какую наименьшую скорость  $v_{min}$  должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами электронов появилась эта линия?

**Решение.**

К ультрафиолетовой области спектра относятся спектральные линии, связанные с переходами на первый энергетический уровень в атоме водорода (серия Лаймана).

Наименьшую длину волны (максимальную энергию) будет иметь линия, связанная с переходом электрона с уровня с номером  $m = \infty$  на уровень с номером  $n = 1$ .



**A4.** Найти наименьшую длину волны в ультрафиолетовой области спектра водорода. Какую наименьшую скорость  $v_{min}$  должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами электронов появилась эта линия?

**Решение (продолжение).**

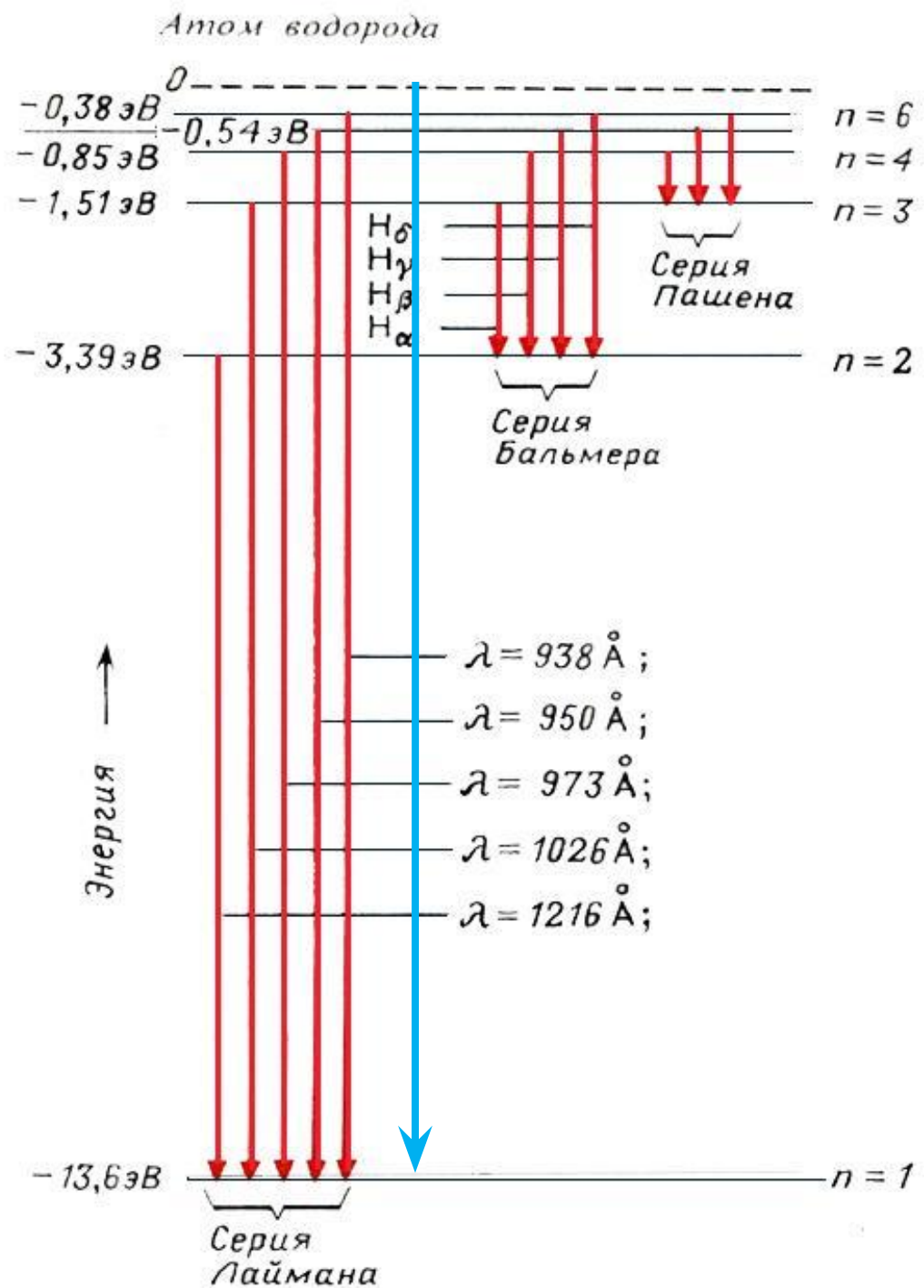
$$\frac{hc}{\lambda_{min}} = E_{\infty} - E_1.$$

$$E_{\infty} = 0. \quad E_n = \frac{E_1}{n^2}.$$

$$\frac{hc}{\lambda_{min}} = 0 - E_n = -\frac{E_1}{n^2}.$$

$$\lambda_{min} = -\frac{hcn^2}{E_1}.$$

$$n = 1.$$





**A4.** Найти наименьшую длину волны в ультрафиолетовой области спектра водорода. Какую наименьшую скорость  $v_{\min}$  должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами электронов появилась эта линия?

**Решение (продолжение).**

$$\lambda_{\min} = -\frac{hcn^2}{E_1}, \quad n = 1.$$

$$\lambda_{\min} = -\frac{hcn^2}{E_1} = \frac{-6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{-13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 0,91 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

При возбуждении атома электронными ударами кинетическая энергия электрона должна быть больше (или равна) энергии возбуждения.

$$T = \frac{mV_{\min}^2}{2} = E_{\infty} - E_1 = -E_1 = +13,6 \text{ (эВ)}.$$

$$V_{\min} = \sqrt{-\frac{2}{m} E_1} = \sqrt{-\frac{2 \cdot (-13,6) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 2,2 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}.$$

**Ответ:**  $\lambda = 91,4 \text{ нм}$ ;  $V_{\min} = 2,20 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ .

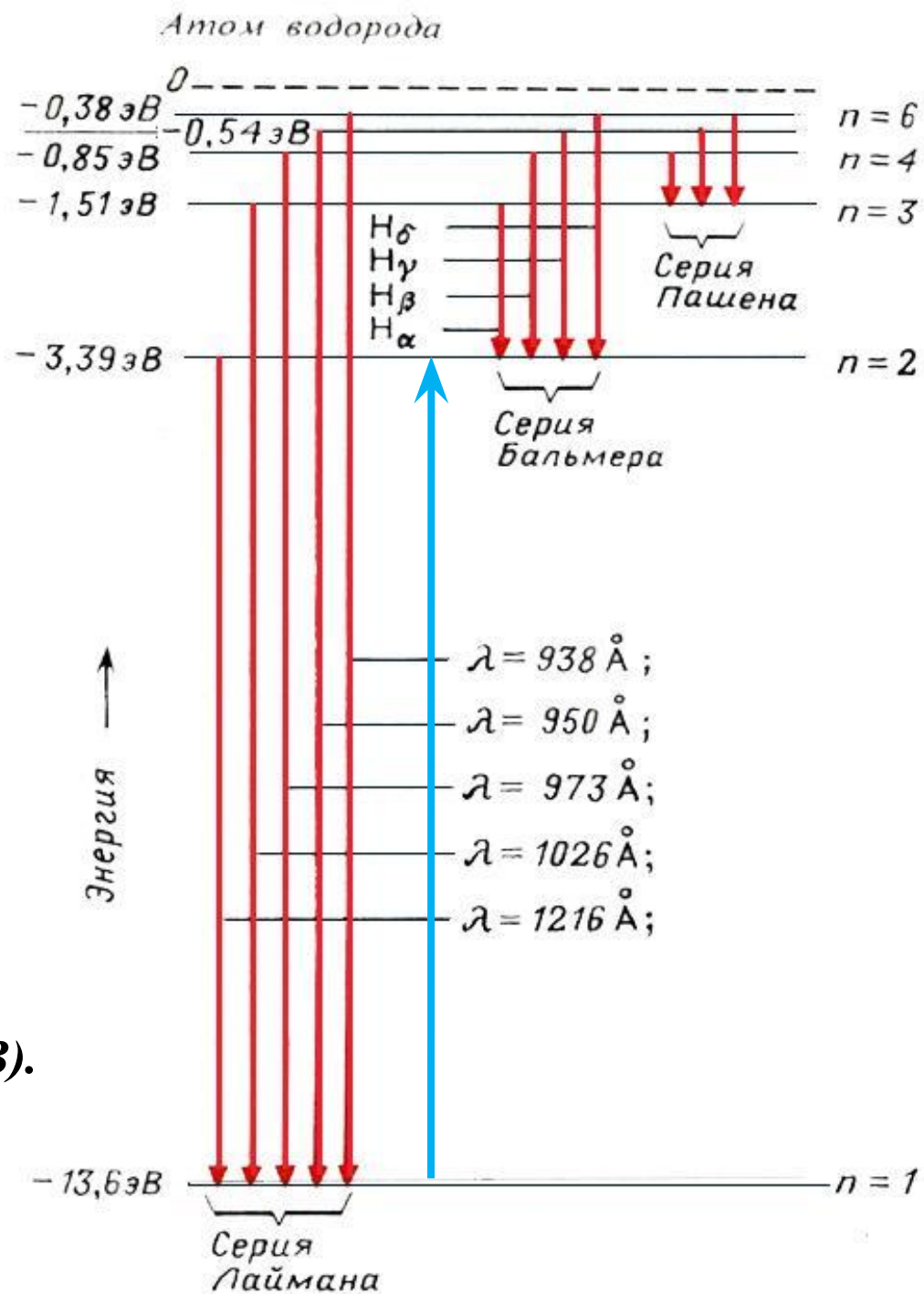
**45.** В каких пределах должна лежать энергия бомбардирующих электронов, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел только одну спектральную линию?

**Решение.**

Для того, чтобы было возможно наблюдать только одну спектральную линию, энергия электрона в атоме должна возрасти на величину, равную разности энергий второго и первого квантовых уровней.

$$\Delta E = E_2 - E_1,$$

$$\Delta E = \frac{E_1}{4} - E_1 = -\frac{3}{4} E_1 = +10,2 \text{ (эВ)}.$$



**45.** В каких пределах должна лежать энергия бомбардирующих электронов, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел только одну спектральную линию?

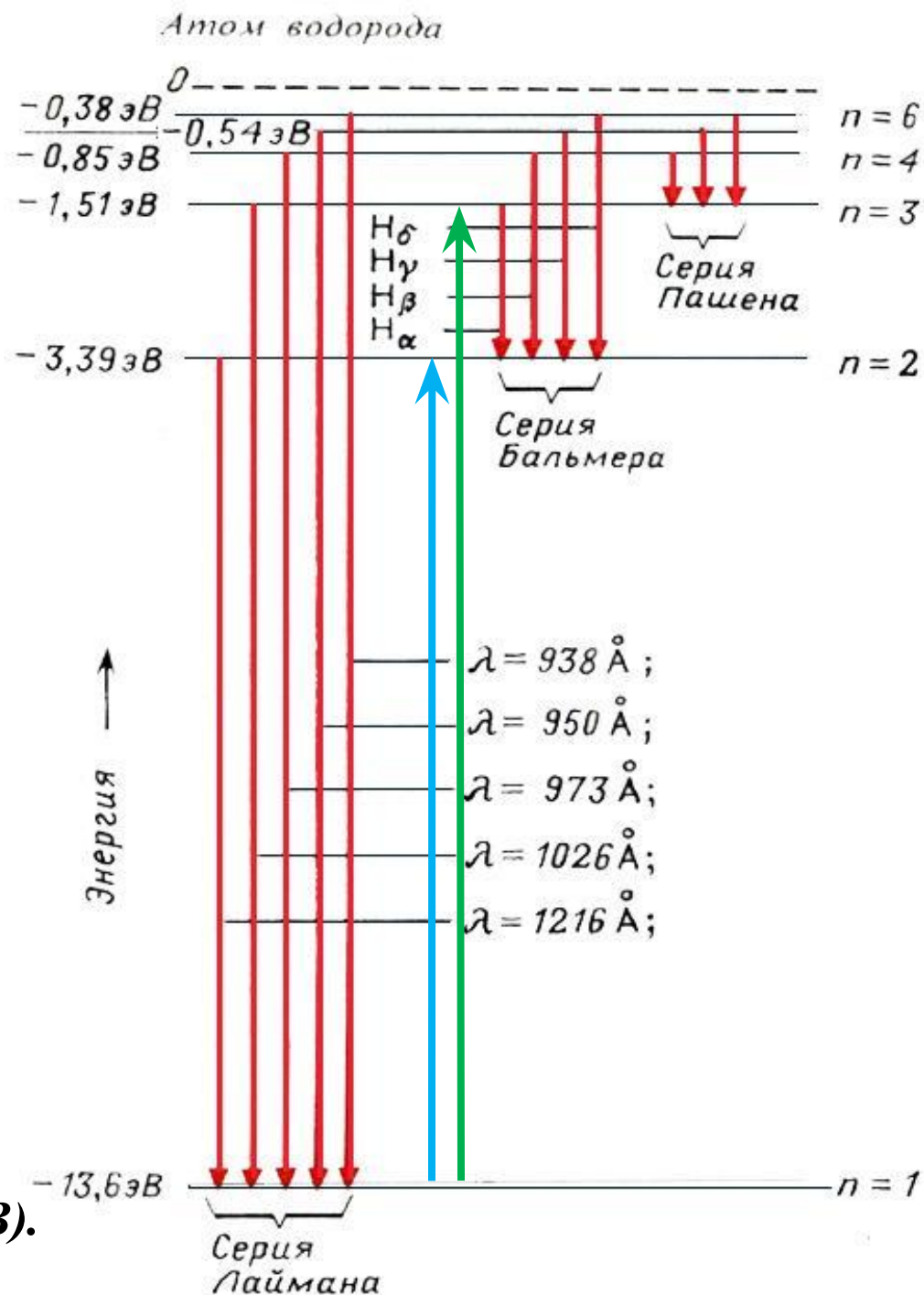
**Решение (продолжение).**

При столкновении бомбардирующий электрон не может передать энергию, большую, чем кинетическая энергия этого электрона, поэтому.

$$E_{\min} = \Delta E = -\frac{3}{4} E_1 = +10,2 \text{ (эВ)}.$$

В то же время электрон атома не должен получить энергию, достаточную для перехода на уровень номер 3.

$$\Delta E < \frac{E_1}{9} - E_1 = -\frac{8}{9} E_1 = +12,1 \text{ (эВ)}.$$



**45.** В каких пределах должна лежать энергия бомбардирующих электронов, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел только одну спектральную линию?

**Решение (продолжение).**

Таким образом, энергия бомбардирующего электрона должна быть меньше энергии, достаточную для перехода электрона в атоме на уровень номер 3.

$$E_{\max} < \frac{E_1}{9} - E_1 = -\frac{8}{9} E_1 = +12,1 \text{ эВ}.$$

**Ответ:** энергия бомбардирующих электронов должна лежать в пределах  
 $10,2 \text{ эВ} \leq E < 12,1 \text{ эВ}.$

**46.** В каких пределах должны лежать длины волн монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света наблюдались три спектральные линии?

**Решение.**

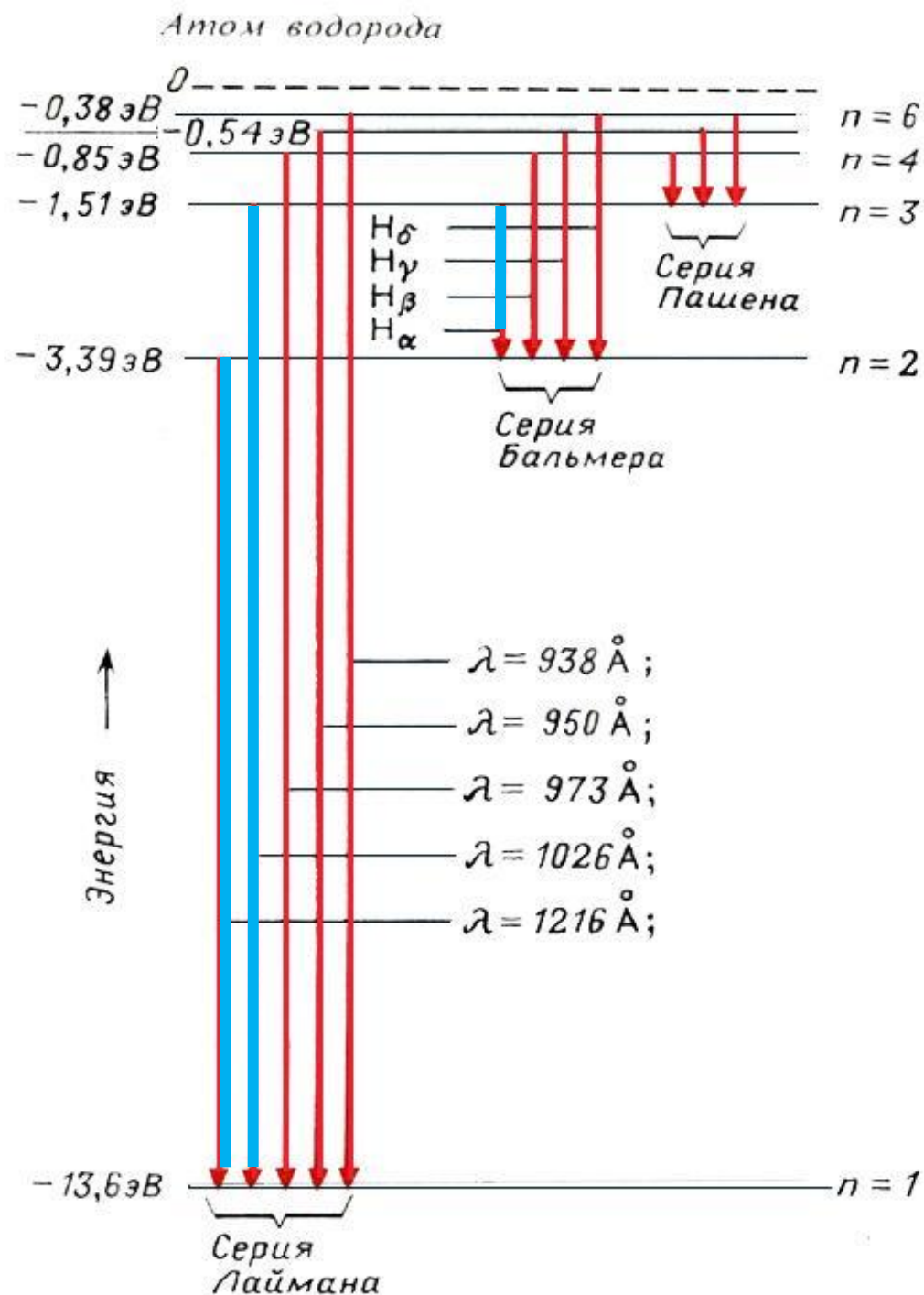
Для того, чтобы было возможно наблюдать три спектральные линии, энергия электрона в атоме должна возрасти на величину, равную разности энергий третьего и первого квантовых уровней.

В этом случае можно будет наблюдать линии с энергиями фотонов, равными

$$\Delta E_{13} = E_3 - E_1,$$

$$\Delta E_{23} = E_3 - E_2.$$

$$\Delta E_{12} = E_2 - E_1,$$



**А6.** В каких пределах должны лежать длины волн монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света наблюдались три спектральные линии?

**Решение (продолжение).**

Энергия фотонов не может быть меньше, чем

$$\Delta E_{13} = E_3 - E_1.$$

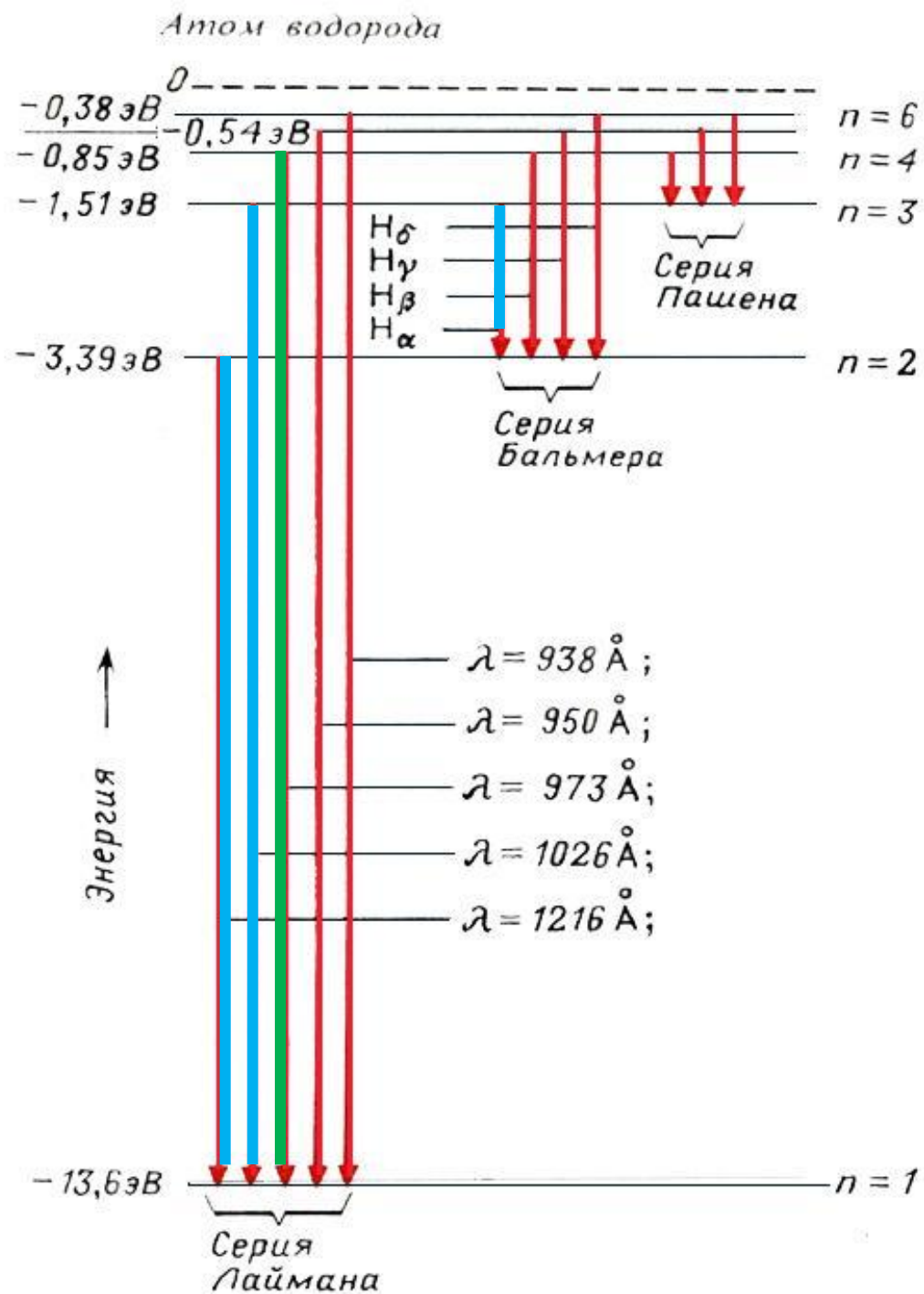
Энергия фотонов должна быть меньше, чем

$$\Delta E_{14} = E_4 - E_1.$$

$$\frac{hc}{\lambda_{\max}} = \Delta E_{13} = E_3 - E_1 =$$

$$= \frac{E_1}{9} - E_1 = -\frac{8}{9} E_1.$$

$$\lambda_{\max} = -\frac{9 hc}{8 E_1} = 102,6 \text{ (нм)}.$$



**46.** В каких пределах должны лежать длины волн монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света наблюдались три спектральные линии?

**Решение (продолжение).**

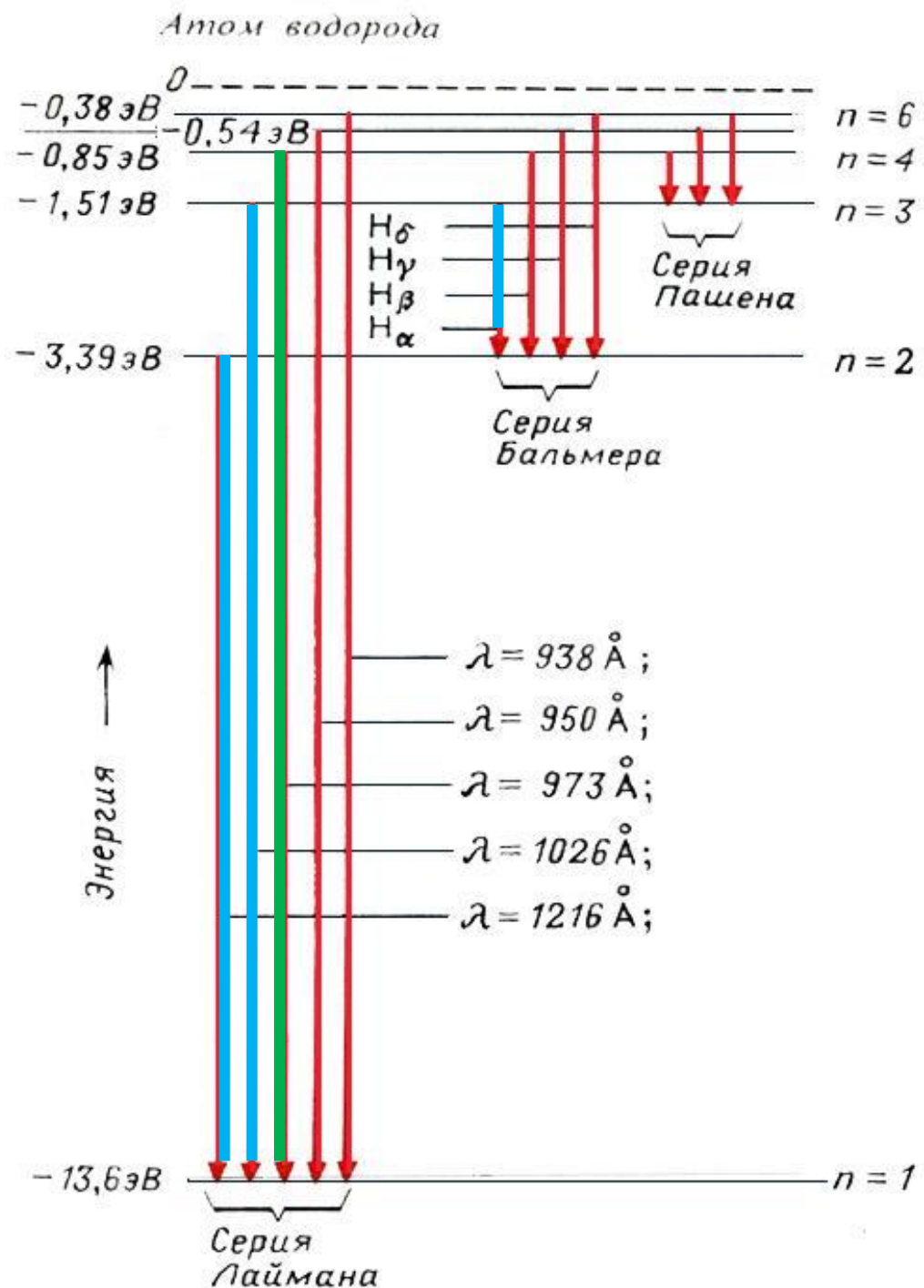
$$\frac{hc}{\lambda_{\min}} = \Delta E_{14} = E_4 - E_1 =$$

$$= \frac{E_1}{16} - E_1 = -\frac{15}{16} E_1.$$

$$\lambda_{\min} = -\frac{16}{15} \frac{hc}{E_1} = 97,3 \text{ (нм)}.$$

Особо отметим, что поглощаться будут только фотоны с энергией, равной энергии перехода.

**Ответ:**  $97,3 \leq \lambda \leq 102,6 \text{ нм}.$



**А??** Какие спектральные линии появятся в видимой части спектра при возбуждении атомов водорода электронами с энергией 13 эВ?

**Дано:**

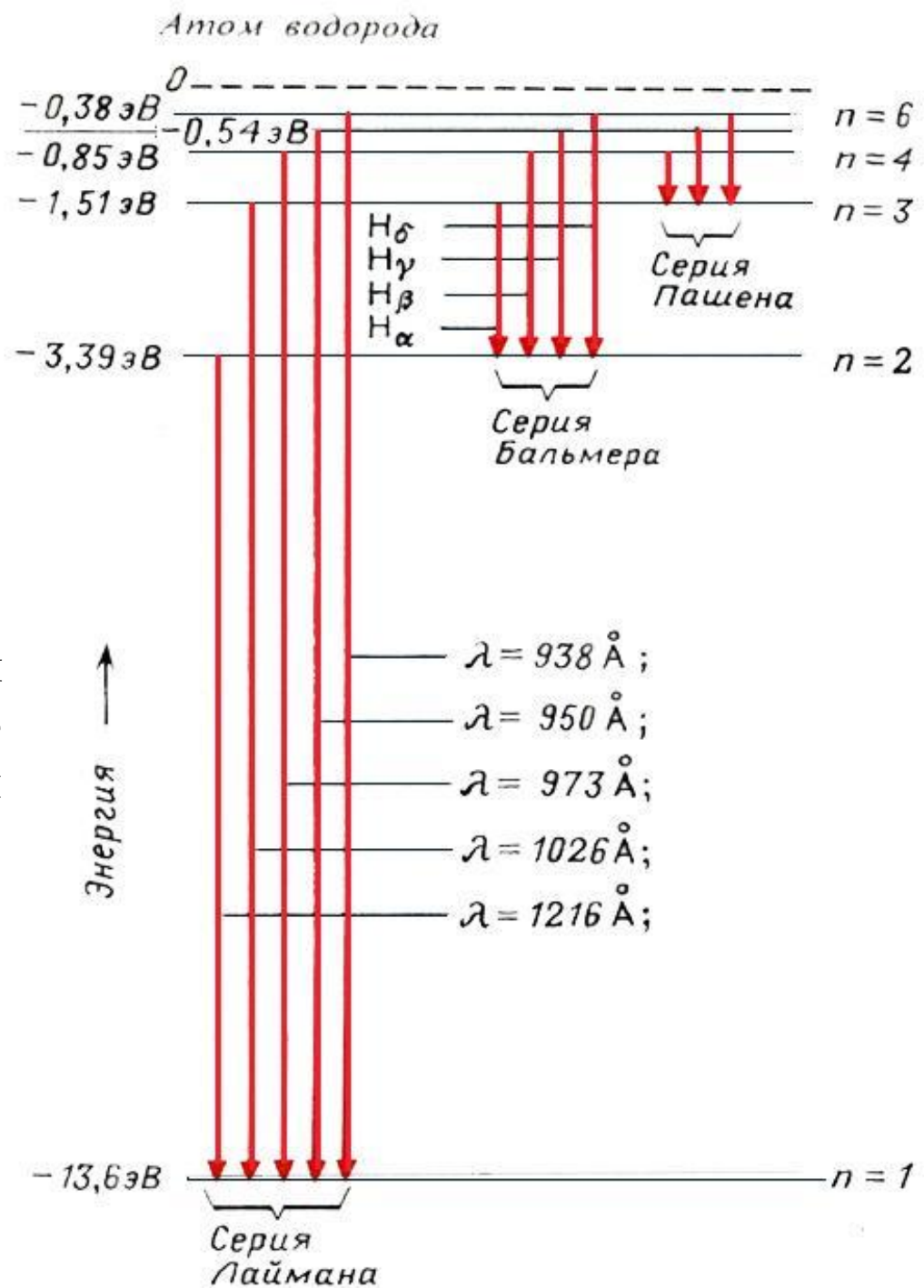
$$E = 13 \text{ эВ}$$

$\lambda_i - ?$

При столкновении бомбардирующий электрон не может передать энергию, большую, чем кинетическая энергия этого электрона, поэтому энергия перехода должна быть меньше энергии бомбардирующего электрона.

$$\Delta E < E_{el} = 13 \text{ (эВ)}.$$

**Решение.**





**4??** Какие спектральные линии появятся в видимой части спектра при возбуждении атомов водорода электронами с энергией 13 эВ?

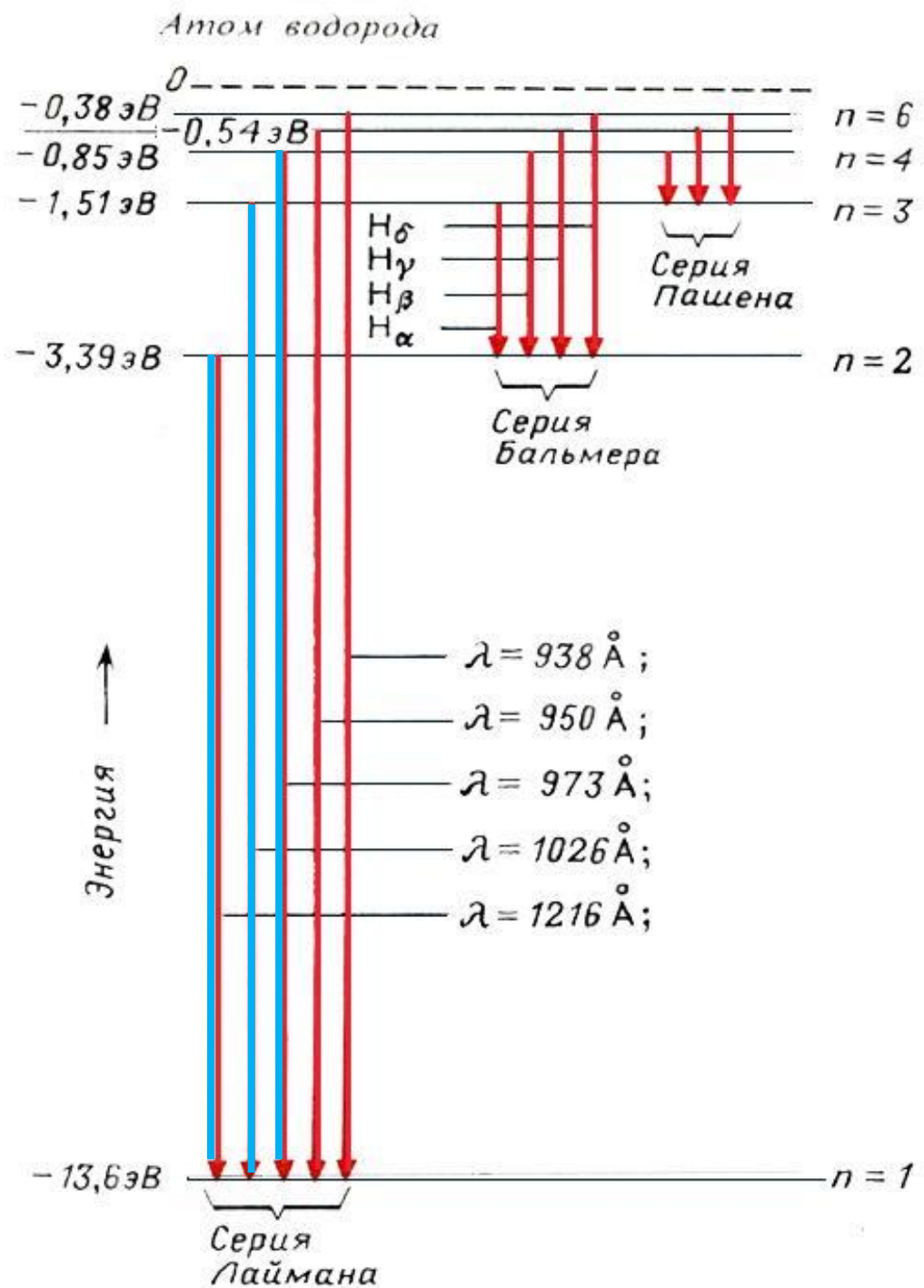
**Решение (продолжение).**

Проверим, какие переходы удовлетворяют этому условию.

$$\begin{aligned} \Delta E_{12} &= E_2 - E_1 = \frac{E_1}{4} - E_1 = \\ &= -\frac{3}{4} E_1 = +10,2 \text{ (эВ)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{13} &= E_3 - E_1 = \frac{E_1}{9} - E_1 = \\ &= -\frac{8}{9} E_1 = +12,1 \text{ (эВ)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{14} &= E_4 - E_1 = \frac{E_1}{16} - E_1 = \\ &= -\frac{15}{16} E_1 = +12,75 \text{ (эВ)}. \end{aligned}$$



**А??** Какие спектральные линии появятся в видимой части спектра при возбуждении атомов водорода электронами с энергией 13 эВ?

**Решение (продолжение).**

$$\begin{aligned} \Delta E_{15} &= E_5 - E_1 = \frac{E_1}{25} - E_1 = \\ &= -\frac{24}{25} E_1 = +13,06 \text{ (эВ)}. \end{aligned}$$

Энергия этого перехода больше 13 эВ, следовательно, такой переход в данном случае невозможен.

Определим спектральные линии, которые можно наблюдать в этом случае (см. рисунок).

Всего таких линий шесть.

